CAPÍTULO 12

LE JEU DU TREIZE: LAS SOLUCIONES TEMPRANAS DE MONTMORT Y NICOLÁS BERNOULLI AL PROBLEMA DE LAS COINCIDENCIAS

MARÍA DOLORES PÉREZ HIDALGO
JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
Universidad de Sevilla

Introducción

Entre los muchos juegos de azar estudiados por Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) en su obra *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, publicada en 1708 (segunda edición aumentada en 1713) nos encontramos con el Juego del Trece (Jeu du Treize) que se practica con una baraja de 52 naipes, con trece de cada palo. El juego, en el que participa "la banca" (elegida al azar) y el resto de jugadores (cualquier número) le dio pie al autor para proponer y resolver un problema que, con el tiempo, se convirtió en un clásico de la literatura probabilística: **el problema de las coincidencias**. Por tanto, por primera vez en la historia aparece este problema y el mismo surge asociado al nombre de Montmort. Básicamente, se trata de calcular la probabilidad que tiene la banca de ganar este juego. En la primera, edición de su obra, la de 1708, encontramos el planteamiento (no la resolución) del problema básico y algunos asociados que, prácticamente, son pequeñas variantes del primero. En la segunda edición, la de 1713, aparece el problema mucho más enriquecido y matizado. En el periodo intermedio entre ambas ediciones, Montmort había mantenido correspondencia con dos miembros de la familia Bernoulli, con Johann (1667-1748) y con Nicolás (1687-1759), y en dicha interesante y amplia correspondencia (no en cuanto al número de cartas, sino en cuanto a la extensión de cada una) fue abordado, entre otros muchos problemas, el de las coincidencias. Por tanto, en la segunda edición encontramos ya la resolución de Montmort y, al añadirse toda esa correspondencia, también la solución de Nicolás Bernoulli.

Casi inmediatamente después, De Moivre (1718) aborda el problema desde la perspectiva de un teorema general sobre la probabilidad de sucesos compuestos, obteniendo dicho teorema por el método de inclusión y exclusión, método usado ya por los dos anteriores para derivar el valor de una expresión con la que calcular la probabilidad del banquero de ganar el juego. Montmort usará ese método de demostración en otras partes de su obra.

Tras estas aportaciones tempranas, el problema de las coincidencias aparecerá a lo largo de la historia en muy diferentes contextos y, por tanto, resuelto por diferentes autores, muchos de ellos inconscientes de las contribuciones fundamentales de Montmort, Nicholas Bernoulli y de Moivre. Así, por citar a algunos, Laplace (1812), Euler (17539, Lambert (1713), Young (1819), Oettinger (1837), nos dan una idea de la importancia de este problema en el desarrollo del cálculo que empezó a tener vida propia a partir del siglo XVII. En la actualidad siguen apareciendo nuevas variantes y formas de resolución del mismo.

Nuestro objetivo en este trabajo es describir cómo fue presentado y resuelto este problema por los dos autores pioneros, Montmort y Nicholas Bernoulli, cosa que hacemos en los dos apartados que siguen. Intentamos hacerlo usando notación actual pero siendo fieles al máximo a las palabras y cálculos de ambos.

La solución de Montmort

Como se ha dicho, en el juego participa cualquier número de jugadores y se desarrolla con una baraja francesa de 52 cartas, con 13 cartas por cada palo, habiendo en cada uno un as (nº 1), nueve números (números del 2 al 10), el valet (nº 11), la reina (nº 12) y el rey (nº 13).

Por sorteo, los jugadores eligen al que hace de banca (el que tiene la mano). Cada uno de los otros jugadores hace la apuesta que crea oportuna de forma que, si la banca gana, todo lo apostado por los demás es para la banca y, si pierde, la banca paga a cada jugador lo apostado por el mismo. Y comienza el juego. Dejemos que el propio Montmort nos lo describa (la descripción del juego y el planteamiento y resolución de los problemas asociados los encontramos en las páginas 130-143 de la 2ª edición):

En primer lugar los jugadores extraen para decidir quién tendrá la mano. Supongamos que éste es Pedro, y que el número de jugadores sea el que se quiera. Pedro tendrá un juego completo compuesto de cincuenta y dos cartas mezcladas a discreción, las saca una tras otra, nombrando y diciendo uno al extraer la primera carta, dos al extraer la segunda, tres al extraer la tercera, y así sucesivamente hasta la decimotercera que es un rey. Entonces, si en toda esta sucesión de cartas no hay ninguna extracción según el rango con el que ha sido nombrado, paga aquello que los jugadores pusieron en juego, y cede la mano a aquél que le sigue a su derecha.

