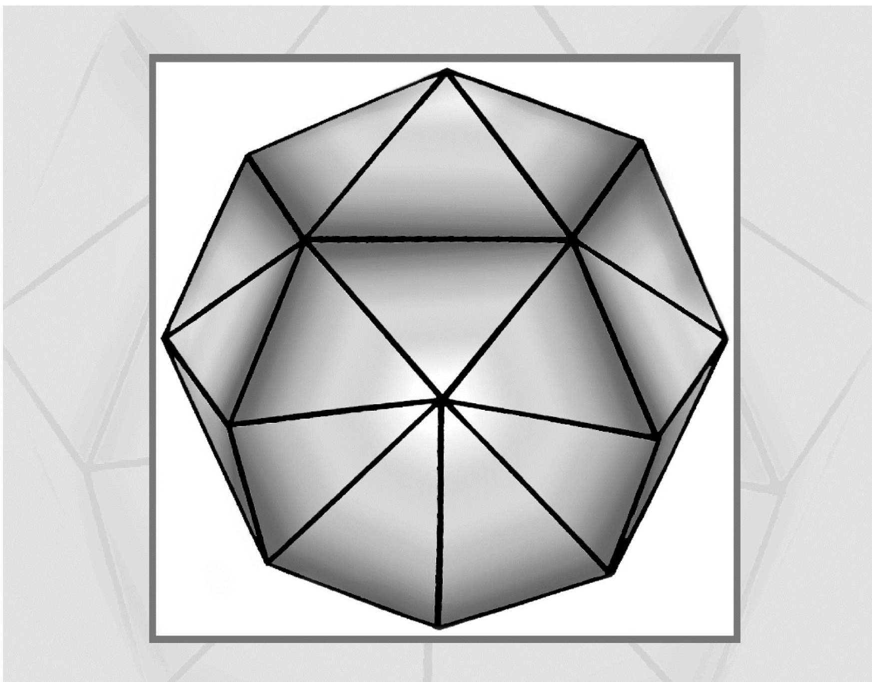
HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (II)

HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA (II)



A.H.E.P.E.

COORDINACIÓN
Jesús Santos del Cerro
Universidad de Castilla-La Mancha

Marta García Secades
Universidad San Pablo CEU

DELTA
PUBLICACIONES

DELTA PUBLICACIONES

HISTORIA DE LA PROBABILIDAD
Y LA ESTADÍSTICA (II)

por A.H.E.P.E.

Editora gerente	M.ª Pilar Galán Romero
Director artístico	Luis Egüen
Diseño de cubierta	Luis Egüen
Preimpresión	MECASERVI C/ Serrano, 41 6.ª Of. 6. 28001 Madrid (España) MIZAR PUBLICIDAD, S.C. C/ Juan José Lorente, 27-29-31, Pral. Of. E 50005 Zaragoza (España)
Impresión	Grefol, S.A. Pol. Ind. La Fuensanta. Móstoles. Madrid (España)
Copyright © 2004	Delta, Publicaciones Universitarias. Primera edición C/ Luarca, 11 - 28230 Las Rozas - Madrid (España) Tel./Fax 91 637 16 88 www.deltapublicaciones.com
© 2004	A.H.E.P.E.

ISBN: 94-933631-2-X
Depósito Legal: M-4.542-2004

(0504-60)

Prólogo

En este volumen se recopilan todas las ponencias presentadas en el II Congreso Internacional de Historia de la Estadística y de la Probabilidad, que fueron organizadas por la Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España (AHEPE), junto con la Universidad de Castilla-La Mancha, la Universidad San Pablo-CEU, y la Universidad Rey Juan Carlos, y que se celebraron los días 3 y 4 de Julio de 2003, en la Escuela de Traductores de Toledo, antiguo palacio toledano del siglo XIV del rey Don Pedro, que hoy constituye un moderno foro que persigue recuperar las actividades de su homónima medieval, que no fue un centro educativo sino más bien un colectivo de personas cuyo común denominador fue la transmisión del saber científico.

Este volumen recoge aportaciones sobre la Historia de la Probabilidad desde sus inicios: estudios sobre Laplace, Nicole, Huygens, Cournot, Pareto, etcétera, unos trabajos que dotan de cuerpo a la Historia de la Probabilidad en España: López de Aguilar, Martínez Alcíbar, Ollero, etcétera, y otros relativos a la génesis de la Estadística Oficial, y a la organización de la enseñanza en España, y otros que muestran la importancia de la Estadística en sus relaciones con la Economía, la Medicina, la Ciencia Actuarial, la Psicología, la Econometría, etcétera.

Esperamos que el contenido de este volumen sirva de complemento al primero editado por la Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España (AHEPE) [AHEPE (2002): *Historia de la Probabilidad y la Estadística.*

AC. Madrid. ISBN 84-7288-300-0] y que sea de utilidad para los estudiosos de la Historia de la Ciencia y de la Estadística, en particular.

Agradecemos a los patrocinadores del evento Caja de Castilla-La Mancha (CCM), la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha (JCCM) y a la Universidad San Pablo-CEU (Foro Económico-Empresarial) la ayuda financiera prestada pues, sin ellos, hubiera sido muy difícil organizar el Congreso. Agradecimiento que hacemos extensivo al Instituto Nacional de Estadística (INE) y a la Librería Ecobook, por su colaboración.

Madrid, noviembre de 2003

Dr. Fco. Javier Martín-Pliego
Presidente de AHEPE.
Presidente del Comité Organizador del Congreso

Apertura del Congreso: 3 de julio de 2003, Toledo. Escuela de Traductores.

Comité Organizador (de derecha a izquierda): Presidente Dr. Fco. Javier Martín-Pliego y Secretarios Dra. Dª Marta García Secades y Dr. D. Jesús Santos del Cerro.

Contenido

CAPÍTULO 1

Le problème des partis au XV^e siècle, avant Pacioli

NORBERT MEUSNIER
Université de Paris VIII

Je présente ici un renouvellement de notre compréhension de la problématique du problème des partis éclairée par la relecture récente de deux manuscrits d'arithmétiques commerciales du XV^e siècle, écrites en Italien et traitant de ce problème. Les solutions qui y sont proposées et plus largement les traces archéologiques que nous procurent ces documents permettent d'affiner la perspective de l'émergence d'une mathématisation du hasard et des prises de décision entre le XIV^e et le XVIII^e siècle.

Le problème des partis

Le problème des partis[1] est ce problème discuté entre Pascal et Fermat dans leur correspondance de l'été 1654 que l'histoire des sciences «ordinaire» retient comme l'événement symbolique de la naissance du Calcul des probabilités.

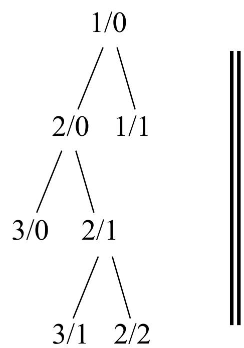
---

[1] «Points problem» en anglais et «Problema de los puntos» en espagnol; le lecteur va comprendre par la suite pourquoi la dénomination «Problème des partis' est beaucoup plus judicieuse».

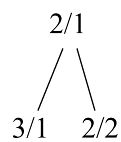
La problématique technique

Dans sa lettre à Fermat du 29 juillet 1654[2] Pascal présente le problème ainsi: deux joueurs misent chacun la même somme d'argent pour avoir le droit de jouer à un jeu de pur hasard qui se déroule en trois manches gagnantes[3] (ou plus) mais le jeu est interrompu avant que l'un des deux ait gagné trois manches. Les deux joueurs sont alors d'accord pour partager la mise. Le problème consiste alors à savoir quel est le partage[4] juste ou équitable et en cela quelle est la bonne décision à prendre. Il relève donc bien plus d'une problématique décisionnelle que probabiliste.

Supposons que la question se pose lorsque les joueurs sont à 1/0. La solution de Pascal consiste à envisager ce qui aurait pu arriver, si le jeu n a'rait pas été interrompu, ce que je[5] représente par le schéma suivant:



Considérons alors la situation 2/1, qui est la plus proche de la fin du jeu[6] sans qu'on puisse donner une réponse immédiate à la question du partage:



Le premier joueur, celui qui a déjà gagné deux manches, peut aussi bien gagner toute la mise (s'il gagne la partie suivante et se retrouve à 3/1) ou, équitablement, reprendre la moitié de la mise (s'il perd la partie suivante). Si chaque joueur a misé

[2] Pour la correspondance entre Pascal et Fermat voir [Pas70] ou [Pas98].

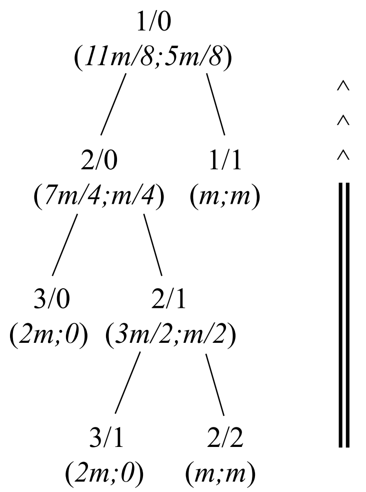
[3] Ce sont les conditions, par exemple, des matchs des tournois de tennis du «Grand chelem» (en ce qui concerne les «manches») et de ceux de la Coupe Davis (en ce qui concerne les manches de chaque match et aussi les matchs de chaque rencontre entre deux nations).

[4] C'est pourquoi on parle du problème des partis et non pas du problème des parties.

[5] Les graphes «en arbres» que j'utilise ne se trouvent pas chez Pascal qui s'exprime sous forme rhétorique.

[6] «2/2» est une situation plus proche de la fin mais le partage ne pose, alors, aucun problème.

m, ce joueur peut donc considérer qu'il est certain d'avoir *m* (au minimum); quant à l'autre partie de la mise, pouvant l'avoir comme ne pas l'avoir, elle «vaut» *m*/2. Ainsi les deux joueurs peuvent-ils se mettre d'accord à 2/1 pour que le premier prenne *3m/2* et le deuxième *m/2*. On peut ainsi remonter de situation en situation jusqu'à 1/0 (et même 0/0); on obtient alors des partages que je représente par le schéma suivant, en remontant à l'intérieur du premier schéma au lieu de descendre:



Plus généralement, pouvoir obtenir aussi bien *a* que *b*, avec $a>b$, est une situation qui vaut $b + (a\text{-}b)/2$, c'est-à-dire $(a+b)/2$[7].

Pascal répond aussi à une autre question, ce que lui permettent ces résultats. Cette question est celle de la valeur de chaque partie gagnée, que l'on obtient par la différence entre les valeurs des différentes situations. Ainsi, la valeur de la première partie est-elle *3m/8*[8], celle de la deuxième également *3m/8*, et celle de la troisième *m/4*, si l'on considère une suite de trois parties gagnantes.

Nous pouvons ainsi retrouver le tableau que Pascal transmet à Fermat le 29 juillet 1654[9]:

[7] C'est la «valeur de l'espérance» dans la situation donnée, notion que Huygens théorise en 1657 dans son *De ratiociniis in ludo aleae*, voir à ce sujet [Meu96].

[8] C'est la différence entre la valeur de la situation 1/0 (11*m*/8) et la mise initiale (*m*).

[9] Voir [Pas70] p. 1145 ou [Pas98] p. 154; dans son tableau Pascal prend *m*=256, afin de n'avoir que des valeurs entiéres.

valeur en		6	5	4	3	2	1	parties
de la	1º	*63m/256*	*35m/128*	*5m/16*	*3m/8*	*m/2*	*m*	
	2º	*63m/256*	*35m/128*	*5m/16*	*3m/8*	*m/2*		
	3º	*28m/128*	*15m/64*	*m/4*	*m/4*			
	4º	*21m/128*	*5m/32*	*m/8*				
	5º	*3m/32*	*m/16*					
	6º	*m/32*						

C'est ce tableau dont Pascal va étudier les régularités et, ce faisant, y voir une jonction possible avec le triangle arithmétique. Mais ceci n'est pas notre sujet et je n'ai rappelé ces résultats que pour souligner l'importance heuristique, dans les recherches de Pascal, de cette question de la «valeur des parties» que nous allons retrouver chez l'un des auteurs que nous allons étudier.

Un document contemporain de Pacioli

Antérieurement à la correspondance entre Pascal et Fermat de l'été 1654 nous connaissions, avant 1985, des traces du problème des partis et de diverses solutions plus ou moins insatisfaisantes chez plusieurs auteurs italiens, entre Pacioli en 1494 et Forestani en 1603, comme Calandri (un contemporain de Pacioli), Cardano en 1539, Tartaglia en 1556, Peverone en 1558, Pagani en 1591, et chez le français Gosselin en 1578[10].

J'analyse ici deux nouvelles traces qui sont apparues ces dernières années, toutes les deux d'auteurs anonymes, et datant, probablement, du début du XVe siècle pour le premier et de la première moitié de ce même siècle pour le second.

Mais avant cela considérons la solution donnée par Calandri[11] qui nous permettra d'apprécier encore mieux l'originalité des textes des deux autres auteurs.

Calandri

Filippo Calandri est né vers 1467 dans une famille de maîtres d'abaque (son grand-père, son père, son frère aîné) de Sienne. Il est l'auteur d'une des premières arithmétiques imprimées, en 1491; elle est dédiée à Julien de Médicis le fils de Laurent le Magnifique. Ce manuscrit de la bibliothèque de Sienne[12] est donc contemporain de celui de Pacioli et date de la fin du XVe siècle ou du début du XVIe siècle.

