LA ESPERANZA Y EL MIEDO Y OTROS TÉRMINOS INTRODUCIDOS POR LEIBNIZ

Mary Sol de Mora Charles

Berlinés, 50, 1º. Barcelona 08022

Tfno. 628086004

demora@leibnizsociedad.org

Desde otoño de 1672 al 4 de octubre de 1676, Leibniz se encuentra en París y comienza su contacto con Huygens y otros autores como Roannez, que le introducen en algunos temas de matemáticas y que van a dar origen a resultados tan importantes como el cálculo infinitesimal. También ensaya Leibniz con los problemas fundamentales de la teoría de la probabilidad, aunque no conoce directamente la correspondencia de Pascal y Fermat sino solamente algunos problemas puntuales planteados por aquellos.

En los papeles que presentaremos cronológicamente, se enfrenta en primer lugar con el problema de los dados y también con el problema de los partis, aunque en este último caso sin éxito, y luego con problemas planteados por los juegos llamados de azar, pero lo que resulta interesante es el uso de los diferentes términos que introduce y que van estableciendo la forma definitiva de la teoría que a partir de Laplace y otros quedará fijada hasta nuestros días.

I. El primero de estos textos que podemos comentar es del 7-9 de enero de 1676, "*Le Chevalier de Méré fut le premier*…" donde atribuye a Méré la primacía del cálculo de los partis y sólo menciona de oídas a Pascal y Huygens que lo habrían retomado después. No conoce más que los problemas que le proponen pero no su solución. De hecho lucha con ello durante 7 folios pero no consigue resolverlo. Aparecen en su texto los términos facilidad, en el sentido filosófico de factible, apariencia, que viene a ser la posibilidad favorable o probabilidad de ganar y también propone las des-apariencias o dificultades, que dice serían proporcionales a los derechos que le quedan a mi adversario.

Considera diversos planteamientos del juego, por ejemplo si no todos los jugadores apuestan o ponen el mismo dinero, sino que "yo puedo no poner nada, y mi adversario puede contar el placer que tiene de jugar conmigo como alguna cosa". También trata de concebir el premio como un salario. Otras veces piensa en la posibilidad de recoger ganancias en cada tirada, antes de acabar la partida.

Aparece también la estimación de la probabilidad, pero da la impresión de que este término tiene para él todavía muchas connotaciones filosóficas y no técnicas. Un juego es favorable a uno de los jugadores: "un caso favorable a b es más posible que un caso favorable a a " Un jugador puede tener ventaja en alguna situación.

II. En el segundo texto que analizamos, de septiembre de 1678, vuelve sobre los partis y también sobre los juegos de azar y las cuestiones jurídicas.

"Un juego es justo si la razón entre la esperanza y el miedo es la misma en cada jugador" Y hace la siguiente aclaración: "Allí donde las apariencias son la misma, podemos formarnos juicios iguales sobre ellas, y por tanto la razón para opinar sobre el evento futuro es la misma; mas esta opinión sobre el evento futuro, o bien es la esperanza o bien es el miedo." Se trata del principio de razón insuficiente, que nos lleva a suponer que hay las mismas razones para una cosa o la contraria.

"La estimación de la esperanza es la parte de suerte que corresponde a cada jugador" La esperanza depende del miedo a perder, el cual es nulo cuando la contribución ha sido nula. Cuantos más jugadores hay que juegan por la misma suerte, menor es la esperanza de ganar, mas también es menor el miedo a perder, pues de otro modo el juego no sería justo.

Aparece también aquí una definición de probabilidad: "La probabilidad es el grado de posibilidad. La esperanza es la probabilidad de tener. El miedo es la probabilidad de perder. La estimación de algo es tanto como el derecho de cada cual a tenerlo." Y encontramos también una definición más clásica:

"La potestad de obtener un bien en un cierto evento es a la potestad de tener ese bien en cualquier evento como la posibilidad de un evento es a la posibilidad de todos los eventos. Sui los eventos son igual de fáciles, la potestad de obtener un bien en un evento es a la potestad de obtener ese bien en todo evento como la unidad es al número de eventos." Queda claro.