Pero si consigue en la sucesión de trece cartas, extraer la carta que él nombra, por ejemplo, extrae un as al tiempo que dice uno, o un dos al tiempo que dice dos, o un tres en el tiempo que dice tres, y así, toma todo lo que está en juego, y vuelve a empezar como al principio, dice uno, después dos, y así.

Puede ocurrir que Pedro haya ganado varias veces, y volviendo a empezar por uno, no tenga cartas suficientes en la mano para llegar hasta trece, entonces debe, cuando el juego le falte, mezclar las cartas, cortar, y a continuación extraer del juego completo el número de cartas que le son necesarias para continuar el juego, comenzando por aquella donde se quedó en la mano anterior. Por ejemplo, si extrayendo la última carta dijo siete, debe al extraer la primera carta en el juego completo, después de que haya cortado, decir ocho, seguido de nueve, y así hasta trece, a menos que gane antes, en cuyo caso vuelve a empezar, nombrando en primer lugar uno, después dos, y el resto como se acaba de explicar. Por lo que Pedro puede hacer varias manos seguidas, igual que puede continuar el juego hasta el infinito.

La descripción del juego da pie al planteamiento de problemas asociados. En la primera edición, la de 1708, sólo aparecen planteados. En particular propone cuatro para resolver por el lector al final del texto. En la segunda, la de 1713, planteados y resueltos. Durante el intervalo transcurrido entre ambas ediciones, Montmort mantuvo correspondencia con los Bernoulli. En particular con Johann (1667-1748) y con Nicolás (1687-1759), sobrino del primero. Dicha correspondencia es conocida gracias a que la misma fue incorporada a la segunda edición del texto que nos ocupa. Destacamos la carta que Johann Bernoulli remitió a Montmort el 17 de marzo de 1710, en la que se añaden unas notas de su sobrino Nicolás (págs. 299-303 de la 2ª edición) donde, entre otros, aporta su demostración sobre el juego del Trece, precisamente; la que el mismo Montmort envió a Johann Bernoulli, fechada el 15 de noviembre de 1710 (págs. 303-307) donde el remitente da la solución (no la resolución) del problema que planteó en la edición de 1708, añadiendo que *Os haría partícipe de mi método, si no creyese que es demasiado largo. Me vanaglorio que sería de vuestro gusto.* También interesa la carta de fecha 26 de febrero de 1711 que Nicolás Bernoulli remite a Montmort (páginas 308-314 de la 2ª edición) donde el remitente en primer lugar corrige la solución dada por Montmort en la carta anterior (bajo el supuesto de que sólo fueron errores de cálculo) y describe su método de resolución.

Nuestro objetivo en este apartado es describir el procedimiento de cálculo usado por Montmort en la resolución del problema que, como vemos en el enunciado que él mismo escribe, es simplificado con respecto al juego real:

PROBLEMA
PROPOSICIÓN V.

> *Pedro tiene un cierto número de cartas diferentes que no son puntos repetidos, que están mezcladas a discreción: apuesta contra Pablo que si las extrae seguidas, las nombra según el orden de las cartas, comenzando o por la más alta, o por la más baja, él conseguirá al menos una vez sacar aquella que nombra. Por ejemplo, Pedro teniendo en mano cuatro cartas, a saber un as, un dos, un tres y un cuatro mezcladas a discreción, apuesta que extrayéndolas seguidas, nombrando uno cuando saque la primera, dos cuando saque la segunda, tres cuando saque la tercera, le pasará que saca un as cuando diga uno, o saca un dos cuando diga dos, o saca un tres cuando diga tres, o saca un cuatro cuando diga cuatro. Sea imaginado del mismo modo para cualquier otro número de cartas. Se pregunta cuál es la suerte o la esperanza de Pedro para cualquier número de cartas que se pueda tener desde dos hasta trece.*

Observamos que Montmort reduce el problema al caso de un solo palo de la baraja (y no cuatro como inicialmente aparece) y plantea calcular la probabilidad que tiene el banquero de ganar en esa circunstancia. Generalizando esta propuesta podíamos enunciar así: Supongamos que el banquero tiene *n* cartas diferentes en orden aleatorio. ¿Cuál es la probabilidad de al menos una coincidencia cuando el banquero extrae las *n* cartas sucesivamente?