---

10 Voir [Cou65].

11 Je propose ici cette étude des «solutions» de Calandri car elles sont beaucoup moins connues que celles de Pacioli.

12 Codice L. VI. 45 de la Biblioteca Comunale de Sienne.

Une traduction en français du texte de Calandri[13]

<81 r> (12) *Deux [personnes] jouent à la longue paume*[14] *de telle sorte que le premier qui a six chasses*[15] *gagne le jeu. Il arrive alors par hasard*[16] *quand l'un d'eux en a gagné 4 et l'autre 3 que la balle éclate de telle sorte qu 'ils ne peuvent finir le jeu mais tombent d'accord pour que chacun ait ce qui lui convient. On veut savoir combien il reviendra à chacun, chacun ayant misé 3 £*[17]*: il y a 2 façons pour cette raison, l'une est de faire la raison sur ce qui est fait et l'autre sur ce qui est à faire. La première façon: on prend autant que ce qu'on voit de chasses en raison de ce qu'ils peuvent faire à eux deux. <81 v> La seconde: on prend dans les chasses qui sont à faire autant de chasses à voir que chacun d'eux a à en faire pour avoir le jeu. D'où que si le premier a 4 chasses il lui reste à faire deux chasses pour faire le jeu; le second qui a 3 chasses il lui reste trois chasses à faire et donc le second a à durer une fois et demi la difficulté*[18] *du premier et c'est pourquoi le premier aura à retirer une fois et demi autant que le second: que chaque fois que premier retire 3 le second retire 2. Maintenant [comme] on a à partager 120 sous entre les deux, [que] le premier a à retirer 3 [et] le second 2, je veux savoir ce que touchera chacun. Et le faisant tu trouveras que le premier aura 72 sous et le second 48 sous; mais parce que c'est un jeu de hasard*[19] *on ne se porte pas garant que ce soit la vérité précise.*

<97 v> (43) *Trois [personnes] jouent à l'arbalète 3 D*[20] *de telle façon que celui qui le premier a 3 coups*[21] *gagne et obtient 3 D. Et tirant à l'arbalète le premier en a fait 2, le deuxième un, le troisième n'a aucun coup.*

Il arrive par hasard[22] *qu'une arbalète se casse et ils sont d'accord que chacun prend ce qui lui convient. Je veux savoir combien chacun touchera: je dis ainsi, que c'est bien du hasard*[23] *et ça se prend de 2 façons. L 'une est de prendre ce qu'ils ont fait et l'autre est* <98 r> *de prendre ce qu'ils ont à faire et celle qui est la meilleure ce n 'est pas déterminé et c'est pourquoi celle des deux que l'on prend n'importe pas. Donc nous prendrons celle qui [prend] ce qui reste à faire et nous dirons*

---

[13] Je propose cette traduction à partir de la transcription qui en est donnée dans [Cal82] pp. 13-14 et 39-40.

[14] Un jeu de balle, ancêtre du tennis.

[15] Les «chasses» sont les différentes parties ou manches d'un jeu.

[16] «Per chaso».

[17] Trois «lires», je suppose; une lire valant 20 sous.

[18] «Fatica».

[19] «Giuco di fortuna».

[20] «D» pour Dinar, probablement.

[21] Un «coup» c'est-à-dire un coup au but, dans la cible.

[22] «Per chaso».

[23] «Chaso».

ainsi: combien y aura-il au plus de coups qu'ils peuvent faire ces deux-là? Il y en aura 7.

Donc si le premier en a deux il a 2/7 du jeu et le second 1/7 et entre eux deux ils ont 3/7, part que l'on prend sur 3 D et que l'on distribue au premier et au deuxième; ensuite des 4/7 qui restent chacun se partage 1/3 et tu trouveras que le premier toucherai 3/7 et le second un et le troisième 4/7[24].

Analyse et commentaire

Dans le premier jeu, un jeu de paume, les joueurs sont deux et en sont à 4/3 dans un jeu en 6 parties gagnantes au moment où ils décident d'interrompre le jeu. Calandri propose deux méthodes de partage: la première en raison des parties qui ont été gagnées au moment de la séparation, la seconde en raison inverse de la «difficulté» pour chaque joueur de gagner les parties qui resteraient à être gagnées pour obtenir la victoire. Avec la première méthode le partage se ferait en proportion de 4 à 3; mais Calandri fait le partage selon la seconde méthode et il se fait, alors, en proportion de 3 à 2.

Dans le deuxième jeu, un jeu de tir à l'arbalète, les joueurs sont trois et sont à 2/1/0 dans un jeu en trois parties gagnantes au moment où ils décident d'interrompre le jeu. À nouveau Calandri dit qu'il y a les deux méthodes précédemment définies et décide à nouveau de prendre la seconde. Le partage devrait donc se faire en proportion de 2 à 1 et 0 s'il suivait sa première méthode ou de 6 à 3 et 2, s'il suivait sa deuxième méthode, effective dans le premier jeu, or ce n'est pas le partage proposé. En fait Calandri propose une troisième méthode qui consiste à déterminer combien de coups, au maximum, on peut jouer pour qu'il y ait un vainqueur quand on en est au début de la partie; il y en a 7. Puis il commence par distribuer la mise proportionnellement aux parties déjà gagnées à 2/1/0, c'est-à-dire 2/7, 1/7 et 0 puis le reste 4/7 est réparti également entre les trois joueurs soit 4/21, renonçant alors à faire intervenir la «difficulté» relative à chaque joueur de gagner; le premier joueur aura ainsi 10/21, le deuxième 7/21 et le troisième 4/21 de la mise totale, soit, comme il le dit, 1.3/7, 1 et 4/7 d'une mise de 3.

S'il avait procédé ainsi dans le premier jeu, le premier joueur aurait eu 4/11 + 2/11 et le second 3/11 + 2/11.

Ainsi Calandri paraît-il plutôt rapporter des solutions proposées dans d'autres arithmétiques commerciales selon le problème proposé plutôt qu'appliquer systématiquement les différentes méthodes. On comprend assez bien qu'à ses yeux le seul intérêt de ces problèmes est d'être le support de calculs de proportion.

[24] Voir le texte italien en Annexe I.

Néanmoins, il n'est pas inutile de remarquer que l'utilisation de la première méthode dans le deuxième jeu, avec trois joueurs, est facilement contestable dans la mesure ou celui qui n'a encore gagné aucune partie n'a rien. Quant à la deuxième méthode elle assez délicate à manipuler avec trois joueurs; en effet la difficulté est une fois et demie plus grande pour le troisième que pour le deuxième, et deux fois plus grande pour le deuxième que pour le premier ... donc le deuxième doit avoir une fois et demie ce qu'a le troisième et le premier deux fois ce qu'a le deuxième, c'est-à-dire un partage comme 6/3/2 alors que les parties à gagner sont: 1/2/3.

Les nouveaux documents

En 1985 Laura loti Rigatelli, puis cette année même, en 2003, Raffela Franci ont attiré l'attention sur deux passages d'arithmétiques commerciales italiennes qui traitaient du problème des partis, ce qu'aucun historien n'avait remarqué de manière explicite avant elles.

Ohri

L'auteur est anonyme et son texte était daté par ses éditeurs, lors de la deuxième parution en 1992[25], de la fin du XIVe siècle. En 1960 Oystein Ore[26] a mentionné, sans plus de précision, la trace du problème des partis dans «des manuscrits mathématiques italiens de 1380»; aussi, en son hommage, ai-je appelé cet anonyme Ohri, comme «Objet historique relativement incertain», dans la mesure où le manuscrit d'où il est extrait, pour une raison inconnue, n'a jamais été publié intégralement comme l'ont été de nombreuses autres arithmétiques commerciales par le groupe de recherche de l'Université de Sienne[27].

Une traduction en français du texte de Ohri[28]

<29 r> *Deux hommes jouent aux échecs et font un depôt de un ducat pour 3 jeux, il arrive que le premier gagne 2 jeux au 2º, il demande de ne pas jouer plus avant, combien le premier aura-t-il gagné sur le 2º du ducat; supposons que le premier ait*

[25] Voir [Tot85] pp. 232 et [Tot92] pp. 349-351.

[26] Voir [Ore60]. Personne, à ma connaissance, ne sait à quels manuscrits Ore fait allusion, pourquoi il est aussi précis sur la date de 1380 et surtout pourquoi il n'en dit pas plus à propos d'une information aussi remarquable.

[27] Il en était ainsi le 21janvier 1994 lorsque j'ai fait un exposé sur ce sujet au séminaire d'Histoire du Calcul des probabilités et des Statistiques du CAMS de l'EHESS et rien ne semble avoir évolué depuis.

[28] Codice Magliabechiano CL. XI, 120 de la Biblioteca Nazionale de Florence. Je propose cette traduction à partir de la transcription donnée dans [Tot85] pp. 234-235.

gagné sur le 2º 1 c au premier jeu, tu dois voir, par raison, que dans le 2º jeu il devrait gagner autant que dans le premier et aura donc gagné un autre c, et ainsi maintenant se trouve avoir gagné 2 c pour les deux jeux; le 2º qui a perdu se trouve avoir maintenant sur son ducat 1 ducat moins 2 c. Et sachant que si celui qui a perdu 2 jeux gagnait 2 autres jeux contre son compagnon, ils n'auraient pas gagné l'un sur l'autre quoi que ce soit, supposons maintenant que le 2º commence à gagner contre le premier un jeu, je dis qu'il gagne dans ce jeu 1 ducat moins 2 c qu'avait gagné le premier et la raison en est que si celui qui avait au début gagné 2 jeux avait encore gagné le 3º jeu, [cela] lui aurait gagné au premier tout ce qui restait de son ducat, et ainsi au contraire pour ce que gagne le 2º sur le premier, c'est-à-dire 1 ducat moins 2 c, maintenant enlève un ducat moins 2 c de la part que le premier avait gagné sur le 2º, c'est-à-dire 2 c, il restera encore au premier 4 c moins 1 ducat de gagné, et le second qui commence à recevoir il devra avoir dans [son] jeu 2 ducats moins 4 c, maintenant considère pour le 1º qui a gagné 2 jeux que si le 2º qui a gagné dans les deux jeux gagnait le 3º jeu il se ferait qu'il gagnerait tout ce que le 1º a en plus du ducat et si le premier gagnait ce 3º jeu il gagnerait 2 ducats moins 4 c et il doit en être de même pour le 2º sur le premier; maintenant supposons que le 2º gagne le 2º jeu, il se trouve donc avoir gagné sur le premier 2 ducats moins 4 c et cela se doit trouver touché de ce que le premier lui avait gagné, et cela du fait que l'un comme l'autre a gagné 2 jeux, maintenant regarde quand le 2º gagne sur le premier le 2º jeu, et gagne 2 ducats moins 4 c, maintenant nous devons ajouter 1 ducat à chaque part et nous avons d'une part 4 c et de l'autre 3 ducats moins <29 v> *4 c, ajouter encore 4 c à chaque part et nous aurons 8 c égaux à 3 ducats, maintenant divise le nombre par c, c'est-à-dire 3 ducats par 8, d'où il vient 3/8 et c vaut autant, c'est-à-dire ce que le premier gagne au premier jeu, et au 2º jeu il gane encore 3/8 de ducat qui valent 6/8, c'est-à-dire 3/4 et c'est ce que le premier a gagné en ne jouant que 2 jeux et ainsi fait-on dans les raisons semblables.*

Deux hommes jouent aux échecs un ducat en 4 jeux, quand arrive le cas que le premier gagne le premier jeu, le 2º, le 3º, et se retire du jeu sans jouer plus selon la volonté de son compagnon, je demande ce qu'il a gagné. Supposons qu'il a gagné 1 c au premier jeu, alors il gagne 1 c et 1/3 au 2º jeu, parce qu'il ne reste à gagner que 3 jeux, et au 3º jeu il lui vient 1 c 1/2 parce qu'il ne lui reste, gagné le 2º jeu, que 2 jeux pour gagner toute la partie; si [bien] qu'il aura gagné 3 c et 5/6 et ainsi il devra avoir en son jeu 2 ducats moins 3 c et 5/6[29].

Analyse et interprétation

L'auteur traite deux situations d'un même jeu: les échecs. Dans la première situation il y a deux joueurs et ils en sont à 2/0 en 3 jeux gagnants quand survient la ques-

[29] Voir le texte italien en Annexe II.

tion du partage de la mise et même, plus précisément, celle de la valeur du gain du premier joueur sur le gain du deuxième. Dans la deuxième situation les deux joueurs en sont à 3/0 en 4 jeux gagnants lorsque se pose la question du partage.

Considérons d'abord le premier problème. Je décompose le texte en propositions élémentaires afin de mieux suivre le raisonnement de l'auteur:

1	1º	deux hommes jouent aux échecs et font un dépôt de un ducat pour 3 jeux
	2º	il arrive que le premier gagne 2 jeux au 2º
	3º	il demande de ne pas jouer plus avant
	4º	combien le premier aura-t-il gagné sur le ducat du 2º?
2	5º	supposons que le premier ait gagné sur le 2º *1 c* au premier jeu
	6º	tu dois voir, par raison, que dans le 2º jeu il devrait gagner autant que dans le premier et aura donc gagné un autre *c*
	7º	et ainsi maintenant se trouve avoir gagné *2 c* pour les deux jeux
	8º	le 2º qui a perdu se trouve avoir maintenant sur son ducat *1* ducat moins *2 c*
3	9º	sachant que si celui qui a perdu 2 jeux gagnait 2 autres jeux contre son compagnon, ils n'auraient pas gagné l'un sur l'autre quoi que ce soit
	10º	supposons maintenant que le 2º commence à gagner contre le premier un jeu
	11º	je dis qu'il gagne dans ce jeu *1* ducat moins *2 c* qu'avait gagné le premier
4	12º	et la raison en est que si celui qui avait au début gagné 2 jeux avait encore gagné le 3º jeu, [cela] lui aurait gagné au premier tout ce qui restait de son ducat
	13º	et ainsi au contraire pour ce que gagne le 2º sur le premier, c'est-à-dire *1* ducat moins *2 c*
5	14º	maintenant enlève un ducat moins *2 c* de la part que le premier avait gagné sur le 2º, c'est-à-dire *2 c*
	15º	il restera encore au premier *4 c* moins *1* ducat de gagné
	16º	et le second qui commence à recevoir il devra avoir dans [son] jeu *2* ducats moins *4 c*
6	17º	maintenant considère pour le 1º qui a gagné 2 jeux que si le 2º qui a gagné dans les deux jeux gagnait le 3º jeu il se ferait qu'il gagnerait tout ce que le 1º a en plus du ducat
7	18º	et si le premier gagnait ce 3º jeu il gagnerait *2* ducats moins *4 c*
	19º	et il doit en être de même pour le 2º sur le premier

8 20º maintenant supposons que le 2º gagne le 2º jeu
21º il se trouve donc avoir gagné sur le premier *2* ducats moins *4 c*
22º et cela se doit trouver touché de ce que le premier lui avait gagné
23º et cela du fait que l'un comme l'autre a gagné 2 jeux

9 24º maintenant regarde quand le 2º gagne sur le premier le 2º jeu
25º et gagne *2* ducats moins *4 c*

10 26º maintenant nous devons ajouter 1 ducat à chaque part
27º et nous avons d'une part *4 c* et de l'autre *3* ducats moins *4 c*
28º ajouter encore *4 c* à chaque part
29º et nous aurons *8 c* égaux à *3* ducats
30º maintenant divise le nombre par *c*, c'est-à-dire *3* ducats par *8*
31º d'où il vient *3/8* et *c* vaut autant, c'est-à-dire ce que le premier gagne au premier jeu

11 32º et au 2º jeu il gagne encore *3/8* de ducat
33º qui valent *6/8*, c'est-à-dire *3/4*
34º et c'est ce que le premier a gagné en ne jouant que 2 jeux

12 35º et ainsi fait-on dans les raisons semblables.