Y en consecuencia: "Si hay varios eventos igual de fáciles y alguno de esos eventos me proporciona un bien, y alguno de los restantes me priva de él, la estimación de mi esperanza será una porción de dicho bien, que será al bien total como el número de eventos favorables es al número total de eventos. Hay que señalar que al decir aquí que hay varios eventos igual de fáciles, entiendo que esa pluralidad de eventos son todos los eventos posibles. $S = R\frac{f}{n}$ "

Donde S es la esperanza, R es el bien o ganancia, f son los sucesos favorables y n son el número de sucesos igualmente posibles.

"Por ejemplo, sea a el número de eventos que hacen ganar A, b el número de eventos que hacen ganar B, c el número de eventos que hacen ganar C y n el número total de eventos. La esperanza será: s = $\frac{aA+bB+cC}{n}$.

Pero no es necesario que todos los eventos posibles proporcionen ganancia, así
$a+b+c \neq n$ y es como si a los eventos a los que no corresponde ganancia se les hubiera asignado el 0.

También aparece esporádicamente el término expectación, pero mi impresión es que es una manera del lenguaje "vulgar" para decir esperanza, que considera ahora más preciso.

III. El tercer texto, "Del juego del Quinquenove" es de octubre del mismo año, 1678, y utiliza los términos ya mencionados con soltura: grados de probabilidad, desventaja/ventaja, apariencia, poner, etc. La apariencia, especifica, y por lo tanto también la ventaja, se puede estimar e incluso se puede vender o comprar.

Ahora nos da la definición anterior de la potestad de obtener un bien como la conocemos mejor:

"La apariencia o probabilidad del efecto A, guarda la misma proporción con la apariencia o probabilidad del efecto B (en proporción) que el número de todas las maneras capaces de producir el efecto A guarda con el número de todas las maneras capaces de producir el efecto B, suponiendo todas esas manera igualmente factibles".

Pero esa apariencia o probabilidad de cada tirada introduce otros conceptos o incluso sentimientos:

"Cuando hay una tirada a hacer, la apariencia correspondiente está compuesta de esperanza, de temor y de indiferencia tomadas alternativamente, es decir que hay tiradas factibles que hacen ganar, hay otras que hacen perder y las hay que obligan a continuar el juego con la esperanza o temor o indiferencia de la tirada siguiente. Se ve así que la indiferencia de la tirada presente no es otra cosa que la esperanza, temor o indiferencia (tomadas alternativamente) de la tirada siguiente, es decir la indiferencia de la tirada presente es toda la apariencia (buena, mala o indiferente) de la tirada siguiente."

En el fondo, la indiferencia en el juego no existe, se reduce todo a temor (de perder) o esperanza (de ganar).

El talante de Leibniz se revela en su propuesta de rectificar las reglas de este juego para que se convierta en un juego justo, puesto que tal como está establecido, el primero que juega tiene ventaja:

"Quiero añadir todavía cómo se podrían rectificar estas reglas del juego de suerte que no hubiera más ventaja por una parte o por la otra. He aquí las reglas del Quinquenove reformado…" Introduce algunas variaciones y concluye:

"Así el temor y la esperanza serán siempre iguales, y jugando con frecuencia, al final se verá que no se ha ganado ni perdido considerablemente, siempre que no se arriesguen de una vez sumas excesivas, para que por lo menos se pueda continuar sin incomodarse, y a menos que se encuentren siempre personas que quieran arriesgar lo mismo, será difícil recuperarlas después de haberlas perdido. Pero si uno se mantiene en el punto medio, jugar un juego sin ventaja será una diversión verdaderamente inocente, puesto que no hará mal a nadie. Sin embargo reconozco que un juego, aunque tenga ventaja, es justo cuando la ventaja se puede tener por turnos, o cuando depende de uno servirse de ella y de la habilidad del otro, evitarla. Puesto que en efecto hay justicia en que las personas hábiles tengan alguna ventaja sobre las otras a menos que se quiera expresamente forzar que todas las condiciones sean iguales."