Hace una introducción didáctica a la resolución:

> *Sean las cartas con las que Pedro hace la partida, representadas por las letras a, b, c, d, etc. Si llamamos m al número de cartas que tiene, n el número que expresa todas las ordenaciones posibles de estas cartas, la fracción n/m expresará de cuántas maneras distintas cada letra ocupará cada uno de los lugares. Ahora bien, hay que notar que estas letras no se encontrarán siempre en su lugar útilmente para el banquero; por ejemplo, a, b, c, no da más que una oportunidad de ganar al que tiene la mano, aunque cada una de estas tres letras esté en su lugar; Y de igual forma b, a, c, d no da más que una oportunidad a Pedro para ganar, aunque cada una de las letras c y d esté en su lugar. La dificultad de este problema consiste en desenmarañar cuantas veces cada letra está en su lugar útil para Pedro, y cuantas veces está en lugar no útil.*

A continuación Montmort procede a dar la solución para $n = 2,...,5$, en cada caso siguiendo el mismo principio que, obviamente, es la base de su demostración. Para $n = 5$ su argumento es como sigue: El número de permutaciones de 5 cartas $5! = 120$. Entre estas hay 24 en las que el 1 está en primer lugar, 18 en las que el 2 está en segundo lugar sin que el 1 esté en el primero, 14 en las que el 3 está en tercer lugar sin el 1 en el primero ni el 2 en el segundo, 11 en las que el 4 está en cuarto lugar sin el 1 en el primero, el 2 en el segundo ni el 3 en el tercero, 9 en las que el 5 está en quinto lugar, sin estar las otras cuatro en sus lugares respectivos. La probabilidad de al menos una coincidencia es por tanto

$$\frac{24+18+14+11+9}{120}=\frac{76}{120}=\frac{19}{30}.$$

Entonces indica la solución general de dos formas: como una fórmula recurrente y como una solución explícita en la forma de una serie.

La secuencia de soluciones para $n=2,...,5$ le permite construir la fórmula recurrente que queda descrita como sigue, usando una formulación actual: Si P_n es la probabilidad de al menos una coincidencia cuando se tiene *n* cartas de un solo palo, entonces

$$P_n=\frac{(n-1)P_{n-1}+P_{n-2}}{n},\quad n\geq 2,\quad P_0=0,\ \text{y}\ P_1=1. \tag{1}$$

Montmort lo escribe de esta forma:

> *Si llamamos S a la suerte que se busca, el número de cartas que Pedro tiene se expresa por p; g la suerte de Pedro, siendo el número de cartas p – 1; d su suerte, el número de cartas que él tiene siendo p – 2, se tendrá* $S=\dfrac{g\times\overline{p-1}+d}{p}$ *. Esta fórmula dará todos los casos, y los vemos resueltos en la Tabla adjunta.*

La tabla que muestra da las soluciones desde $n=1$ hasta $n=13$. Para este último caso escribe $S=\frac{109339663}{172972800}A=\frac{1}{2}A+\frac{22853263}{172972800}A$. O sea, la probabilidad que tiene el banquero de ganar (de conseguir al menos una coincidencia) cuando se juega con una baraja de 13 cartas y un solo palo es $P_{13}=\frac{109.339.663}{172.972.800}=0'632120558$.