Commentaire

Le texte se décompose en 12 moments et 35 propositions qui constituent à la fois un algorithme de calcul et, en partie, des justifications de la réponse donnée au problème considéré.

Deux joueurs qui jouent aux échecs en trois parties gagnantes décident de se séparer au moment où l'un des deux à déjà gagné deux parties alors que son adversaire n'en a gagne aucune; ils ont misé chacun un dinar, ce qui constitue un enjeu de deux dinars à gagner par le vainqueur, c'est-à-dire le premier des deux qui aura gagné trois parties, et ils veulent savoir, dans ces conditions, combien celui qui mène 2/0 doit obtenir sur le dinar misé par son adversaire en plus de son propre dinar. Ce qui sous-tend cette question c est l'idée que chaque fois qu'un joueur gagne une partie il lui revient une certaine part de la mise; c'est, en fin de compte, la valeur de cette partie. Que chaque partie jouée n ait pas la même valeur est une idée profondément originale que l'on retrouvera explicitement chez Cardan et plutôt comme une découverte chez Pascal; la plupart des autres solutions proposées du problème partent de l'idée de répartir les enjeux proportionnellement aux parties gagnées ou inversement proportionnellement aux parties qui restent à être gagnées. Quant au jeu en question, les échecs, comment ne pas noter qu'il est plutôt difficile de le considérer comme un jeu de hasard[30]. La symétrie des situations qui inter-

30 Néanmoins il faut rappeler que certaines variantes du jeu d'échecs se jouaient, au moins au XIII^{e} siécle, avec un dé qui par le résultat de ses lancers permettait la manoeuvre des pièces sur l'échiquier. Voir [Meh90] p. 120.

vient pour légitimer les gains ne repose donc pas sur le fait que le hasard rend effectivement la situation parfaitement symétrique mais uniquement comme principe de simplicité: chaque partie peut aussi bien être gagnée par chaque joueur; ce n est pas le hasard qui joue mais l'égalité de valeur des joueurs. Si l'un était «plus fort» que l'autre il le battrait à tous les coups; seules les circonstances, donc d'une certaine façon le hasard, la «fortune», font que c'est l'un ou l'autre qui gagne. Donc le jeu n'est pas un jeu de hasard mais il est traité comme tel.

L'auteur considère le jeu en partant de la situation initiale (0/0) en la faisant évoluer par toutes les situations qui peuvent se présenter et en considérant à chaque passage d'une situation à la suivante ce que le gain de la partie considérée a rapporté à celui qui l'a gagnée et donc coûté à celui qui l'a perdue. Entre 0/0 et 1/0 le joueur qui a gagné la partie a donc gagné sur le ducat de son adversaire une quantité inconnue, appelée «*c*» comme «cosa» (la «chose», l'inconnue, ce que nous noterions *x*) et se trouve donc en droit de considérer qu'il possède $1+c$. Puis l'auteur affirme que la valeur de la deuxième partie qui est gagnée quand on passe de la situation 1/0 à la situation 2/0 est également égale à *c*, en nous disant que cela se voit «per ragione». En fait l'auteur s'appuie sur un double principe de symétrie, qu'il n'explicite pas, le considérant probablement comme évident. Il considère que le gain d'un joueur quand il gagne est non seulement égal à ce que l'autre perd (premier principe de symétrie) mais surtout est égal au gain de l'autre si c'est l'autre qui gagne (deuxième principe de symétrie[31]), ce qui peut être considéré comme l'enjeu de cette partie ou la valeur de cette partie. Ainsi à 1/0 l'enjeu de la partie est inconnu, appelons le c'; si c'est le premier joueur qui gagne, à 2/0 il a gagné $c + c'$, si c'est le deuxième il a gagne $c' - c$ mais comme il se retrouve alors dans la situation 1/1 il a *1* et n'a rien gagné; $c' - c$ est donc égal à 0 et c' est égal à c. C'est un résultat que Pascal ne fera que constater dans sa correspondance avec Fermat[32].

Arrivé à 2/0, et un partage $1 + 2c / 1 - 2c$, l'auteur, très habilement, au lieu d'introduire une deuxième inconnue pour la valeur de la partie suivante qui permet d'atteindre la situation 3/0 ou la situation 2/1 se sert du fait qu'à 3/0 le deuxième joueur qui a tout perdu a donc perdu 1 – 2c qui représente la valeur de la troisième partie; ainsi à 2/1 les gains de chacun sont donc, d'après le deuxième principe de symétrie, $2c - (1 - 2c)$ $4c - 1$ pour le premier joueur et $1 - 4c$ pour le deuxième joueur qui possède maintenant $2 - 4c$[33].

---

31 Ce deuxième principe de symétrie n'a rien d'évident; on pourrait considérer, par exemple, que dans la situation 1/0 les deux joueurs ne sont pas dans les conditions d'un jeu équitable et que, de ce fait, le gain de la partie devrait rapporter plus au deuxième joueur qu'au premier.

32 Voir, ici, le tableau des valeurs des parties dans l'introduction.

33 Nous en sommes à la 16º étape.

Arrivé alors à 2/1 si le premier gagne il gagne les *2 – 4c* du deuxième puisqu'il a tout et si c'est le deuxième qui gagne il gagne, par symétrie, *2 – 4c*, sur le premier. Ces *2 – 4c*, que gagne le second, sont égaux aux *4c – 1* qui représentent les gains du premier, puisqu'à 2/2 ils doivent avoir la même somme[34].

Tout se passe alors comme s'il manquait plusieurs étapes dans le raisonnement et dans l'algorithme entre la 25º et la 26º étapes. En effet nous devrions avoir entre les 25º et 26º étapes:

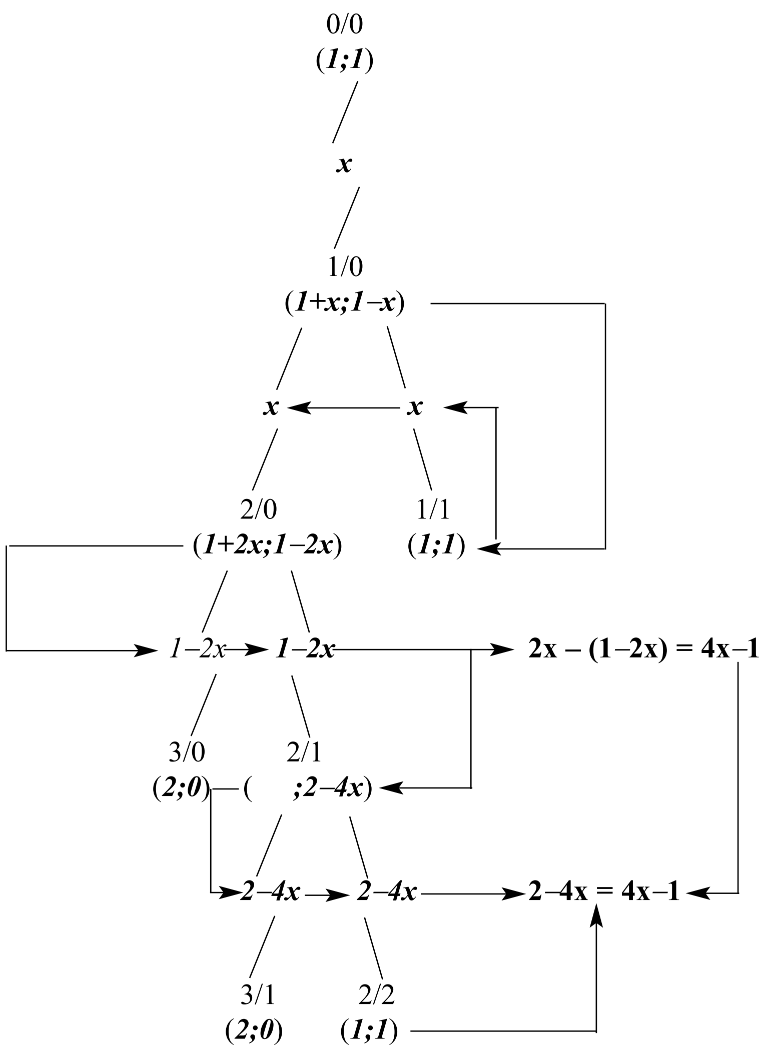
a) le premier (à 2/1) il a *4c – 1* de gagné (c'est le résultat de la 15º étape)
b) donc *4c – 1* doit être égal à *2 – 4c* (d'après les 22º et 23º étapes).

On peut alors reprendre le fil de l'algorithme qui consiste à résoudre une équation du premier degré par «al jabr»[35] (26º étape et suivantes, jusqu'à la 31º).

Je propose ci-après un graphe qui représente les étapes de cet algorithme en gardant la trace, à chaque étape du jeu, du partage des mises et de la valeur de chaque partie:

[34] Nous en sommes à la 25º étape.

[35] De 4x – 1 = 2 – 4x on passe à 4x = 3 – 4x (26º et 27º étapes) par «al jabr» (26º étape), et de 4x = 3 – 4x à 8x = 3, à nouveau par «al jabr» (28º étape).



Nous pouvons remarquer que Ohri aurait pu prendre un chemin beaucoup plus «droit», après la 13e étape. En effet, on voit, très facilement, sur le graphe précédent qu'il est possible de proposer l'algorithme suivant, à nos yeux plus systématique et plus simple:

5 16º le second qui commence à recevoir il devra avoir 2 ducats moins 4 c[36]

6 17º maintenant considère pour le 1º qui a gagné 2 jeux que si le 2º qui a gagné dans les deux jeux gagnait le 3º jeu il se ferait qu'il gagnerait tout ce que le 1º a en plus du ducat

[36] C'est la 16º proposition de Ohri, conséquence de la 8º et de la 13º. Ce raisonnement élimine les 14º et 15º propositions.

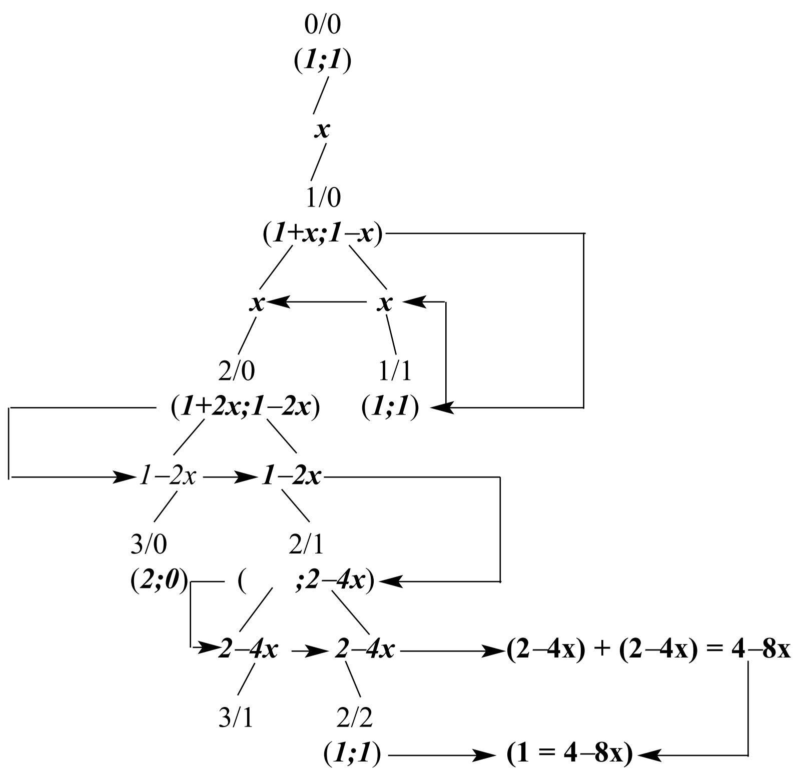
7 18º et si le premier gagnait ce 3º jeu il gagnerait 2 ducats moins *4 c*
19º et il doit en être de même pour le 2º sur le premier

8 20º maintenant supposons que le 2º gagne le 2º jeu
21º il se trouve donc avoir gagné sur le premier 2 ducats moins *4 c*

9 22º et il a donc dans son jeu 4 ducats moins 8 c
23º tu dois voir que 4 ducats moins 8 c sont égaux à 1 ducat

10 24º maintenant nous devons ajouter 8 c à chaque part
25º et nous avons 4 ducats égaux à 1 ducat et 8 c
26º maintenant retranche 1 ducat de chaque part
27º et nous avons 3 ducats égaux à 8 c[37].

Ce qui provient du graphe «modifié»:



Néanmoins, ne perdons pas de vue que notre raisonnement s'appuie sur une représentation graphique[38] ce qui n'est, très probablement[39], pas le cas de l'auteur

[37] C'est la 29º proposition de Ohri.

[38] Une représentation graphique du type de celle donnée plus haut dans la présentation générale du problème des partis.

[39] C'est un euphémisme!

de ce texte. De plus, Ohri paraît guidé dans son raisonnement, à chaque étape, par la part de la mise gagnée ou perdue par chaque joueur. Dans cette optique, le calcul de Ohri est tout à fait cohérent.

Passons maintenant au deuxième problème qui est proposé, sinon traité, par notre auteur. Nous sommes toujours en présence de deux joueurs d'échecs, mais ici ils jouent en 4 parties gagnantes et semblent vouloir partager la mise de 1 (dinar) chacun à 3/0. La méthode précédemment utilisée peut l'être à nouveau[40], mais au prix de l'introduction d'une deuxième inconnue (*c'*) à partir de la situation 2/0 et d'un très sérieux effort d'attention en dehors de toute représentation graphique. On trouve alors que *c'* est égal à *1/4* et *c* à *5/16*; le partage à 3/0 devrait donc être tel que le premier joueur reprenne *15/8* et le deuxième 1/8.