Por último, en este texto se utilizan los términos azar y suerte, que tienen tanto uso en nuestros días en el lenguaje popular:

"Las tiradas que ganan al comienzo se llaman azares. Los puntos que ganan en la continuación se llaman suertes."

IV. Otro de los textos de Leibniz en su época de interés por los juegos es el de La Bassette, un juego de cartas. Está fechado aproximadamente en 1679. Los términos apropiados para las cartas eran diferentes que los de los dados. Así, en este texto, originalmente en francés, encontramos:

Mise = puesta (apuesta); mettre = poner (apostar); lever = levantar una carta; decouvrir= descubrir, levantar la carta; rencontres = lances; tenir = mantenerse en juego; levée = baza; marques = marcas, (fichas); apostées = colocadas (apostadas); meler = mezclar (barajar); tirer = dar; pointeur = tanteador.

Aparece también el banquero y los demás, que apuestan contra él, son los tanteadores.

Se utilizan como equivalentes los términos verosímil, aparente y probable.

En los párrafos siguientes podemos constatar la inocencia de Leibniz como jugador:

"Sería bueno hacer una estimación exacta de las ventajas y desventajas, con el fin de determinar si el tanteador (puesto que puede elegir) hace bien en tomar los puntos que han salido más veces; [y en caso de que sea así] y lo grande que es la ventaja que puede obtener con el fin de ajustarse a ella en lo que quiere apostar."

Y la solución que propone es bastante ilegal en la actualidad:

"Pero para servirse de esta estimación, sería necesario tener conocimiento [saber, tener en mente] de los puntos que ya han salido, y cuántos. Si se pudiera retener eso en la memoria, sería mucho mejor; y creo que incluso se podría inventar expresamente una memoria artificial para ello. Pero a falta de la misma se podría marcar en un juego de cartas que se tendría en la mano. También se podría tener una pequeña máquina hecha expresamente donde se abatiría tocándolo el punto escogido. O también más sencillo, los cinco dedos de la mano izquierda podrían servir con unos guantes expresamente preparados."

También me parece bastante dudosa la siguiente observación:

"Medio de ganar a la Bassette. Hay que hacerse una memoria local, para retener la sucesión de las cartas, pues aunque se baraje la mayor parte de las cartas permanecerán juntas, es necesario poner sobre el punto cuando tenga que aparecer pronto, se verán resultados pues cuando todavía esté lejos pueden encontrarse grandes cambios entre dos. Cuando se ha perdido se puede doblar o incluso triplicar cada vez, siempre que no se pase de una suma demasiado grande. Así no se podría dejar de ganar."

V. En el siguiente texto, ya en fecha más avanzada, alrededor de 1686, Leibniz es ya un destacado matemático y emprende la solución de un problema de suma de series aparecido en 1685 en el Journal des Sçavans en forma de desafío lanzado por J. Bernoulli. La cuestión propuesta por éste es la siguiente:

"Dos jugadores A y B juegan con un solo dado a condición de que el que lance primero un cierto punto, ganará la partida. El orden en el que hacen las tiradas puede ser de una de estas dos maneras:

I. A B AA BB AAA BBB …

II. A BB AAA BBBB AAAAA …

Se trata de hallar la proporción de los azares de los dos jugadores."

Durante cinco años nadie responde a esta propuesta de Bernoulli y en 1682 decide dar la solución en mayo de 1690, ante lo cual Leibniz se anima también a publicar la suya, pero ya la había resuelto en 1686, aunque algunos problemas técnicos de la suma de series le habían desanimado de publicarla y sólo cuando ve que su solución es la misma de Bernoulli, la da a conocer. En la Acta Eruditorum de julio 1690. Ambos autores se han basado en el texto de Huygens De ratiociniis in Ludo Aleae, publicado en 1657 y cuyo comentario constituye la primera parte del Ars conjectandi de Bernoulli.