Al principio del texto de Montmort encontramos un “Tratado sobre las combinaciones” donde se describe el Triángulo Aritmético de Pascal. Pues bien, llegado este momento de exposición, el autor invoca ese tratado sobre las combinaciones indicando que, a partir de él, ha obtenido otra expresión que viene dada como un desarrollo en serie cuyos términos van alternando en signo y, cada uno de ellos se calcula como cociente entre el número combinatorio que aparece en la citada tabla y el producto descendente iniciado en el término que corresponda: Así, para el término *p* de la serie (en el caso de una baraja de *n* cartas y un solo palo), Montmort dice que se calcula mediante este cociente: $\dfrac{\binom{n}{p}}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)} = \dfrac{1}{p!}$. Por tanto, para el cálculo de la probabilidad del banquero de ganar proporciona la serie:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdots.$$

En general, podemos escribir $P_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, $n \geq 1$, o abreviadamente,

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{n!} \tag{2}$$

En ningún momento relaciona ambas soluciones: Seguramente se da cuenta, que de la primera formulación se deduce que $P_n - P_{n-1} = -\frac{P_{n-1} - P_{n-2}}{n}$ y de la segunda podemos escribir $P_n - P_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$. Si igualamos los segundos miembros de ambas igualdades obtenemos $P_{n-1} - P_{n-2} = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}$, lo que muestra que podemos pasar de una formulación a la otra fácilmente.

A continuación cita a Leibniz y a su trabajo publicado en las Actas de Leipzig de 1693 en el que resolvía el problema de "dado un logaritmo, encontrar el número que le corresponde" y donde da como solución "para x del caso en el que las ordenadas disminuyen" $= 1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} -$, o sea, el desarrollo de e^{-x} , que para el caso de $x = 1$ nos proporciona la serie $1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} -$, la cual aparece en el cálculo de la probabilidad de ganar que tiene el banquero. Montmort nos está queriendo decir, aunque así no lo manifiesta, que $\lim_{n\to\infty} P_n = 1 - e^{-1} = 0{,}632120558$, aunque nuestro autor en ningún momento da fracción decimal, ni habla de convergencia de la serie. Recordamos las dos fracciones citadas más arriba: $P_5 = \frac{19}{30} = 0{,}6333...$ y $P_{13} = 0{,}632120558$.

A continuación, Montmort se plantea lo siguiente:

> *Las dos fórmulas nos enseñan cuánto tiene de azar el que tiene las cartas para ganar para cualquier carta que sea; pero no nos hacen conocer cuánto*

hay de azar por cada carta que extrae desde la primera hasta la última. Se ve claro que este número de azares disminuye siempre, y que hay, por ejemplo, más azares para ganar para el as que para el dos, y para el tres que para el cuatro, & así. Pero no se saca fácilmente de lo que procede la ley de esta disminución, se la encontrará en esta Tabla.

Los 5 ejemplos previos que usó Montmort a título ilustrativo nos orienta sobre lo que está manifestando en el párrafo. Divide el conjunto de permutaciones con al menos una coincidencia en dos conjuntos disjuntos definidos por el lugar donde la primera coincidencia ocurre. En lenguaje actual, si $a_n(i)$ es el número de permutaciones de n elementos en las que la primera coincidencia se produce en el lugar i. Se verifica que $a_n(1)=(n-1)!$, ya que 1 tiene que estar en primer lugar y el resto de los $n-1$ números pueden ser permutados de todas las maneras posibles. Para $a_n(2)$, fijamos primero 2 en segundo lugar, y de las resultantes $(n-1)!$ permutaciones tenemos que deducir el número de permutaciones con el 1 en primer lugar, cuyo número es igual $(n-2)!$, por lo que

$$a_n(2)=(n-1)!-(n-2)!=a_n(1)-a_{n-1}(1).$$

En general, tenemos

$$a_n(i+1)=a_n(i)-a_{n-1}(i), \quad n\geq 2, \quad i=1,\ldots,n-1. \tag{3}$$

Montmort conocía esta fórmula recurrente como veremos más abajo en el texto explicativo que introduce, y la usó para calcular $a_n(i)$ para $i=2,\ldots,5$ en sus ejemplos iniciales. En la edición de 1713 (p. 137), la usa para calcular $a_n(i)$ hasta $n=8$.