Mais notre auteur ne fait rien de tel, peut-être parce qu'il est nécessaire avec la même méthode d'introduire une deuxième inconnue. Qui plus est, ce qu'il propose est totalement incompréhensible[41] et inachevé puisque le texte s'arrête avant qu'il propose une valeur de *c* et un partage réalisable; il semble nous dire que ce partage devrait se faire à $3c + 5/6$ pour le premier et 2 ducats moins ($3c + 5/6$) pour le deuxième.

Quelques remarques s'imposent. Tout d'abord le fait que le problème soit traité dans le contexte d'un jeu d'échec ce qui ne manque pas d'évoquer une origine possible arabomusulmane[42]. Mais, surtout, ce contexte du jeu d'échecs, que nous ne retrouvons dans aucun autre document, attire notre attention sur deux composantes de la problématique: premièrement il ne s'agit pas d'un jeu de hasard[43], ce qui peut porter des interlocuteurs à contester ce traitement du problème basé sur la symétrie des situations des joueurs; deuxièmement le jeu d'échecs porte en lui cette méthode systématique qui consiste à envisager dans une situation donnée toutes les situations possibles au(x) coup(s) suivant(s), avant de jouer ce(s) coup(s). On peut comprendre que d' autres contextes, évoqués par les différents auteurs, comme la paume, la course à pied, le tir à l'arc ou àl'arbalète[44] induisent d'autres types de solutions et que le problème définitif, celui où il est, explicitement dit qu'il s'agit d'un jeu de hasard équitable qui assure la parfaite égalité des joueurs par leur interchangeabilité, se construise, historiquement, en relation avec la solution définitive.

[40] C'est un très bon test de la compréhension de la méthode que de le faire.

[41] Je crois comprendre que la valeur de la première partie est *c*, celle de la deuxième $c + 1/3$, et celle de la troisième $c + 1/2$ (pour des raisons qui m'échappent complètement, sinon qu'il reste, respectivement, 3 puis 2 parties à gagner...?), dont la somme fait bien $3c + 5/6$.

[42] Sous réserve qu'il s'agisse bien, ici, d'un jeu d'échecs et non pas d'un jeu joué sur un échiquier ou sur un damier sans qu'il s'agisse pour autant d'un jeu d'échecs. Voir [Meh90] p. 119.

[43] Voir la note 30.

[44] Ce sont les contextes que l'on trouve chez Pacioli.

Par ailleurs, comme nous l'avons déjà remarqué, si Ohri possède une méthode très fine pour un jeu en trois parties avec deux joueurs, il est parfaitement incapable de la généraliser, tant pour le nombre des joueurs que pour celui des parties.

Ohrigens

Le manuscrit Urb.lat.291, de la Bibliothèque Apostolique Vaticane, d'ou est extrait le passage que nous allons étudier, est anonyme et non daté (d'après W. Van Egmond il daterait du début du XV^{e} siècle)[45]. Il comprend 166 pages qui se répartissent ainsi:

- p. 1-33: un traité des racines,
- p. 34r-42r: une traduction de la première partie de l'*Al-jabr* d'Al-Khwarizmi,
- p. 42v-102v: un développement de l'algèbre qui dans sa première partie suit d'assez près le contenu du chapitre XV du *Liber abaci* de Fibonacci,
- p. 103-132: sur les nombres carrés, des problèmes résolus par l'algèbre, une règle pour trouver les nombres parfaits,
- p. 133-166: un traité de géométrie pratique

En dehors des pages 81 à 102 il s'agit d'une traduction d'une partie du manuscrit latin Vat.lat.4606 du XIV^{e} siècle de la Bibliothèque Apostolique Vaticane. Le contexte du manuscrit paraît être celui des écoles d'abaque où l'on étudiait l'algèbre. À partir de la page 94v, et après une longue série de questions d'algèbre, sans aucun changement d'écriture se trouvent des problèmes de partage d'une mise, résolus arithmétiquement. Ces problèmes ne se trouvent pas dans le manuscrit Vat.lat.4606; nous n'en connaissons pas l'origine.

Une traduction en français du texte italien

<94v> *Note sur ces questions secrétes que celui qui en a pris connaissance verra qu'il y a des raisons*[46] *à enregistrer et à ne pas jeter dans l'esprit de tout un chacun parce qu'on dit que celui qui montre tout n'a plus rien à dire. Pour autant note les et garde les en toi pour savoir répondre à qui te le demanderait.*

---

[45] Avant 1455 d'après une note manuscrite d'un possesseur du manuscrit. Tous les renseignements que je donne ici proviennent de [Fra03]. Je remercie Maryvonne Spiesser de m'avoir fait connaître cette découverte de Raffela Franci.

[46] «Ragione»: raisonnement (ou calcul), comme dans les deux autres textes, mais qui peut-être aussi ce qui est «juste» et ce qui est l'objet d'un calcul «en proportion».

Si on te disait qu'il y a trois hommes qui jouent et qu'on te dise de quel jeu il s'agit, et qu'ils jouent en trois jeux et qu'ils ont mis 2 sous entre eux trois, et que celui qui le premier laboure trois jeux retire les dits 2 sous, dont chacun a mis 8 dinars[47]*. Maintenant l'un a deux jeux, l'autre a un jeu et l'autre n 'a aucun jeu; on demande, si on ne joue plus, combien revient à chacun. Sache qu'on ne peut pas donner cette raison d'elle-même si avant tu n'en fais pas plusieurs qui soient des jeux gagnants en une autre forme et ici, après, je parlerai de toutes.*

Tout d'abord nous dirons ceci: je dis que deux ont deux jeux par personne et l'autre n 'a qu'un jeu, se faisant que celui qui le premier a les trois jeux remporte la mise. Combien revient par personne, la mise étant fournie en commun par tous les trois? Fais comme je dis: si celui qui a un jeu gagnait un autre jeu il serait au pair avec les deux autres et il aurait le tiers de toute la mise. Et si gagnait l'un de ceux qui ont deux jeux par personne il n'aurait rien celui qui n'a qu'un jeu, si bien que ce tiers ne va pas en commun cette fois. Donc ce tiers est commun qui est le 1/9 de chacun[48] *si bien que celui qui n'a qu'un seul jeu, ne doit avoir de cette mise que le 1/9. Si bien que* <95r> *la mise commune étant de 24 dinars il n'aurait celui qui a un jeu que le 1/9, qui fait 2.2/3, et chacun de ceux qui avaient deux jeux par personne doivent avoir les 4/9 qui font 10.2/3 dinars par personne. Et ceci est la première chose à noter.*

Maintenant fait si l'un a gagné deux jeux et les autres n'en ont gagné qu'un seul par personne et qu 'ils ne jouent plus; combien revient par personne? Là on doit faire ainsi: si celui qui a deux jeux gagnait l'autre jeu aucun des deux autres n'aurait rien, et si un des deux qui ont un jeu par personne gagnait le jeu, alors celui qui gagnerait aurait les 4/9 de toute la mise. Si bien que celui qui n'aurait rien gagné avant celui qui a les deux jeux il aurait 1/9, gagnant le compagnon qui a un jeu comme lui, et celui qui gagne qui a un jeu arriverait à deux jeux et aurait les 4/9, si bien que celui qui resterait avec un jeu ne toucherait alors que 1/9. Et maintenant on doit dire ainsi que n'importe lequel des deux qui ont un jeu par personne est dans cette aventure[49] *ou d'avoir rien ou les 4/9 de la mise ou un neuvième. Si bien que tu ajoutes ensemble rien avec 4/9 et avec 1/9 et ça f ait 5/9 et, parce qu'ils sont trois personnes, il revient le tiers par personne, c'est-à-dire les 5/27 de toute la mise. Si bien que, donc, les deux qui ont un jeu par personne, chacun d'entre eux doit avoir les 5/27 de la mise et celui qui avait deux jeux doit avoir les 17/27 de la mise. Et tu as l'offre. Et note bien tout.*

Ensuite on dit que les deux ont deux jeux chacun et que l'autre n'a aucun jeu; que vient-il par personne de la mise totale? Ce qui est vite fait: que si l'un de ces deux qui ont deux jeux par personne gagne il aurait tout, et celui qui n'a pas un seul

[47] 1 sou est égal à 12 dinars.

[48] On peut comprendre: «qui donne le 1/9 qui revient à chacun pour la situation 2/2/2».

[49] «Ventura».

jeu n'aurait rien. Et si celui qui n'a pas un jeu gagnait un jeu, donc, déjà il aurait un jeu et les deux autres deux jeux par personne, et il viendrait à celui qui a un jeu le 1/9 de toute la mise et à ceux qui en ont deux par personne, à chacun les 4/9, comme on l'a déjà dit plus haut. Si bien que, donc, ce 1/9 est touché pour le tiers par chacun[50] *ce qui fait 1/27. Si bien que celui qui n'a aucun jeu touche 1/27 et les autres qui ont chacun deux jeux par personne touchent, par personne, les 13/27 de toute la mise. Et tu as l'offre. Et note bien toutes ces choses qui sont très belles à savoir bien faire.*

<95v> *Je peux aussi dire que l'un a deux jeux, l'autre en a un, l'autre n'en a aucun; je demande combien revient, par personne,de toute la mise. Fais ainsi: que tu dises que celui qui a deux jeux gagne l'autre jeu, et il ramasse tout. Et si celui qui a un jeu gagnait ce jeu il aurait deux jeux et il viendrait, comme on l'a vu précédemment, qu'il aurait les 13/27 chacun des deux qui ont maintenant deux jeux par personne. Et si celui qui n 'a aucun jeu gagnait ce jeu il aurait un jeu, si bien que comme il est dit plus haut il reviendrait à ceux qui maintenant ont chacun un jeu par personne, il reviendrait à ces deux là les 5/27 de toute la mise. Si bien qu'on fait maintenant cette raison que tu veux, ou celle de celui qui a un jeu ou celle de celui qui n'en a pas un. Et nous disons de celui qui a un jeu, que si celui qui a deux jeux gagnait l'autre jeu, donc que celui qui a un jeu n'aurait rien, et si lui gagnait ce jeu il aurait deux jeux pour lesquels il toucherait les 13/27 de toute la mise. Et si celui qui n'apas un jeu gagnait, celui qui a un jeu toucherait les 5/27. Donc celui qui a un jeu touche le 1/3 de rien ajouté à 13/27 et avec 5/27 qui font 18/27 dont le 1/3 (est) 6/27, si bien que celui qui a un jeu touche les 6/27 de toute la mise. Et maintenant tu vois pour celui qui a un jeu nul, que si celui des deux jeux gagne, lui n 'a rien, et si celui qui a un jeu gagnait, lui aurait 1/27, et si lui-même gagnait il aurait les 5/27, si bien qu'il doit avoir le 1/3 et joins rien avec 5/27 et avec 1/27, dont le 1/2*[51] *fait précisément 2/27, si bien que celui qui a un jeu doit avoir les 6/27 de toute la mise et celui qui n'a pas un jeu doit avoir les 2/27. Et maintenant pour trouver ce que doit avoir celui qui a les deux jeux, tu dis ainsi: s'il gagne ce jeu il ramasse toute la mise, et si gagne celui qui a un jeu il retire les 13/27, et si gagne celui qui n 'a aucun jeu alors celui des deux jeux en a les 17/27, si bien que tu ajoutes ensemble tout avec 13/27 et avec 17/27 et ça fait 57/27, dont le tiers est 19/27, si bien qu'il touche les 19/27. Et celui de un jeu il en touche 6/27 et celui qui n'a aucun jeu il en touche les 2/27 de toute la mise f ournie par eux trois. Cela s'entend toujours*[52] *et tu as l'offre. Et note tout bien.*

[50] Il semble bien que l'auteur attribue à chaque joueur le tiers de ce que chaque joueur pourrait gagner à l'étape suivante pour chaque configuration.

[51] 1/3; il doit s'agir d'une erreur de transcription de Raffella Franci.

[52] «S'intenda senpre»... je ne suis pas très satisfait de la traduction.

Il manque maintenant si on disait que l'un a deux jeux et les deux autres n'ont aucun jeu; combien revient par personne? Ceci se connaît par ce qui a été dit plus haut, et nous dirons ainsi: si celui qui a les deux jeux gagnait l'autre jeu il aurait toute la mise et les autres n'auraient rien. Maintenant si un des deux qui n'ont aucun jeu chacun gagne ce jeu <96r> *ce serait la raison déjà dite plus haut, qui aurait maintenant un jeu et il toucherait les 6/27 de toute la mise et l'autre les 2/27. Si bien que, maintenant, tu vois que les deux qui n'ont aucun jeu chacun sont à l'aventure ou de n'avoir rien ou l'un d'avoir les 6/27 ou les 2/27, si bien que tu joins ensemble rien et 6/27 et 2/27 et ça fait 8/27, si bien que le tiers de 8/27 qui est 8/81 est touché par personne par ceux qui n 'ont aucun jeu, si bien que entre eux deux ils touchent les 16/81; le reste enfin de toute la mise c'est 65/81 qui est ce que touche celui qui avait deux jeux. Maintenant, voyons si c'est ainsi qu'il touche les 65/81, et disons que si celui qui a deux jeux gagne il aura toute la mise, et si gagne un des deux autres qui n 'ont aucun jeu il en aura 19/27, et aussi, si c'est l'autre des deux qui gagnait, celui des deux qui gagne a les 19/27. Si bien que pour chacun de ces deux qui gagnait il aurait 19/27 et gagnant lui-même il aurait tout, si bien que tu joins ensemble tout et deux fois 19/27 et ça fait 65/27, dont il en touche le tiers qui est 65/81. Si bien que tu vois clairement que celui qui a deux jeux touche les 65/81 de toute la mise, et ceux qui n 'ont pas un jeu ils touchent les 16/81 entre eux deux, ce qui fait 8/81 pour un... Et tu as l'offre. Et note bien les ressemblances. Et si tu as bonne intelligence, comme tu devrais avoir, pour ces raisons qui sont faites ici, tu dois voir comment on fait le mode d'autant d'hommes et d'autant de jeux qu'on a dit. Et par Dieu note bien tout; ce sont des choses dont il faut être fier entre tous les maîtres du monde.*

Note que les susdites raisons se font toujours en commençant par faire celles qui sont le plus insérées dans le [?][53] *des jeux qu'ils ont composés. Si bien que si je dis avec quatre jeux et que tu supposes que toutes les personnes ont trois jeux et qu'une personne avait deux jeux, c'est-à-dire un de moins que les autres, de supposer qu'ils ont trois jeux et qu'un avait deux jeux, et ainsi on va ensuite en descendant comme tu as vu descendu les susdites si bien que tu en viens à affirmer pour celle qui te fût proposée. Et prends bien note.*

<Note marginale> *Au sujet de ces raisons de trois qui font en trois jeux il manque encore deux modes qui sont écrits plus loin à la page 97.*

<97r> *Aux raisons des trois personnes qui jouent en trois jeux il manque encore deux modes; c'est-à-dire que l'un des deux modes est que si les deux avaient chacun un jeu et l'autre n'en avait aucun. Je demande combien revient par personne. Tu fais ainsi: que si un de ces deux qui ont un jeu par personne gagne l'autre jeu, il aurait deux jeux et cela lui vaudrait comme on a dit dans les [modes] passés les*

[53] «Liviaticha»:.....?