La base de este problema es la Proposición X de Huygens: "Hallar en cuantas tiradas se puede aceptar sacar un seis con un dado" Huygens calcula hasta tres tiradas y dice "se puede continuar este cálculo sucesivamente para cada número de tiradas."

Bernoulli da la solución del problema I como una consecuencia de las series infinitas, y en el <u>Ars conjectandi</u> da la solución del II por dos métodos en el segundo de los cuales

Supone un número indefinido de jugadores. Esta es también la idea de Leibniz, aunque por un método distinto. Sus razonamientos parten del caso más simple, como hacía Huygens en su texto; la <u>apariencia o esperanza</u> de sacar el punto exigido (con un dado y a la primera tirada) es 1/6 de la <u>seguridad</u> o del <u>caso seguro,</u> de probabilidad 1. Esto nos deja 5/6 como <u>probabilidad</u> de sacar el punto fijado en las tiradas siguientes, pues supone que <u>no es un suceso imposible</u> y que, <u>jugando indefinidamente</u>, se llegará a obtener el punto exigido. Luego para la segunda tirada tenemos 1/6 de 5/6, es decir, 5/36, que es la esperanza de ganar en la segunda tirada. Para ganar en la primera o bien en la segunda tirada será la esperanza 1/6+ 5/36 = 11/36, lo que deja 25/36 para la otra tirada, y que Leibniz llama <u>esperanza residual</u> y así sucesivamente. El resultado es el mismo que el de Huygens.

La suma de todas esas esperanzas debe ser 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{6^{n}} = 1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{5^2}{6^3} + \frac{5^3}{6^4} + \ldots$$

Pero el problema es que esta serie es una progresión infinita, y tendríamos que hallar las sumas parciales para conocer las probabilidades de cada jugador. Leibniz propone dos métodos, uno sería tomar suficientes términos para poder despreciar el resto respecto a la suma total. El segundo sería encontrar un teorema que sirviera para calcular la suma, el método más general y el que Leibniz siempre prefiere, pero en este caso no puede sumar la serie.

En cuanto a la proporción de las suertes o de los partis obtiene los mismos resultados que Bernoulli y que Huygens. Pero no los publica ni los comunica al no poder presentar el resultado generalizado. Más tarde, al ver que tampoco Bernoulli lo ha logrado, se decide a publicar su solución.

Otros términos que emplea aquí Leibniz son <u>suerte entera</u> o <u>seguridad</u> para el suceso de probabilidad 1, <u>suerte</u> en lugar de azar o *chance*, <u>*rencontré*</u> en lugar del resultado de una tirada, <u>*amener*</u> seis puntos en lugar de *faire* un seis como decían Pascal y Fermat. En el texto latino utiliza la palabra <u>*jus*</u> que aplica tanto a la teoría de la probabilidad como a los textos de su jurisprudencia natural.

VI. En 1690, junto con la publicación de su solución, Leibniz escribe también una carta abierta a J. Bernoulli:

"Este hombre eminente ha publicado dos artículos, uno de ellos como solución a un problema que él mismo propuso, el otro con ocasión de un problema mío. En el *Journal des Sçavans* responde, según veo, al propuesto por él. En cuanto a mi problema, cuya solución dio el celebérrimo Huygens a la síntesis que yo publiqué, él lo analiza según las leyes del nuevo cálculo propuestas por mí en estas Actas, que yo llamo cálculo diferencial o incremental. Y realizar el análisis de ese problema no estaba al alcance de cualquiera, porque pocos conocen todavía el artificio de un cálculo tal. Y no conozco a nadie que haya sabido penetrar mi mente mejor que este hombre eminente. Incluso me ha propuesto otro problema para que lo resuelva, del cual enseguida hablaré, pero antes quiero corresponderle explicando el fundamento de la solución que él mismo dio al problema que propuso en dicho *Journal*.