Por otra parte, si a_n es el número de permutaciones con al menos una coincidencia, podemos escribir:

$$a_n=a_n(1)+a_n(2)+\ldots+a_n(n).$$

Tanto los $a_n(i)$ como los a_n son presentados por Montmort en una tabla parecida a la que aquí se muestra.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	a_n
1	1								**1**
2	1	0							**1**
3	2	1	1						**4**
4	6	4	3	2					**15**
5	24	18	14	11	9				**76**
6	120	96	78	64	53	44			**455**
7	720	600	504	426	362	309	265		**3186**
8	5040	4320	3720	3216	2790	2428	2119	1854	**25487**

Montmort explica lo siguiente:

> *Esta Tabla hace ver que con cinco cartas, por ejemplo, un as, un dos, un tres, un cuatro y un cinco, Pedro tiene veinticuatro maneras de ganar para el as; dieciocho de ganar para el dos no habiendo ganado para el as; catorce de ganar para el tres no habiendo ganado ni para el as ni para el dos; once de ganar para el cuatro, no habiendo ganado ni para el as, ni para el dos, ni para el tres; y por fin, que no tiene más que nueve maneras de ganar para el cinco, no habiendo ganado ni para el as, ni para el dos, ni para el tres, ni para el cuatro.*
>
> *Cada rango de esta Tabla se forma sobre el precedente de una manera muy fácil. Para hacerlo entender, supongamos aún que hay cinco cartas. Se ve en primer lugar que hay veinticuatro maneras de ganar para el as. Esto es evidente, puesto que al estar determinado que el as esté en primer lugar, las otras cuatro cartas pueden ser ordenadas de todas las maneras posibles; y en general está claro que si el número de cartas es p, el número de azares para ganar para el as está expresado por tantos productos de números naturales 1, 2, 3, 4, 5, & así, como unidades hay en* $p-1$. *Planteado esto,* $24-6=18$ *me da los azares para ganar para el dos,* $18-4=14$ *me da los azares para ganar para el tres,* $14-3=11$ *me da los azares para ganar para el cuatro; y por fin,* $11-2=9$ *me da los azares para ganar para el cinco.*

Y de esta forma nos muestra su conocimiento de la fórmula recurrente:

> *...y en general cada número de la Tabla es igual a la diferencia de aquél con él se encuentra a la derecha y que ya ha sido encontrado, con el que está inmediatamente encima.*

La fórmula recurrente (3) es demostrada usando el método de inclusión y exclusión. Para hacerlo indiquemos previamente que $a_n(i)$ se puede interpretar como el número de permutaciones con una coincidencia en el lugar *i*, y ninguna en los $i-1$ lugares anteriores. Si hacemos un desplazamiento de lugares hacia delante una unidad, o sea, si consideramos los lugares $2,\ldots,(i+1)$, $a_n(i)$ nos da el número de permutaciones con una coincidencia en el lugar $(i+1)$, ninguna en los lugares 2,…, *i*, y ninguna restricción en el lugar 1. Así, para calcular $a_n(i+1)$ hemos de quitar a las permutaciones anteriores aquellas que tienen una coincidencia en el lugar 1, o sea, hemos de restar aquellas permutaciones con un 1 en el lugar 1, ninguna coincidencia en los lugares 2,…, *i*, y una coincidencia en el lugar $(i+1)$. Dicho número de permutaciones es $a_{n-1}(i)$.

Está claro que $P_n = \dfrac{a_n}{n!}$, por lo que dicha probabilidad es calculable para cada *n* a partir de la columna del margen derecho de la tabla anterior. Además, para los valores de esa columna encuentra un “orden” que se visualiza a partir de la tabla que da:

$\overline{0\times 1}+1=1$

$\overline{1\times 2}-1=1$

$\overline{1\times 3}+1=4$

$\overline{4\times 4}-1=15$

$\overline{15\times 5}+1=76$

$\overline{76\times 6}-1=455$

$\overline{455\times 7}+1=3186$

$\overline{3186\times 8}-1=25487$

O sea, nuestro autor obtiene esta fórmula recurrente,

$$a_n = na_{n-1} + (-1)^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad a_0 = 0 .$$

Para seguir exponiendo resultados de Montmort introducimos una nueva forma de contar las permutaciones. Sea $b_n(i)$ el número de permutaciones de *n* elementos con exactamente i coincidencias. Lógicamente, $b_n(0)+b_n(1)+\ldots+b_n(n)=n!$ También, $a_n + b_0(n) = n!$ Entonces, la probabilidad de que se produzcan exactamente *i* coincidencias es $p_n(i)=\dfrac{b_n(i)}{n!}$. Y la probabilidad de que se produzcan al menos *i* coincidencias $P_n(i)=p_n(i)+p_n(i+1)+\ldots+p_n(n)$ y $P_n(0)=1$. Bajo esta nueva formulación, la probabilidad de que el banquero gane con un haz de n cartas de un solo palo, lo que antes llamábamos P_n, ahora sería $P_n(1)$.