19/27, si bien que à ceux qui ont un jeu par personne, celui d'entre eux qui gagnerait un autre jeu aurait les 19/27 de toute la mise et l'autre n'en aurait que les 6/27 et celui qui n'a aucun jeu n'en aurait que les 2/27. Et si celui qui n 'a aucun jeu gagnait, lui, ce jeu là, chacun d'eux aurait le tiers de toute la mise. Si bien que tu vois maintenant clairement que chacun de ces deux qui ont un jeu par personne sont dans l'aventure d'avoir ou les 19/27 ou les 6/27 ou les 9/27, si bien que le tiers de cette aventure revient par personne, c'est-à-dire les 2/3 de toute la dite aventure entre eux deux, si bien que ajoute ensemble 19/27 avec 6/27 et avec 9/27 font 34/27 dont les 2/3 sont 68/81, si bien que ces deux touchent 68/81 d'où vient pour un 34/81. Donc tu diras que ceux qui ont un jeu touchent les 34/81 de toute la mise par personne, le reste qui est 13/81 va à celui qui a un jeu nul. Et fait le rôle[54] *pour voir si c'est ainsi, et disons comme ça: si un de ces deux gagne, celui qui n 'a pas un jeu touche les 2/27 de toute la mise, et ils sont deux ceux qui peuvent toucher les 2/27, si bien qu'ils peuvent toucher les 2/27 de deux façons, et s'il gagne il peut toucher les 9*[55]*, si bien qu'il touche le tiers de deux fois 2/27 et d'une fois les 9/27 dont le 1/3 de tous est les 13/81 de toute la mise. C'est pourquoi tu ajoutes ensemble 2/27 et 2/27 avec 9/27 qui font 13/27 dont le tiers est 13/81 et tu as que ceux qui ont un jeu par personne touchent les 31/81*[56] *par personne de toute la mise, et celui qui n'a pas un jeu touche les 13/81. Et c'est l'offre.*

De l'autre de ces deux modes qui manquent, dont on a déjà parlé de l'un, reste à dire ceci: si l'un d'eux avait un jeu et les deux autres n'en avaient aucun par personne, combien revient par personne? Cela se connaît par ce qu'on a dit ci-dessus, c'est-à-dire si nous voulons voir combien en vient à celui qui a un jeu il faut dire ainsi: si celui qui a un jeu gagne un autre jeu il aura deux jeux et les autres aucun. Donc il viendrait alors à celui qui avait les deux jeux les 65/81 comme c'est dit où l'on parle de cette raison à la page 95[57]*. Si bien que ceux qui n'ont aucun jeu auraient les 8/81 par personne. Et si ce jeu c'est l'an des deux qui n'ont aucun jeu qui le gagnait, alors la raison serait comme ce qui est dit plus haut que les deux auraient un jeu par personne et l'autre aucun et viendra it par personne à ceux qui ont un jeu par personne comme il est dit là, les 34/81 et à celui qui n'a pas de jeu les 13/81. Si bien que deux sont ceux pour lesquels provient l'aventure de celui qui a un jeu de toucher les 34/81 de toute la mise, et si ce seul gagnait ce jeu il aurait les 65/81, et donc il devrait avoir le 1/3 de 65/81 joint avec deux fois 35/81 dont 133/81 est toute la somme, dont pour le 1/3 il lui vient 133/243, si bien que celui qui a un jeu touche les 133/243 de toute la mise et les deux autres le reste*[58] *par moi-*

---

[54] «E farola per vedere se cossi è».

[55] Il faut lire: 9/27.

[56] Il faut lire: 34/81.

[57] À peu près ici, le manuscrit doit passer au folio 97v; la prépublication dont je dispose ne le mentionne pas...

[58] «L'avanso».

tié, qui est 55/243 par personne. Maintenant il manque, pour voir s'il en est ainsi, combien vient par personne à chacun des deux qui n'ont aucun jeu, et on dit ainsi: tu vois que si celui qui a un jeu gagne il en vient à l'un de ces deux qui n 'ont aucun jeu les 8/81 de toute la mise et si l'un de ces deux le gagnait ce jeu, l'autre aurait les 13/81, et si cet autre le gagnait, il aurait les 35/81[59]*, si bien que chacun de ces deux qui n'ont aucun jeu est dans l'aventure ou d'avoir les 8/81 ou les 34/81 ou les 13/81. Si bien que ajoutés ensemble ils font 55/81 dont le tiers revient à chacun de ces deux qui n'ont aucun jeu, qui est les 55/243. Si bien que l'offre reste comme faite. Et note bien tout. Et maintenant c'est dit pour autant de modes et par autant de manières que l'on peut dire de 3 hommes qui jouent à qui le premier a gagné 3 jeux et que chacun d'eux met dans la mise. Et de cette façon tu dois noter que si on fait tout ce qui se dit à ce même niveau de jeux et qu'on voudrait écrire dans tous les modes qu'on peut dire, il n'y aura à jamais de fin, si bien que toi qui étudies cela, juge le bien et tu auras notice de chacun des autres dans quelque forme qu'on t'ai dite. Celles-ci te donnent des éclairages si tu en as la compréhension, comme tu devrais l'avoir, ayant déjà étudié jusqu'à cette étape, si bien que je laisserai cela sans plus rien dire à présent, et ce qui est dit suffit. Et note bien tout ce qui est dit plus haut*[60].

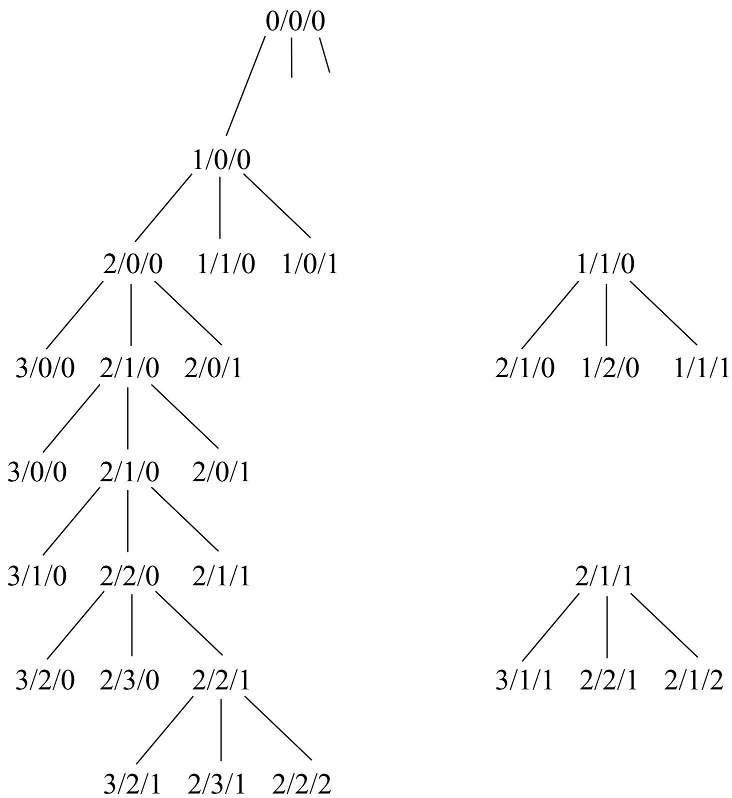
Analyse et commentaire

L'auteur pose la question du partage d'une mise de trois fois 8 dinars entre trois joueurs qui jouent en 3 parties gagnantes et veulent reprendre ce qu'il leur revient lorsqu'ils se trouvent dans la situation 2/1/0. Il commence alors par envisager la situation 2/2/1, qui, nous le savons dans la perspective «pascalienne», est la plus simple et peut être suivie de l'étude des situations successives: 2/1/1 et 2/2/0 (indifféremment) puis 2/1/0 (c'est la situation du problème) qui peut être suivie de celles de 2/0/0 ou 1/1/0 (indifféremment) et enfin de 1/0/0. C'est exactement le plan que suit l'auteur mais en allant dans un premier temps jusqu'à 2/0/0, sans attacher une importance particulière à la situation qui faisait l'objet de la question initiale, et en traitant un peu plus loin les deux dernières situations. Il considère, en fin de compte, sept situations: quatre qui sont nécessaires à la résolution du problème posé, puis trois autres par volonté d'explorer systématiquement toutes les situations dans lesquelles peuvent se trouver trois joueurs qui décident de jouer en trois parties gagnantes.

Afin de nous procurer une vision d'ensemble des situations possibles j'en donne le graphe suivant:

[59] Il faut lire: 34/81.

[60] Voir le texte italien en Annexe III.



L'auteur va, de manière parfaitement logique par rapport à cette description du déroulement du jeu, envisager successivement les situations:

2/2/1; 2/1/1; 2/2/0[61]; 2/1/0, puis 2/0/0, et enfin 1/1/0 et 1/0/0.

Il dit, très explicitement: *Sappi che questa ragione*[62] *non si puô dichiarare per sé sola se prima non nefai alquante che sia h giuochi vinti in altra forma e qui dirô appresso ditutte*[63] *et Nota che le sopraditte ragione sifanno che senpre si cominciano affare da quelle che sonopio inzerrte ala liviaticha de giuochi che ànno conpossti. Sicché se dicie a quattro guuochi e ttue metti che tutti gl'omini abiano tre gjuochi e mo omo abbia due guuochi, sicché mo meno di tutti, de mettere che abiano 3 giuochi e quello mo abbia due giuochi, e ccosie va poi digradando sic-*

[61] Il faut noter que l'auteur aurait pu, tout aussi bien, inverser l'ordre entre les situations 2/1/1 et 2/2/0.

[62] La «raison» de ce qui revient à chacun dans la situation 2/1/0.

[63] À la fin du deuxième paragraphe du folio 94v.

chome vedi digradati li sopraditti sicché vengni asserire a quello che tti fie proposto[64].

Le premier principe, explicite, est donc de se placer au départ du raisonnement dans une situation donnée telle que les situations possibles qui en découleraient si le jeu se poursuivait donnent un partage «évident».

On peut même avancer que pour l'auteur il est clair que si un nombre quelconque de joueurs jouent en n parties gagnantes il faut commencer par envisager la situation:

$$n-1/n-1/n-1/n-1/............../n-1/n-2$$

et «descendre» ensuite progressivement vers la situation initialement proposée[65]. Il estime qu'il a suffisamment envisagé de cas particuliers pour que ses auditeurs sachent faire fonctionner ce principe, comme il le dit: *E sse ài buono ingiengno come dovressti avere per queste ragione che ài quie fatte dei vedere lo modo come si fanno tutte di quanti omini e di quanti giuochi diciesse*[66].

Avant d'aller plus loin dans l'analyse des principes que ce document révèle, je voudrais revenir sur l'expression, très imagée, utilisée par l'auteur et déjà citée un peu plus haut: *ccosie va poi digradando sicchome vedi digradati li sopradatti*. À partir d'une situation résolue, par exemple 2/2/1 qui est donc la première que l'on doit envisager, le Maître «descend» ce qui peut vouloir dire qu'il fait jouer un principe de «diminution» du nombre de parties jouées: 5 tout d'abord, puis 4, puis 3, puis 2, puis une. Ainsi doit-il envisager successivement:

en	5 parties	2/2/1	(1)		
	4 parties	2/2/0	(2)	2/1/1	(3)
	3 parties	2/1/0	(4)		
	2 parties	2/0/0	(5)	1/1/0	(6)
	1 partie	1/0/0	(7)		

[64] Dernier paragraphe du folio 96r. L'auteur envisage donc ici un jeu en 4 parties gagnantes avec un nombre de joueurs qui n'est pas précisé et dont on peut penser qu'il est encore de trois joueurs ou bien même que notre «maître» considère, à juste titre comme pouvant être quelconque. Effectivement, en 4 parties gagnantes, la première situation à envisager est bien 3/3/2 (avec trois joueurs), 3/3/3/2 (avec quatre joueurs) etc...

[65] Dans ma présentation schématique cette «descente» prend plutôt l'allure d'une «remontée». Ce détail n'est pas anodin comme on le verra par la suite.

[66] Fin de l'avant-dernier paragraphe du folio 96r.

ce qui ne correspond pas, tout à fait, à l'ordre dans lequel il envisage les différentes situations puisque cette description intervertie les situations (2) et (3)[67]. Elle est, cependant, probablement beaucoup plus proche de la «logique schématique» du Maître que la représentation arborescente que j'ai utilisée[68].

Maintenant le point le plus délicat, pour ce qui est de la méthode, est de réussir à comprendre comment l'auteur justifie son principe de partage.

– Il est très clair que 2/2/1 peut déboucher, si l'on continue à jouer, sur 2/2/2, 2/3/1 ou 3/2/1.
– Il est clair que chacune de ces situations donne lieu à un partage «normal» dans deux cas (2/3/1 et 3/2/1): le vainqueur a toute la mise et les deux autres n'ont rien, et «évident» dans le dernier cas (2/2/2): chacun reprend sa mise.

Le deuxième principe, implicite, est donc de considérer que lorsque les joueurs sont dans la même situation ils se partagent la mise équitablement ce qui revient pour chacun à reprendre sa mise.

Si nous considérons, alors, le 3e joueur, celui qui n'a gagné qu'une seule partie quand les deux autres en ont gagné deux:

– dans un cas il obtient 1/3 de la mise,
– dans les deux autres cas il n'obtient rien.