Era como sigue: dos jugadores juegan con un dado, con la condición de que el primero que saque el número de puntos que primero acordaron, ganará. A hace primero una tirada, y B una tirada, luego A dos tiradas, a continuación B dos tiradas, después A tres y B tres etc. O bien: A hace una tirada, luego B dos, luego A tres, luego B cuatro, etc. hasta que uno de los dos gane. Se pregunta la razón de las suertes. Yo muestro así la cosa.

Sea $5:6 = n$ *entonces* $1:6 = 1-n$.

En el primer caso:

$1 \quad n \quad n^2 \quad n^3 \quad n^4 \quad n^5 \quad n^6 \quad n^7 \quad n^8 \quad n^9 \quad n^{10} \quad n^{11} \quad etc.$

$A \quad B \quad A \quad A \quad B \quad B \quad A \quad A \quad A \quad B \quad B \quad B \quad etc.$

La suerte de A,

$1 + n^2 + n^3 + n^6 + n^7 + n^8 + n^{12} + n^{13} + n^{14} + n^{15}$ *etc.* multiplicado por $\overline{1-n}$.

Después de haber hecho la multiplicación tendremos

$1 - n^1 + n^2 + n^4 + n^6 - n^9 + n^{12} + n^{16}$ *etc.*

Y la suerte de B,

$n + n^4 + n^5 + n^9 + n^{10} + n^{11} + n^{16} + n^{17} + n^{18} + n^{19}$ *etc.* multiplicado por $\overline{1-n}$.

Después de haber hecho la multiplicación, tendremos

$n^1 - n^2 + n^4 - n^6 + n^9 - n^{12} + n^{16}$ *etc.*

En el segundo caso*:*

$1 \quad n \quad n^2 \quad n^3 \quad n^4 \quad n^5 \quad n^6 \quad n^7 \quad n^8 \quad n^9 \quad n^{10} \quad etc.$

$A \quad B \quad B \quad A \quad A \quad A \quad B \quad B \quad B \quad B \quad A \quad etc.$

La suerte de A,

$1 + n^3 + n^4 + n^5 + n^{10} + n^{11} + n^{12} + n^{13} + n^{14} \quad etc.$ multiplicado por $\overline{1-n}$.

Y hecha la multiplicación,

$1 - n^1 + n^3 + n^6 + n^{10} - n^{15} \quad etc.$

La suerte de B,

$n + n^2 + n^6 + n^7 + n^8 + n^9 + n^{15} + n^{17} + n^{18} + n^{19} + n^{20}$ *etc.* multiplicado por $\overline{1-n}$.[1]

Y hecha la multiplicación,

$n^1 - n^3 + n^6 - n^{10} + n^{15} - n^{21} \quad etc.$

Y en todos los casos $A + B = 1$, donde la unidad es todo el derecho al premio del juego. El mismo método tiene validez en otros casos parecidos en los que hubiera más jugadores o dados, y tenemos fácilmente una solución en números tan exactos como queramos. El problema es placentero, pues aunque parece simple, conduce a series que no se han examinado hasta ahora."

VII. En 1696 tenemos dos cartas a Filleau des Billettes donde solicita que le recuerde el nombre de Méré, que ha olvidado y la historia de la estimación de los partis:

El 30 de julio:

"Recuerdo que el señor duque de Roannez me hizo el honor de contarme la historia de la investigación sobre la estimación de los *partis* y de las ventajas en el juego, que dio ocasión a los señores Pascal, Huygens y otros de examinar este tema; me parece que fue un cierto caballero jugador[2], pero de una penetración extraordinaria, el que se dio cuenta el primero e incluso concibió alguna idea sobre el asunto y que los sabios se dedicaron a estudiarla. También me consta que el señor Roberval no había comprendido nada del asunto y no había considerado

---

[1] Falta n^{16}. N. del ed.

[2] El caballero A.G. de Méré. N del ed.

que la materia fuera susceptible de demostraciones. En lo cual sin duda estaba equivocado. Desearía oír de nuevo los detalles del origen de esta investigación."