En su segundo corolario de la página 138 (2ª edición del tratado), Montmort afirma que los valores de la diagonal de la tabla anterior, 0, 1, 9, 44, 165, o sea, los que corresponde con los $a_n(n)$, son los que proporcionan el número de permutaciones ("el número de azares" dice nuestro autor) en las que no se producen ninguna coincidencia para el *n* correspondiente a la fila inmediatamente anterior, o sea, $a_{n+1}(n+1)=b_n(0)=n!-a_n$.

En la página siguiente de su tratado, la 139, Montmort presenta, mediante una serie, la manera de calcular el número de permutaciones con *n* coincidencias, con $n-1$, con $n-2$, con $n-3,\ldots$ Establece que el número de permutaciones con exactamente *i* coincidencias verifica la siguiente igualdad, $b_n(i)=\binom{n}{i}b_{n-i}(0)$, ya que los lugares donde caerían las *i* coincidencias pueden ser elegidos de $\binom{n}{i}$ maneras distintas y, además, no pueden producirse coincidencias en el resto de los $n-i$ lugares. De la igualdad $b_n(0)=n!-a_n=n!-n!P_n=n!(1-P_n)$, y teniendo en cuenta que $P_n=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, nos queda $b_n(0)=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right)=$
$(-1)^n\left[1-n+n(n-1)-n(n-1)(n-2)+\ldots+(-1)^{n-2}n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\right]=$
$(-1)^n\left[1-n+n^{(2)}-n^{(3)}+\ldots+(-1)^{n-2}n^{(n-2)}\right]$. Por tanto, como $b_n(i)=\binom{n}{i}b_{n-i}(0)$, podemos escribir

$$b_n(i)=(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\left[1-(n-i)+(n-i)^{(2)}-(n-i)^{(3)}+\ldots+(-1)^{n-i-2}(n-i)^{(n-i-2)}\right].$$

Si nos atenemos a la forma de presentación que hace el autor, la serie que describe por sus sumandos, el número de permutaciones con *n* coincidencias, con $n-1$, con $n-2$, con $n-3,\ldots$ sería:

$$\sum_{i=0}^{n}b_n(i)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}\left[1-(n-i)+(n-i)^{(2)}-(n-i)^{(3)}+\ldots+(-1)^{n-i-2}(n-i)^{(n-i-2)}\right]$$

Así Montmort escribe que, para el caso de *p* cartas (lo que nosotros hemos llamado *n*) el número de azares de una coincidencia, de dos, de tres,… se encuentra en los correspondientes sumandos de la serie que sigue

$$1\times1+p\times0+\frac{p\cdot p-1}{1\cdot2}\times\overline{0+1}+\frac{p\cdot p-1\cdot p-2}{1\cdot2\cdot3}\times\overline{0-1+3}+\frac{p\cdot p-1\cdot p-2\cdot p-3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\times$$
$$\overline{0+1-4+4\cdot3}+\frac{p\cdot p-1\cdot p-2\cdot p-3\cdot p-4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\times\overline{0-1+5-5\cdot4+5\cdot4\cdot3}+$$
$$\frac{p\cdot p-1\cdot p-2\cdot p-3\cdot p-4\cdot p-5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\times\overline{0+1-6+6\cdot5-6\cdot5\cdot4+6\cdot5\cdot4\cdot3}+\ldots$$

A continuación, Montmort explica la serie y nos ofrece una distribución del número de coincidencias para el caso de trece cartas de un solo palo:

> *El primer término expresa cuántos azares hay para que cada carta se encuentre en su lugar. La suma de los dos primeros expresa cuántos azares hay para que se encuentren al menos* $p-1$ *en su orden; la suma de las tres primeras expresan cuántos azares hay para que se encuentren al menos* $p-2$ *en su orden.*
>
> *Aplicando esta fórmula al caso de trece cartas, encuentro que sobre las 6227020800* $(13!=6227020800)$ *maneras diferentes en las que trece cosas pueden ser ordenadas,*

hay para que todas se encuentren en sus lugares,		*1*
Para que haya doce,		*0*
Para que haya once,		*78*
Para que haya diez,		*572*
Para que haya nueve,	*precisamente;*	*6435*
Para que haya ocho,		*56628*
Para que haya siete,		*454740*
Para que haya seis,		*3181464*
Para que haya cinco,		*19090071*
Para que haya cuatro,	*precisamente,*	*95449640*
Para que haya tres		*381798846*
Para que haya dos,		*1145396460*
Para que haya uno,		*2290792933*
Para que haya uno al menos		***3936227868***

Con dicha tabla se puede calcular probabilidades del tipo $p_n(i)$ para el caso de $n=13$. Por ejemplo, $p_{13}(2)=\dfrac{1145396460}{13!}=0{,}1839$, que es la probabilidad de que se produzcan exactamente 2 coincidencias. Y también, $P_{13}(0)=P_{13}=\dfrac{3936227868}{13!}=0{,}63212055...$, o sea, la probabilidad de que se produzca al menos una coincidencia o probabilidad de que gane el banquero con una baraja de 13 cartas y un solo palo.

La aportación de Nicolás Bernoulli

El 17 de marzo de 1710, N. Bernoulli envía a Montmort la siguiente demostración de $P_n=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i-1}}{n!}$, o sea, de la probabilidad de que el banquero gane jugando con una baraja de *n* cartas de un solo palo. La presentamos con enfoque y notación actual.

En primer lugar establece que $a_n(1) = (n-1)!$ Y de manera sucesiva va construyendo las igualdades:

$a_n(2) = (n-1)! - (n-2)!$,

$a_n(3) = (n-1)! - 2(n-2)! + (n-3)!$,

$a_n(4) = (n-1)! - 3(n-2)! + 3(n-3)! - (n-4)!$ Y así generaliza:

$$a_n(i) = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i-1}{j} (n-1-j)!$$

Como $P_n = \frac{a_n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n} a_n(i)$, podemos escribir

$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j \binom{i-1}{j}(n-1-j)! = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \frac{(n-1-j)!}{n!}\sum_{i=j+1}^{n}\binom{i-1}{j} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \binom{n}{j+1}\frac{(n-1-j)!}{n!}$$

que, si se simplifica, nos lleva a $P_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{(j+1)!}$ que coincide con la fórmula (2) de Montmort.

Para obtener la fórmula (1) de Montmort, Bernoulli utiliza lo que hoy se conoce como Teorema de la Probabilidad Total, o sea, a partir de probabilidades condicionadas obtiene la probabilidad de conseguir al menos una coincidencia. Si *A* representa el suceso "conseguir al menos una coincidencia en *n* extracciones" y *B* que "la carta numerada con el 1 aparezca en primer lugar", podemos escribir $P(A) = P(A/B)\cdot P(B) + P(A/B^c)\cdot P(B^c)$.

Es obvio que, $P(A) = P_n$, $P(B) = \frac{1}{n}$, $P(B^c) = \frac{n-1}{n}$, $P(A/B) = 1$, y para el cálculo de $P(A/B^c)$, o sea, la probabilidad de conseguir al menos una coincidencia bajo la condición de que ésta no se produce en primer lugar la obtiene Bernoulli con una reflexión del estilo siguiente: las permutaciones que corresponden a este suceso son de la forma $(j, i_1, ..., i_{n-1})$ con $j \neq 1$, con al menos una coincidencia en los últimos $n-1$ lugares. Pues bien, entre las $(n-1)!$ permutaciones de las *i*-es habrá a_{n-1} permutaciones con al menos una coincidencia en $n-1$ lugares a las que hay que quitar el efecto de hacer la transferencia de *j* al lugar 1 que será el de cambiar permutaciones con una coincidencia en el lugar *j* por permutaciones sin coincidencia, siendo un total de $(n-2)! - a_{n-2}$. Por tanto, el número de permutaciones con al menos una coincidencia nos queda $a_{n-1} - (n-2)! + a_{n-2}$.