La méthode utilisée par la suite, telle que nous la comprenons, revient à additionner les trois gains possibles et à diviser la somme par trois, «parce qu'ils sont trois»; ... peut-on reconstituer le principe, implicite, qui la justifie?

– Dans ce premier cas il semble que l'auteur dise quelque chose comme: «il a *1/3* de la mise comme chacun des deux autres joueurs, pour la situation 2/2/2, ce qui vaut *1/9* de la mise à chacun; et il n'a que cela. Il lui revient donc *1/9* de la mise».

---

67 Le Maître paraît respecter le principe que j'utilise de «diminution» du nombre des parties entre les joueurs pour un nombre de partie jouées donné: par exemple, il envisage la situation 2/1/0 et pas les situations 1/2/0 ou 2/0/1 qui sont équivalentes, et il traite le cas 2/0/0 avant 1/1/0. Mais le fait d'envisager 2/1/1 avant 2/2/0, ce qui n'a aucune importance du point de vue de la résolution du problème, ne respecte pas ce principe en tant que principe systématique de description des situations. Il est raisonnable de considérer qu'à l'«intérieur» du principe de diminution du nombre de parties jouées, le nombre de situations qui se présentent ici (au maximum 2) ne contraint pas beaucoup à être systématique. Il n'en aurait pas été de même s'il avait traité explicitement le problème en 4 parties, ce qu'à juste raison il propose à ses auditeurs comme une simple application de sa méthode (après 3/3/2 qu'il évoque il faut envisager, en 7 parties jouées, les situations 4/3/0, 4/2/1, 3/3/1 et 3/2/2).

68 J'utilise cette représentation pour donner à voir le plus clairement possible, étant donné notre outillage cognitif actuel, l'ensemble des situations.

Comment peut être «pensé» ce passage du 1/3 au 1/9 de la mise? Il me semble que rien ne s'oppose à ce que nous fassions l'hypothèse que le schème de pensée est le suivant:

– Comme il y a trois joueurs, il y a dans chaque situation donnée trois situations possibles («à l'aventure»); pour pouvoir envisager chacune de ces situations possibles il faudrait miser trois fois, donc, proportionnellement pour une seule de ces trois situations il revient le tiers de la mise de base. Le fait que les trois situations possibles se voient en trois coups est une idée que l'on retrouve chez Cardan, dans son *De ludo aleae*, lorsqu'il évoque le «cycle» des possibilités pour un dé, où l'on peut comprendre qu'en lançant le dé 6 fois on devrait parcourir, logiquement sinon réellement, le cycle des 6 possibilités.

Le troisième principe, implicite, consiste ainsi à considérer que ce qui reviendrait à un joueur pour une situation à venir doit être divisé par trois, parce qu'il y a trois joueurs et donc trois situations à venir, pour donner ce que lui procure cette situation à venir dans le calcul de ce qui lui revient pour la situation présente.

Ce qui vient d'être calculé pour le troisième joueur peut l'être pour les deux autres qui, par exemple pour le premier joueur, dans un cas ont tout (3/2/1), dans un cas rien (2/3/1), et dans un cas 1/3 (2/2/2); mais l'auteur choisit ici de dire qu'ils leur reste 4/9 chacun car il reste 8/9 à partager à égalité d'après le premier principe puisqu'ils sont, tous les deux, dans la même situation.

Considérons alors la situation suivante: 2/1/1; celui qui a gagné 2 jeux, dans un cas il gagne tout (3/1/1), et dans deux cas il gagne *4/9* (2/2/1 ou 2/1/2); mais l'auteur s'intéresse alors aux deux autres: dans un cas rien, dans un cas *4/9* et dans le dernier cas *1/9* (par exemple, pour le deuxième joueur). Il ajoute, alors ces gains et comme ils sont trois, le tiers est ce qui revient à chacun des deux. On peut donc considérer que ce calcul est la conséquence du troisième principe dans une nouvelle version de ce principe qui additionne, explicitement, les trois revenus des trois situations possibles. Notre auteur va procéder ainsi dans tous les autres cas qu'il envisage et il dit, comme je l'ai déjà mentionné, «E sse ài buono ingiengno come dovressti avere per queste ragione che ài quie fatte dei vedere lo modo come si fanno tutte di quanti omini e di quanti giuochi diciesse[69] et encore plus explicitement, E ora è ditto in quanti modi e per quante maniere si può dire di 3 omini che giuochano a cchi prima àe vinto 3 giuochi e cche ciasschuno di loro mette su la possta. E per questa maniera dei notare che ssi fanno tutte quante diciesseno di simile grado di giuochi e cchi volesse scrivere in qua' modi dire si può non arebbe mai fine sicché tue che studi in ciò però stima bene quessti e arai notisia di ciasschuno altro in che forma ti fusse ditto. Quesste ti danno dichiaragione se ài intendimento

[69] Ce passage se trouve à la fin du premier paragraphe du folio 96r. C'est moi qui souligne en gras!

come dovressti avere avendo già studiato infine a questo passo, sicché lasserò di ciò pio non dire al prezente che cciò che è ditto basta[70]». Dans la mesure où il répète, à deux reprises et assez explicitement, que cette méthode est générale et où nous la voyons utilisée de manière systématique, je considère que nous pouvons lui attribuer ce principe général implicite (et le surnom d'Ohrigens[71]):

Principe général, implicite, d'Ohrigens: s'il y a *n* joueurs et que dans une situation donnée un joueur peut avoir dans les *n* situations possibles qui en découlent les n quantités d'argent a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n alors il lui revient, pour cette situation donnée, la quantité d'argent $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n/n$;

Il faut aussi remarquer que Ohrigens, à plusieurs reprises en dehors de la première situation traitée, refait les calculs à titre de contrôle et, on peut le supposer, d'exercice pour ses éléves, chaque fois qu'il y a deux façons de trouver le résultat, c'est-à-dire lorsque deux joueurs ont gagné le même nombre de parties.

Je donne maintenant une présentation schématique de la résolution du problème par Ohrigens en désignant par A, B et C les trois joueurs qui veulent partager la mise lorsqu'ils sont dans la situation 2/1/0:

(1) 2/2/1

3/2/1 2/3/1 2/2/2 → C: 1/3 → 1/9; → A et B: 4/9

(2) 2/1/1

3/1/1 2/2/1 2/1/2 → B ou C: (4/9,1/9,0) 5/9; 5/27; → A: 17/27

(3) 2/2/0

3/2/0 2/3/0 2/2/1 → C: 1/9 → 1/27; → A et B: 13/27

(4) 2/1/0

3/1/0 2/2/0 2/1/1 → B: (0,13/27,5/27) → 18/27 → 6/27
C: (0,1/27,5/27) → 6/27 → 2/27
A: (1,13/27,17/27) → 57/27 → 19/27

---

[70] Fin du dernier paragraphe du folio 97r.

[71] Allusion au principe de l'espérance de Huygens.

*
* *

(5) 2/0/0

3/0/0 2/1/0 2/0/1 $\longrightarrow$ B ou C: (0,6/27,2/27) $\rightarrow$ 8/27 $\rightarrow$ 8/81; $\longrightarrow$ A: 65/81

vérification:

A: (1,19/27,19/27) $\longrightarrow$ 65/27 $\longrightarrow$ 65/81

*
* *

(6) 1/1/0

2/1/0 1/2/0 1/1/1 $\longrightarrow$ A ou B: (19/27,6/27,9/27) $\rightarrow$ 34/27 $\rightarrow$ 2/3(34/237)
$\longrightarrow$ 68/81 24/81; $\longrightarrow$ C: 13/81

vérification:

C: (2/27,2/27,9/27) $\longrightarrow$ 13/27 $\longrightarrow$ 13/81

(7) 1/0/0

2/0/0 1/1/0 1/0/1 $\rightarrow$ A: (65/81,34/81,34/81) $\rightarrow$ 133/81; $\rightarrow$ 133/243; $\rightarrow$ B ou C: 55/243

vérification:

B ou C: (8/81,34/81,13/81) $\longrightarrow$ 55/81 $\longrightarrow$ 55/243

Le lecteur peut ainsi prendre la mesure de la virtuosité apparente de l'auteur, une virtuosité qui s'appuie sur les principes explicites et implicites que nous avons précédemment dégagés de leur gangue.

Une problématique historique renouvelée

En dehors des aspects techniques et méthodologiques étonnants que nous découvrons dans ces deux documents de la première moitié du XV^{e} siècle, en rupture totale avec l'historiographie du Calcul des probabilités, il est particulièrement intéressant de noter que le texte d'Ohrigens nous livre un certain nombre d'informations sur le contexte et la signification de la résolution de ce problème de partage des mises au cours du déroulement d'un jeu interrompu avant son terme normal. «E nnota bene di tutte che sono cose bellissime a ssapere ben fare[72]... E per dio nota bene tutto che sono cose d'averne onore infra tutti li maestri del mondo[73]»: notre

72 Fin du dernier paragraphe du folio 95r.

73 Fin du premier paragraphe du folio 96r.

maître d'abaque anonyme est parfaitement conscient de posséder avec la résolution de ce problème, la cohérence de sa solution et sa généralité, un savoir remarquable par sa beauté, suffisamment exceptionnel et original pour procurer à celui qui le possède une forme de reconnaissance sinon de pouvoir puisqu'il débute son exposé en disant «Nota sopra queste segrete quistione che chi appresso vedraj che sono ragione da notare e da non gittarle in dela mente di ciasschuno peroché si dîcie che si tutto mostra non sae pio. E pertanto notale e tielle in te per saperle rispondere a chi te ne adimandasse». Il est frappant et assez énigmatique d'«entendre» ce maître dire à celui qui l'«écoute» de garder ce savoir secret et que, néanmoins, cette mention et ce savoir se retrouvent sous forme écrite dans le document qui nous est parvenu. La question se pose donc de savoir quel est le statut de ce texte. Est-ce lui, le maître, qui écrit ce texte qui doit rester secret, ou bien un élève-secrétaire autorisé à le faire, ce qui revient au même, ou est-ce l'un de ses élèves, futurs maîtres d'abaques eux-mémes très probablement, qui s'autorise à le faire pour un usage personnel en transcrivant mot à mot l'exposé, intégralement mémorisé de son maître? Une issue possible et qui me paraît vraisemblable à cette contradiction apparente entre le caractère secret du sujet et son exposé dans un texte écrit est de supposer que la version écrite est à usage purement interne, qu'elle ne doit pas sortir du petit groupe des disciples du maître et que son but est de faciliter la tâche de mémorisation et d'assimilation sur un sujet particulièrement «acrobatique». Dans cette hypothèse il est incontournable d'étudier de près le contenu des pages 81 à 102 du manuscrit qui contiennent le passage sur le problème des partis, de la page 94v à la page 97v, et d'en estimer l'originalité[74] un fait remarquable est déjà la présence au sein de questions d'algèbre de ce problème résolu de manière purement arithmétique. Ce seul fait établi peut-être une relation avec le texte de Ohri qui lui propose une solution algébrique; au début du XV^{e} siècle n'y aurait-il pas une forme de «circulation» du problème des partis en tant que problème pouvant être l'occasion de manipuler l'algèbre?

Il paraît assez clair que le maître considère que ce savoir qu'il communique à ses élèves avec tant de souci pédagogique, leur procure un bien probablement monnayable dans le cadre du recrutement d'un maître où les postulants se lancent des défis; c'est peut-être ce qu'il faut comprendre lorsqu'il dit en préambule: *E pertanto notale e tielle in te per saperle rispondere a chi te ne adimandasse* car, de plus, le nombre de problèmes particuliers que la méthode permet de résoudre est infini, *si può non arebbe mai fine*[75].

---

[74] Cette partie du Ms. Urb. Lat. 291 de la Biblioteca Apostólica Varicana n'est pas pour le moment transcrite et publiée. Je ne puis que souhaiter que cela soit le projet de Raffella Franci et du Centro studi della matematica medioevale.

[75] Fin du dernier paragraphe.

Cette hypothèse paraît beaucoup plus vraisembable que celle qui verrait dans le maître d'abaque un conseiller potentiel des joueurs. Néanmoins, dans les deux cas je ne comprends pas comment le détenteur de cette solution pourrait montrer sa supériorité sans en expliciter la méthode. Je ne peux conserver, en fin de compte, qu'une seule hypothèse suffisamment réaliste pour résister à la critique: la connaissance de cette solution, étant donnée sa cohérence et sa beauté, est destinée à un usage strictement interne au groupe des disciples du Maître et des futurs disciples de ses disciples. Savoir manipuler les enchaînements de propositions nécessaires à la solution assure la fascination rationnelle du maître sur ses élèves à l'intérieur du groupe restreint (peut-être réduit à un seul) de ceux qui vont eux-mêmes devenir des maîtres d'abaque et peut contribuer fortement à assurer sa réputation à l'extérieur et à accroîte sa capacité à attirer le public potentiellement important de son école d'abaque.

Il faut noter encore, à l'appui du caractère général exceptionnel de cette solution que notre maître inconnu ne fait pas référence à un jeu particulier comme les autres auteurs du XV^{e} siècle que nous connaissons: Ohri, Calandri et Pacioli. Etant donné le niveau de généralité et de subtilité atteint par la solution de Ohrigens on peut penser que le problème est bien connu d'un certain nombre de maîtres d'abaque du début du XV^{e} siècle (ce que confirme le texte de Ohri): le problème circule, sinon des solutions. D'autre part voir apparaître ainsi, sans référence aucune au cas plus simple de deux joueurs, lui-même traité par Ohri, une solution aussi claire et aussi générale renforce cette impression que le problème ne peut qu'avoir, alors, déjà une assez longue histoire. À supposer que le texte d'Ohri, lui-même proposant une solution «correcte» si originale qu'on ne l'a jamais retrouvée[76] sous la plume de quiconque, mathématicien ou historien, jusqu'à nos jours, soit bien de la fin XVII^{e} siècle cette «longue histoire» court, au moins depuis le XIV^{e} siècle jusqu'au milieu du XVII^{e} siècle. Les découvertes successives ces dernières années par des historiennes italiennes de la présence du problème et de solutions «correctes» dans des arithmétiques commerciales dont on connaissait néanmoins l'existence sinon le contenu ne peuvent qu'encourager la recherche de nouvelles traces. De même peut-on raisonnablement imaginer, qu'ayant échappé à de multiples dégâts collatéraux, un manuscrit arabo-musulman nous livrera, un jour, une trace antérieure de ce type de problème de partage[77]. Mais le très grand intérêt de ces solutions du début du XV^{e} siècle, est surtout de permettre de reposer la question de l'originalité du phénomène d'émergence qui va se développer autour des travaux, au milieu du XVII^{e}

---

[76] Tout au moins à ma connaissance.