Y el 4/14 de diciembre:

. "Os agradezco mucho lo que me decís del señor Dalesme, autor de los tubos de viento para transportar las fuerzas a una gran distancia, y también de la historia de la estimación de los partis[3] en el juego, en la que habéis olvidado decirme el nombre de ese gentilhombre poitevino, gran jugador, que tuvo la idea de este pensamiento matemático[4]. En efecto la mayor parte de los juegos podrían dar ocasión a pensamientos consistentes, y desearía las opiniones de ese poitevino para otros jugadores. Un pequeño discurso del señor Huygens, *De Ludo Aleae* (aparentemente el mismo que él os había dado) se encuentra impreso en las *Exercitations* de Franciscus Shootenius; es una obra separada de su Comentario sobre la Geometría de Des Cartes."

VIII. En 1702 encontramos un escrito de Leibniz donde recoge estas informaciones:

"He estado a punto de reír con los aires que se da el señor Caballero de Méré en su carta a Pascal que Bayle recoge en el mismo artículo. Pero veo que el Caballero sabía que ese gran genio tenía sus altibajos que le hacían a veces demasiado susceptible a las impresiones de los espiritualistas extremados y que incluso a veces le causaban aversión a los conocimientos sólidos: lo hemos visto suceder después, pero sin remisión, a los señores Stenonis y Swammerdam, por no haber unido la verdadera metafísica con la física y las matemáticas. El señor de Méré lo aprovechó para hablarle a Pascal con tono de superioridad. Parece que se burla un poco, como hacen las personas de mundo que tienen mucho ingenio y un saber mediocre. Querrían persuadirnos de que eso que ellos no entienden bien es poca cosa; habría que haberlo enviado a la escuela con el señor Roberval. Sin embargo es verdad que el Caballero tenía cierto genio extraordinario, incluso para las matemáticas. He sabido por el señor Des Billettes, amigo de Pascal y excelente en mecánica, cuál es ese descubrimiento del que ese Caballero presume en su carta. Es que, siendo un gran jugador, proporcionó las primeras ideas acerca de la estimación de las apuestas, lo que dio nacimiento a las interesantes ideas *de Alea* de los señores Fermat, Pascal y Huygens, de las que el señor Roberval no podía o no quería comprender nada. El señor Pensionado de Wit ha ido más lejos aún y lo aplica a otros usos más considerables en relación con las rentas vitalicias; y el señor Huygens me ha dicho que el señor Hudde también tiene excelentes meditaciones sobre el tema y que es una lástima que las haya suprimido con

[3] Lotes, reparto de las apuestas en un juego que se termina antes del término pactado. N. del ed.

[4] Se trata del Caballero de Méré. N. del ed.

tantas otras. Así los juegos mismos merecerían ser examinados, y si algún matemático penetrante meditase sobre ellos encontraría muchas consideraciones importantes, pues los hombres nunca han mostrado más ingenio que cuando juegan."

IX. Por último veamos un texto del 22 de marzo de 1714, la carta a Bourguet, desde Hannover. Aquí sigue el rastro de Méré, y utiliza términos que ya conocemos, aunque introduce las verosimilitudes a posteriori y las razones a priori:

" El arte de conjeturar está basado sobre lo que es más o menos fácil, o bien más o menos factible, pues el término latino *facilis* derivado *a faciendo* quiere decir literalmente factible; por ejemplo, con dos dados, es igual de factible sacar doce puntos, que sacar once, pues lo uno y lo otro no se puede hacer más que de una sola manera[5]; pero es tres veces más factible sacar siete, porque ello se puede hacer sacando 6 y 4, 5 y 2, y 4 y 3;[6] y aquí una combinación es tan factible como la otra. El Caballero de Méré (autor del libro de los Agréments) fue el primero que dio ocasión a estas meditaciones, que los señores Pascal y Huygens continuaron. El señor Pensionado de Witt y el señor Hudde también han trabajado en esto después. El difunto señor Bernoulli cultivó esta materia por mis exhortaciones. Se estiman también las verosimilitudes *a posteriori*, por la experiencia y se debe recurrir a ellas a falta de razones *a priori;* por ejemplo, es igualmente verosímil que el niño que va a nacer sea varón o hembra, porque el número de varones y hembras resulta ser aproximadamente igual en este mundo. Se puede decir que lo que se hace más o menos es también lo más o menos factible en el estado actual de las cosas, poniendo juntas todas las consideraciones que deben concurrir a la producción de un hecho."