Entonces,

$$P(A/B^c) = \frac{a_{n-1} - (n-2)! + a_{n-2}}{(n-1)!} = \frac{(n-1)P_{n-1} - 1 + P_{n-2}}{n-1}.$$

Usando el Teorema de la Probabilidad Total,

$$P_n = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{(n-1)P_{n-1} - 1 + P_{n-2}}{n-1} = \frac{(n-1)P_{n-1} + P_{n-2}}{n},$$

el resultado (2) recurrente de Montmort.

Todo lo calculado hasta aquí se ha hecho bajo el supuesto de una baraja de un solo palo. Para el caso más general, extraer 13 cartas de una baraja de 4 palos y donde el banquero gana si consigue al menos una coincidencia, cuya probabilidad podemos presentar de la forma $P_{13,4}$ y, en general, $P_{n,s}$ (*n* extracciones de una baraja de *s* palos) sólo se presenta la solución y la fórmula que la genera, tras algunas rectificaciones entre ambos autores. En la carta de Bernoulli a Montmort del 26 de febrero de 1711 (pp. 308-314 de la 2ª ed.) el remitente da el resultado numérico. Dicho resultado contenía un error que Montmort corrigió en su respuesta del 10 de abril de 1711 (pp. 315-323 de la 2ª ed.). Después, Nicolás Bernoulli en su carta de 10 de noviembre de 1711 (pp. 323-337 de la 2ª ed.) escribe la fórmula correcta que permite conseguir el resultado exacto:

$$P_{n,s} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \frac{s^i}{ns(ns-1)...(ns-i+1)},$$

Lo que lleva al caso particular de la baraja de 52 cartas y 4 palos, ($n = 13$ y $s = 4$) al siguiente resultado: $P_{13,4} = 0{,}6430649493$.

Ninguno de los dos autores facilitan demostración, pero Bernoulli comenta que el método es el mismo que para P_n. Encontramos la primera demostración de la misma en un trabajo de Struyck publicado en 1716 y recogido en las Obras Completas cuya edición es de 1912.

Conclusiones

El problema de las coincidencias es original de Montmort, siendo planteado por primera vez en la edición de su libro de 1708. Dicho problema ha sido un tópico en la historia del cálculo de probabilidades dado que, muchos autores importantes han entrado en valoraciones y resoluciones olvidando en la mayoría de los casos la fuente original, o sea, olvidando a Montmort. Este autor tenía dos fórmulas para resolver: una de ellas recurrente y la otra mediante una suma finita que se podía generalizar a una serie. Nicolás Bernoulli aporta en la correspondencia posterior a la primera edición demostraciones rigurosas de ambas fórmulas. Ambos autores demuestran un alto conocimiento de la combinatoria y la idea de probabilidad en el sentido en que la entendemos hoy estaba muy cercana a la idea de ellos.

BIBLIOGRAFÍA

DE MOIVRE, A. (1718), *The Doctrine of Chances: or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*. London.

HALD, A. (1990), *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750,* John Wiley & Sons, New York.

MONTMORT, P. R. de (1708), *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Paris.

MONTMORT, P. R. DE (1713), "Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard", Seconde Edition, *Revûe et augmentée de plusieurs Lettre*, Quillau, París.

STRUYCK, N. (1912), *Les Oeuvres de Nicolas Struyc* (1687-1769), qui se rapporten au calcul des chances, à la statistique génèrale, à la statisque des décès et aux rentes viagères, tirées des Oeuvres Complètes. Traduites par J. A. Vollgraff. La Société Génerale Néerlandaise d'Assurances sur la Vie et de Rentes Viagères. Amsterdam.

TAKÁCS, L. (1980), "The Problem of Coincidences", *Archive for History of Exact Sciences,* Vol. 21, pp. 229-244.

TAKÁCS, L. (1967), "On the method of inclusion and exclusion", *Journal of the American Statistical Association*, **62,** pp. 102-113.

TODHUNTER, I. (1865), *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace,* Cambridge, [Reprinted by Chelsea, New York, 1949].