[77] Je suis d'autant plus porté à formuler cette hypothèse que le contexte du problème, dans le document qui est probablement le plus ancien, celui de Ohri, est celui d'un jeu d'échecs dont on sait qu'il est originaire de l'Inde mais qu'il est parvenu en Europe (probablement à la fin du XI^{e} siècle) par la Perse (au VI^{e} siècle) puis le Maghreb et la péninsule Ibérique; voir à ce sujet [Meh90] p. 116.

siècle, de Pascal, Fermat et Huygens[78]. Ainsi voit-on à quel point ce n'est pas, uniquement, le fait d'avoir une solution, même très cohérente, même «simple» et très générale, mais, aussi, un certain nombre de conditions structurelles de nature sociale qui va impulser le phénomène. En particulier l'opposition est particulièrement tranchée entre un milieu très fermé, où l'on devine que le secret freine considérablement la circulation des arguments et leur fécondité, et un milieu beaucoup plus ouvert organisé en réseau d'échange[79].

Je remercie Marcel Maarek et Pierre-Philippe Calvo qui m'ont aidé de leurs conseils dans la traduction des textes italiens.

BIBLIOGRAFÍA

[Cal82] CALANDRI, FILIPPO (1982): *Una raccolta di ragioni: dal codice L. VI. 45 della Biblioteca Comunale di Siena*, a cura e con introduzione di Daniela Santini, Quaderni del Centro studi della matematica medioevale, 4, Siena, pp. 13 e 39.

[Cou65] COUMET, ERNEST (1965): «Le problème des partis avant Pascal», *Archives internationales d'histoire des sciences*, 18/73, pp. 245-272.

[Cou70] COUMET, ERNEST (1970): «La théorie du hasard est-elle née par hasard?», *Annales: Economies, Sociétés, Civilisations*, 25 (1970), pp. 574-598.

[Fra03] FRANCI, RAFFELLA (2003): «Una soluzione esatta del problema delle parti in un manoscritto della prima meta' del quattrocento», in corso di stampa su *Il bollettino di storia delle scienze mathematiche*, (à paraître).

[Meh90] MEHL, JEAN-MICHEL (1990): *Les jeux au royaume de France, du XIIIe au début du XVIIe siècle*, Fayard, Paris.

[Meu96] MEUSNIER, NORBERT (1996): «L'émergence d'une mathématique du probable au XVIIe siècle», *Revue d'histoire des mathématiques*, 2, pp. 119-147.

[Meu03] MEUSNIER, NORBERT (2003): «Fermat et les prémices d'une mathématisation du hasard», *Actes du colloque Fermat 2001*, Toulouse (à paraître).

[Ore60] ORE, OYSTEIN (1960): «Pascal and the Invention of Probability Theory», *American Mathematical Monthly*, 67, pp. 409-419.

[Pas70] PASCAL, BLAISE (1970): *Oeuvres complètes* (tome II), texte établi, présenté et annoté par Jean Mesnard, Desclée de Brouwer.

[78] Voir [Meu96].

[79] Un sens du mot «échange» qui apparaît d'ailleurs... au XVII^{e} siècle: *communication* réciproque (*de documents, renseignements, etc.*). Dictionnaire *Le Petit Robert*, 1972, pág. 529.

[Pas98] PASCAL, BLAISE (1998): *Oeuvres complètes* (tome I), présentées, établies annotées par Michel Le Guern, Gallimard, La Pléiade, Paris.

[Tot85] TOTI RIGATELLI, LAURA (1985): «Il «problema delle parti» in manoscritti del XIV e XV secolo, dans Folkerts (Menso)», Lindgren (Uta), éds., *Mathemata. Festschrift für Helmuth Gericke*, Boethius, 12, Wiesbaden-Stuttgart: Franz Steiner Verlag, pp. 229-236.

[Tot92] TOTI RIGATELLI, LAURA (1992): «Il problema delle parti, dans Bottazini (Umberto), Freguglia (Paolo)», Toti Rigatelli (Laura), *Fonti per la storia della matematica*, Firenze: Sansoni Editore, pp. 347-351.

[Sch88] SCHNEIDER, IVO (1988): «The Market Place and Games of Chance in the Fifteenth and Sixteenth Centuries», dans Hay (Cynthia), éd., *Mathematics from Manuscript to Print. 1300-1600*, Oxford: Clarendon Press, pp. 220-235.

ANNEXE I: Extraits du Codice L.VI.45 de la Biblioteca Communale de Sienne

<81r> (12) Dua fanno alla palla grossa e fanno . che chi à prima sei chacie vincca il giuoco Ora viene per chaso che uno di loro . n'aveva vinte . 4 . et l'altro naveva vinte . 3 . et quando sono chosì la palla si forò in modo che non potettono finire il guocho ma rimasono d'achordo che ognuno avessi quanto gli si conveniva . Vo sapere quanta tocherà a cascuno havendo posto su . 3 £ per uno : Dassi 2 modi alla detta ragone 1'uno . / è / di fare la ragone in su quello che è fatto et l'altro in su quello che ss'à a fare El primo modo si pigla così che s'à a vedere . quan-

<81v> te chacie ragonevolmente e possono fare tutta a dua // El secondo che si pigla in sulle chacie che ss'ànno a fare s'à . a vedere quante chacie e gl'àno a Lare caschuno di loro ad avere il guocho . Dove che sel primo . ha . 4 . cacie . gli resta ad fare dua cacie ad avere il giuoco El secondo che à . 3 cacie gli resta ad fare . 3 . cacie adunque il secondo . / à / a durare un tanto et mezzo fatica del primo E però il primo arà a trarre un tanto et mezo del secondo : che ogni volta chel primo trarrà . 3 . il secondo trarrà . 2 . Ora dí . dua ànno a dividere . 120 S el primo . à . a trarre . 3 . El secondo . dua Vo sapere Che tocherà per uno E faccendo troverrai chel primo arà . 72 S El secondo . 48 S ma perchè e gl'è giuoco . di fortuna non si risponde absolutamente che questo sia la verità apunto .

[......]

<57v> (43) Tre fanno a balestrare 3 D in questo modo che quello che prima / à / 3 cholpi ghuadagni e detti 3 D E balestrando . Il primo . n'à fatti questa . 2 el secondo uno El terzo non n'à cholpo nessuno viene per chaso che si rompe un balestro e sono dachordo che ognuno pigli quanto si gli chonviene . Vo sapere Quanto tocherà a ciaschuno : dico chosi ch'è bene sia chaso di fortuna si pigla in . 2 . modi . l'uno / è / di piglare quello ànno facto e

<98r> Il'altro . è / // di piglare quello ànno a fare e quale sia il meglo non / è diterminato e però Quale de' dua si pigli non porta . Adunque piglereno quello che ss'à a ffare et direno chosì e più cholpi che possino fare chostoro Quanti saranno : saranno . 7 . adunque sel primo n'à dua / à 2/7 del guocho et il seconde il 1/7 che tramendua ànno e 3/7 la quale parte pigla di 3 D et distribuiscigli nel primo et nel secondo dipoi . e 4/7 che rimane ognuno divida per 1/3 E troverrai che al primo tocherà 1 3/7 e al secondo . uno . e al terzo 4/7.

ANNEXE II: Extrait du Codice Magliabechiano CL.XI.120 de la Biblioteca Nazionale de Florence

<c.29r.> *Due huomini giuochano a schacchi e fano d'uno ducato a 3 giuochi, viene caso ch'el primo vince 2 giuochi al 2º, adomando n non giuocando più quanto arà ad avere vinto lo primo al 2º del lo ducato; pone ch'el primo vincesse al 2º 1 c. al primo giuocho, tu dei vedere che nel 2º giuocho eli de' vincere tanto per ragione quanto nel primo, adunque arà vinto una altra c., e cossì ora à d'avere vinto in 2 giuochi 2 c., el 2º ch'à perduto ora arà ad avere in sul suo ducato 1 duc. meno 2 c. E' da sapere che questo ch'à perduto 2 giuochi che se lli vincesse ao compagno 2 altri giuochi eli non li arebbe vinto alcuna cosa l'uno a l'altro, ora pgnamo ch'el 2º comincia a vincere al primo un giuoco, dico che li vince in questo giuocho 1 duc. meno 2 c. ch'avea vinto il primo e la ragione si è questa che se quello che avea vinto in prima 2 giuochi avesse vinto ancora lo 3º giuocho eli arebbe vinto al primo tutta la altra parte del suo ducato e così per conveso lo 2º vinto al primo, cioè 1 duc. meno 2 c., ora cava 1 duc. meno 2 c. de la partita ch'el 2º avea vinto al 2º cioè 2 c., rimarrà allo primo ancora 4 c. di vincita men 2 duc., al 2º che si comincia a riscuotere arà ad avere in sul giuocho 2 duc. men 4 c., ora guarda per lo 1º ch'à vinto 2 giuochi che s'el 2º ch'à vinto li du' giochi vincesse lo 3º giuocho non resterebbe che non vincesse tutta la ragione ch'el 1º à in su dio ducato e se 'l primo vincesse questo 3º giuocho elli vincerebbe 2 duc. men 4 c. e così de' fare lo 2º al primo, ora pognamo ch'el 2º vince lo 2º giuocho adunque viene eli ad avere vinto al primo 2 duc. men 4 c. ed elli si de' trovare riscosso di quello ch'el primo li avea vinto e però che cosí à vinto 2 giuochi l'uno come lo altro, ora guarda quanto lo 2º vince al primo lo 2º giuocho elli vince 2 duc. men 4 c., ora dobbiamo giugere 1 duc. a ciascuna parte e aremo dal'una parte 4 c. e dal'altra 3 duc. men* <c.29v> *4 c., ancora giungi 4 c. a ciascuna parte e arai 8 c. equale a 6 duc., ora parte lo numero per le c., cioè 3 duc. per 8 che ne viene 3/8 e tanto vale la c., cioè li d. ch'el primo vince al primo giuocho e al 2º giuocho vince ancora 3/8 di ducato che vale 6/8, cioè 3/4 e tanto à d'avere vinto el primo non giuorando più che 2 giuochi e così adopra nele simili ragioni.*

Due homini giuochano a schacchi a 4 giuochi uno duc., ora viene caso ch'el primo vince lo primo giuocho el 2º el 3º e partesi da giuoco sanza giuocare più di volontà del suo compagno, idomando ciò che li da avere vinto. Pone che li vincesse al primo giuocho 1 c., ora al 2º giuoco à da vincere 1 c. e 1/3 e però che non restava a vincere se non 3 giuochi, al 3º giuocho vili vinse 1 c. 1/2 e peró che li non restava vinto lo 2º giuocho se non 2 giuochi a vincere tutta la partita, si che li arà vinto 3 c. e 5/6 e cosí dovrebbe eli avere in sul giuocho 2 duc. men 3 c. e 5/6.

ANNEXE III: Extrait du manuscrit Urb.Lat.291 de la Biblioteca Apostolica Vaticana

<c.94v> *N*ota sopra queste segrete quistione che qui appresso vedraj che sono ragione da notare e da non gittarle in dela mente di ciasschuno peroché si dicie che chi tutto mostra non sae pio. E pertanto notale e tielle in te per saperle rispondere a chi te ne adimandasse.

*S*e ti fusse ditto e sono tre omini che giuochano e dicha a che giuoco si volgla, e giuocano a ttre giuochi e ànno misso in tra loro tre soldi 2, e chi prima arae tre giuochi tira li ditti soldi 2, di che ciasschuno misse denari 8. Ora l'uno àe due giuochi, l'autro àe uno giuocho e l'autro non nne [àe] nessuno giuocho, adimando non giocando pio quanto ne viene a cciasschuno. Sappi che questa ragione non si può dichiarare per sé sola se prima non ne fai alquante che sia li giuochi vinti in altra forma e qui dirò appresso di tutte.

*D*iremo prima quessta, e dicie che li due ànno due giuochi per omo e l'autro n'àe uno giuocho andando che chi prima àe 3 giuochi vincie la posta. Quanto ne viene per omo, essendo ha possta fornita di comuno di tutti e ttre. Fae cosie che dicii: se quello ch'àe un giuocho vinciesse un autro giuocho sarebbe al pari con quelli altri due e arebbe lo terso di tutta la possta. E sse vincesse uno di quelli che ànno due giuochi per omo non arebbe quello ch'àe un giuocho niente, sicché quello terso ne va di chomuno in quella volta. Adunqua è comuno quello terso che è lo 1/9 di ciasschuno, sicché quello che non àe se non uno giuocho, ne de' avere di quella possta lo 1/9. Sicché <c.95r> essendo la possta comuna denari 24 n'arae quello ch'àe uno giuocho lo 1/9, che è 2 2/3, e cciasschuno di quelli che aveano due giuochi per omo denno avere li 4/9 che sono denari 10 2/3 per omo. E quessta è la prima notandi.

*O*ra fae se l'uno àe vinto due giuochi e l'autri n'ànno vinto uno per omo e non giuocano pio, quanto ne viene per omo. Quessta dei fare cosie: se quello ch'àe due giuochi vinciesse l'autro giuocho niuno di que' due arebbono niente, e sse uno di que' due che ànno un giuocho per omo vinciesse lo giuocho, adunqua quello che vinciesse arebbe li 4/9 di tutta la possta. Sicché quello che prima non arebbe nulla vinciendo quello ch'àe li due giuochi e arebbe 1/9, vinciendo lo compagno ch'àe un giuocho come lui e quello che vincie ch'àe un giuocho andrebbe a due giuochi e arebbe li 4/9, sicché a quello che ressterebbe in del'uno giuocho ne toccherebbe allora 1/9. E ora dei dire cosie che qualsisia di quelli due che ànno uno giuocho per omo stae in questa ventura o d'avere niente o li 4/9 de la possta o l'uno novino. Sicché aggiungi insieme nulla con 4/9 et con 1/9 e ffanno 5/9 che perché sono 3 omini ne viene lo terso per omo, cioè li 5/27 di tutta la possta. Sicché adunqua quelli due che ànno uno giuocho per omo, ciasschuno di loro de' avere li 5/27 de la possta e quello che aveva due gluochi de' avere li 17/27 de la possta. E ài lo proposto. E nnota bene di tutto.