Con esta muestra de textos de Leibniz podemos hacernos una idea de las aportaciones que realizó desde su terreno y del tiempo que dedicó al tema, aunque, según su costumbre, lo combinara con otros muchos estudios simultáneos que a veces le llevaban a olvidarse del nombre de Méré, aunque no de su colaboración, más o menos efectiva a la teoría de la probabilidad.

---

[5] Leibniz considera como casos posibles las combinaciones, no las variaciones. 11 se puede hacer de dos maneras: 6 y 5 o 5 y 6, y doce sólo de una, 6 y 6. N. del ed.

[6] Aquí serían seis las posibilidades. N. del Ed.

REFERENCIAS

Escritos de Leibniz:

- Manuscrito: “De Numero jactuum in tesseris proposuit mihi dux Roannetius"

Fecha: enero 1676.

Manuscrito: LHXXXV, III, math.III B, 14, fol. 1r, 1v, 2r, 2v, cupones 3 y 4.

-“Le Chevalier de Meslé fut…"

Fecha: 7 enero 1676.

Manuscrito: LHXXXV, III, math.III B ,14, fol. 5r,v, 6r,v, 7r,v, 8r,v.

Edición utilizada: es inédito.

-“De incerti aestimatione"

Fecha: Septiembre 1678.

Manuscrito: LHXXXV, III, A,12.

Edición utilizada: A.A. VI, 4, p.91.

- "Du jeu du Quinquenove"

Fecha: Octubre 1678.

Manuscrito: LH XXXV, A, 8, f. 14-19.

Edición utilizada: Transcripción M.S. de Mora, Historia Mathematica, 19, (1992) 125-157.

-“J’ay vu dernièrement dans le Journal des Sçavans…”"

Fecha: 1686 (?)

Manuscrito: LH XXXV, 13, 3, Bl.31-32 y dos cupones.

Edición utilizada: Transcripción M.S. de Mora, Historia Mathematica, 13, 1986, 361-368.

- "G.G.L. ad ea quae vir clarissimus J.B »

Fecha: Julio 1690.

Manuscrito: no consta.

Edición utilizada: Acta Eruditorum, 358-360.

- “Lettre de Leibniz à Filleau des Billettes »

Fecha: Hannover 30 juillet 1696.

Manuscrito: Hannover, Leibnizbriefe, n° 70, folio 18.

Edición utilizada: AA, I, 12, 749-51.

- carta “Leibniz a Gilles Filleau des Billettes”

Fecha: 4/14 Diciembre 1696.

Manuscrito: no consta.

Edición utilizada: GP, VII, 451-4, 1965.

- “Réponse aux réflexions contenues…”

Fecha: 1702

Manuscrito: no consta.

Edición utilizada: GP, IV, p. 554-571.

- “Leibniz an Bourguet”

Fecha: 22 de marzo de 1714.

Manuscrito: LBr 103 Bl. 36-37 y Rouen Bibl. municip. O 39 Bl. 186-193 y Leiden UB Hschr. 293 B Bl. 253-258.

Edición utilizada: GP, III, 564-570, X.

- De Mora, M.S.: "Leibniz et le problème des partis", Historia Mathematica, 13, (1986), Academic Press Inc., San Diego, Cal., 11-18.

- _____: "La Bassette et l'Hombre, deux jeux de cartes étudiés par Leibniz dans de manuscrits inédits", Studia Leibnitiana, XXIII/2, 1991, 207-220.

- _____: "Quelques jeux de hazard selon Leibniz (Manuscrits inédits)", Historia Mathematica, 19, 2, 1992, 125-158.