Seguita se diciesse che li due avesseno due giuochi ciasschuno e l'autro non avesse giuocho niuno che ne viene per omo di tutta la possta. Quessta è tossto fatta, che sse uno di que' due che ànno due giuochi per omo vinciesse arebbe tutto, e quello che non à niuno giuocho non arebbe niente. E sse quello che non à giuocho niuno vinciesse uno giuocho adunqua già arebbe uno giuocho e l'atri due ànno due giuochi per omo, cie ne verrebbe a quello che avesse uno giuocho lo 1/9 di tutta la possta e a que' che n'ànno due per omo, a ciasschuno li 4/9, siccome già di sopra fue ditto. Sicché adunqua quello 1/9 toccha per terso a cciasschuno, che è 1/27. Sicché a quello che non à niuno giuocho toccha 1/27 e algl' autri che ànno ciasschuno due giuochi toccha per omo li 13/27 di tutta la possta. E ài lo propossto. E nnota bene di tutte che sono cose bellissime a ssapere ben fare.

<c.95v> Ancho può dire che l'uno àe 2 giuochi, l'autro n'àe uno, l'autro non àe nessuno, adimando di tutta la possta quanta ne viene per omo. Fa ccossie: che dichi se quello ch'àe due giuochi vincie l'autro giuocho, ello tira tutto. E sse quello ch'àe uno giuocho vinciesse quello giuocho n'arebbe due giuochi e verrebbe, come ài veduto di sopra, che arebbe li 13/27 per uno quelli due che arebbeno ora due giuochi per omo. E sse quello che non àe giuocho nessuno vinciesse lui quello giuocho arebbe uno giuocho, sicché come ditto è di sopra ne verrebbe a quelli che ora arebbeno uno giuocho per uno per omo ne verrebbe a que' due li 5/27 di tutta la possta. Sicché fae ora quelle ragione tue vuoi, o quella di quello ch'àe uno giuocho o quella di quello non n'ae niuno. E diciamo di quello ch'àe uno giuocho, che se quello che n'àe due giuochi vinciesse l'autro giuocho, dunqua quello ch'àe uno giuocho non n'arebbe niente, e sse lui vinciesse quel giuocho arebbe due giuochi di che li toccherebbe li 13/27 di tutta la possta. E sse quello che non n'àe giuocho niuno vinciesse, quessto che n'àe un giuocho li toccherebbe li 5/27. Adunqua a questo ch'àe uno giuocho tocca lo 1/3 di niente agiunto a 13/27 e con 5/27 che fae 18/27 che lo 1/3 <è>6/27, sicché a quello ch' àe un giuocho toccha li 6/27 di tutta la possta. E ora vedi per quello che n'àe giuocho nullo, che se quello da due giuochi vincie, ello non n'arae niente, e sse quello ch'àe un giuocho vinciesse, ello n'arebbe 1/27, e sse llui proprio vinciesse arebbe li 5/27, sicché de' avere lo 1/3 e di giunto niente con 5/27 e con 1/27, che è lo 1/2 apunto 2/27, sicché quelo che àe uno giuocho de avere li 6/27 di tutta la possta e quello che non àe giuocho niuno de' avere li 2/27. A ora per trovare che de' avere quello ch'àe li due giuochi e ttue di' cosie: se ello vincie quello giuocho tira tutta la possta, e sse lo vincie quello che n'àe uno giuocho ne tira li 13/27, e sse lo vincie quello che non àe giuocho niuno allora quello da due giuochi n'ae li 17/27, sicché aggiungi insieme tutto con 13/27 e con 17 /27 e ffae 57/27, di che lo terso si è 19/27, sicché li tocca li 19/27. E a quello di uno giuocho ne toccha 6/27 e a quello che non àe giuocho niuno ne toocha li 2/27 di tutta la possta fornita per loro tre. S'intenda senpre e ài la proposta. E nnota bene di tutto.

Mancha ora se diciesse che l'uno àe due giuochi e lgl'autri due non ànno giuoco nessuno, quanto ne viene per omo. Quessta si congnosscie per la ditta di sopra, e diremo cosie: se quello che àe li due giuochi vinciesse l'autro giuocho arebbe tutta la possta e quelli autri arebbeno nulla. Ora se uno di quelli due che non ànno giuocho niuno vincie quello giuocho <c.96r> sie sarebbe ha ragione già detta di sopra, che arebbe ora uno giuocho e toccherebbeli li 6/27 di tutta la possta e al'autro li 2/27. Sicché ora vedi che stanno ala ventura que' due che non ànno giuocho niuno o d'avere niente o l'uno avere li 6/27 o li 2/27, sicché giungi insieme niente et 6/27 et 2/27 e ffae 8/27, sicché lo terso di 8/27 che è 8/81 li toccha per omo a quelli che non ànno giuocho nullo, sicché in tra loro due toccha li 16/81, l'avanso infine in tutta la possta sie 65/81 che tanto toccha a quello ch' avea due giuochi. Ora vediamo se è ccosie che li tocchi li 65/81, e diciamo se ne due giuochi ello vincie arae tutta la possta, e sse vincie uno di quelli altri due che non ànno giuocho niuno n'arae 19/27, e ccosie se vinciesse l'autro di que' due, quali di lo due vincie àe li 19/27. Sicché per ciaschuno di que' due che vinciesse arebbe 19/27 e vincendo lui arebbe tutto, sicché giungi insieme tutto e due volte 19/27 e ffae 65/27, che ne li toccha lo terso che è 65/81. Sicché bene vedi chiaro che a quello ch'àe due giuochi li toccha li 65/81 di tutta la possta, e a quelli che non ànno giuocho niuno ne toccha li 16/81 tra loro due che è per uno 8/81. E ài lo proposto. E nnota bene dele simile. E sse ài buono ingieugno come dovressti avere per queste ragione che ài quie fatte dei vedere lo modo come si fanno tutte di quanti omini e di quanti giuochi diciesse. E per dio nota bene tutto che sono cose d'averne onore infra tutti li maestri del mondo.

Nota cie le sopradditte ragione si fanno che senpre si cominciano a ffare da quelle che sono pio inzerrte ala liviaticha de giuochi che ànno conpossti. Sicché se dicie a quattro giuochi e ttue metti che tutti gl'omini abiano tre giuochi e uno omo abbia due giuochi, sicché uno meno di tutti, de mettere che abiano 3 giuochi e quello uno abbia due giuochi, e ccosie va poi digradando sicchome vedi digradati li sopraditti sicché vengni asserire a quello che tti fie proposto. E nnota bene.

<Nota a margine> *A quesste ragione di tre che fanno a tre giuochi ne mancha ancho due modi che sono scritte inansi a carte 97.*

<c.97r> Ale ragione de' tre omini che giuochano a ttre giuochi manca ancho due modi, cioè quessto sie l'uno di que' due modi, che sse li due avesseno ciasschuno uno giuocho e ll'autro non n'avesse niuno. Adimando quanto ne viene per omo. Fassi cosie: che se uno di que' due che ànno uno giuocho per omo vincie 1'autro giuocho che arebbe due giuochi e verrebeli come dicie in dele passate li 19/27, sicché a quelli che ànno uno giuocho per omo quali di loro vinciesse un autro giuocho verebbe li 19/27 di tutta la possta e 1'autro n'arebbe li 6/27 e quello che non n'àe gioucho niuno n'arebbe li 2/27. E sse quello che non n'ae giuocho niuno vinciesse quello giuocho lui, ciasschuno di loro arebbe lo terso di tutta la possta. Sicché vedi ora chiaramente che ciasschuno di que' due che ànno un giuocho per omo stanno in ventura d'avere o li 19/27 o li 6/27 o li 9/27, sicché lo terso di questa ventura ne viene per omo, cioè li 2/3 di tutta la dicta ventura infra loro due, sicché aggiunti

insieme 19/27 con 6/27 e ccon 9/27 fanno 34/27 che li 2/3 sono 68/81, sicché a quelli due ne tocca 68/81 che viene per uno 34/81. Adunqua dirai che a quelli che ànno uno giuocho tocca di tutta la possta per omo li 34/81, lo ressto che sono 13/81 tocca a quello che non àe giuocho nullo. E farola per vedere se cossì è, e diciamo cosie se uno di que' due vincie, a llui che non àe giuocho li toccherae li 2/27 di tutta la possta e ssono due quelli per chi li può toccare li 2/27, sicché in due modi li può toccare li 2/27, e sse ello vincie ne li può toccare li 9, sicché li tocca lo terso di due volte 2/27 e di una volta li 9/27 che è lo 1/3 di tutti li 13/81 di tutta la possta. Peroché aggiunti insieme 2/27 e 2/27 con 9/27 fanno 13/27 che è lo terso 13/81 e ài che a quelli che ànno un giuocho per omo toccha li 31/81 per omo di tutta la possta, e a quello che non n'àe giuocho niuno tocca li 13/81. E ài la proposta.

L'autro di que' due modi che mancano di che già dittone l'uno resta a dire quessto: se l'uno di loro avesse uno giuocho e gl'autri due non n'avesse giuocho niuno per omo, quanto ne viene per omo. Questa si congnosscie per la ditta di sopra, cioè se volgliamo vedere quanto ne viene a quello che àe uno giuocho e ttue de dire cosie: se quello che àe uno giuocho vince un autro giuocho arae due giuochi e quegl'autri nonniuno. Adunqua ne verrebbe allora a quello che avesse li due giuochi li 65/81 come arrieto appare unde dicie di tale ragione a ccarte 95. Sicché quelli che non ànno giuocho niuno arebbeno li 8/81 per omo. E sse quello giuocho lo vinciesse uno di que' due che non ànno giuocho niuno, allora sarebbe la ragione come la ditta di sopra che li due arebbeno un giuocho per omo e l'autro niuno e verrebene per omo a que' che ànno un giuocho per omo come ditto in quella, li 34/81 e a quello che non à giuocho li 13/81. Sicché due sono quelli per li quali ne provenne ventura a quello che àe un giuocho di toccarli li 34/81 di tutta la possta, e sse ello solo vinciesse quello giuocho arebbe li 65/81, adunqua de' avere lo 1/3 di giunto 65/81 con due volte 35/81 che è tutta la somma 133/81, che per lo 1/3 li viene 133/243, sicché a quello che àe uno giuocho toccha li 133/243 di tutta la possta e agl'autri due l'avanso per metà, che è 55/243 per omo. Ora falla per vedere se ssta cosie quanto ne viene per omo a ciasschuno di que' due che non ànno giuocho niuno, e di' cosie: vedi che se quello che àe uno giuocho vincie ne viene a uno di que' due che non ànno niuno giuocho li 8/81 di tutta la posta e sse l'uno di loro due lo vinciesse quello giuocho l'autro arebbe li 13/81 e sse quell'autro lo vinciesse arebbe li 35/81, sicché ciasschuno di que' due che non ànno giuocho nullo stae in ventura o d'avere li 8/81 o li 34/81 o li 13/81. Sicché aggiunti insieme fanno 55/81 che lo terso ne viene a ciasschuno di que' due che non ànno giuocho niuno, che è li 55/243. Sicché ben stae come fatto è la proposta. E nnota bene di tutto. E ora è ditto in quanti modi e per quante maniere si può dire di 3 omini che giuochano a cchi prima àe vinto 3 giuochi e cche ciasschuno di loro mette su la possta. E per questa maniera dei notare che ssi fanno tutte quante diciesseno di simile grado di giuochi e cchi volesse scrivere in qua' modi dire si può non arebbe mai fine sicché tue che studi in ciò però stima bene quessti e arai notisia di ciasschuno altro in che forma ti fusse ditto. Quesste ti danno dichiaragione se ài intendimento come dovressti avere avendo già studiato infine a questo passo, sicché lasserò di ciò pio non dire al prezente che cciò che è ditto basta. E nnota bene di tutto ciò che è ditto di sopra.

CAPÍTULO 2

17th Century Contributions to Actuarial Theory and Financial Mathematics

EBERHARD KNOBLOCH
Universidad de Berlín

Introduction

Leibniz was the antithesis of the cloistered scholar. He occupied himself with problems of great public interest:

1. Insurance coverage.
2. Justice in financial operations.
3. Demographic evolution.
4. Old-age pensions.
5. Public indebtedness.

Leibniz was a practical philosopher who devoted his legal knowledge and his mathematical competence to the service of the «commune bonum,» or «public welfare».

I will discuss the following five aspects of this service:

1. The economy and science: mathematics as a cultural force.
2. Negotium mathematici iuris: mathematics as a legal force.
3. Calculus politicus: demography.

4. Life annuities: mathematics as a political force.
5. Public indebtedness.
Epilogue

The economy and science: mathematics as a cultural force

«Hence the whole state is so to speak a ship, which is exposed to many storms and misfortunes. For that reason it is unjust that a misfortune should affect only a small number of people while the rest are not affected.»[1]

Leibnz's leading idea was public welfare. In his memoranda for the Hannoverian duke John Frederick, for the Brandenburg elector Frederick III in Berlin, and for the German emperor Leopold in Vienna, he emphasized the need for the creation of a system of public insurance in the interest of a flourishing community,[2] and thus in the interest of all, including the sovereign. Its purpose was to protect the individual citizen against damages, particularly those caused by fire or water, «because,» he added, «one cannot demand something from people which they do not have.»[3]

«One of the most useful things for the benefit of the country and of the people would be a reliable institution for the protection against damages caused by fire, because in the meantime one has found excellent means against that based on machines and on a mathematical foundation.»[4] «Similarly, it would be necessary to establish an institution against damages caused by water … To that important end one has but to correctly use geometry. Indeed, now the art of the spirit level has been much advanced.»[5] Leibniz added: «Though that is not sufficiently well known»: Mathematics is a cultural force which preserves culture. Indeed according to Vitruvius, the philosopher Aristippus justly deduced the existence of men from mathematical figures drawn in the sand of a beach: «Let us have new hope because I see the traces of men.»[6]

Leibniz admonished the sovereigns to use only means answering the purpose, and that for reasons of credibility: «Indeed, credibility is one of the most important things which has to be looked for and to be preserved. Sometimes it has to be held in higher esteem than cash in hand.»[7] He suggested that the surplus be deposited in

[1] LEIBNIZ (2000), 13.

[2] LEIBNIZ (2000), nos. I.1; I.5; I.2; I.3; I.4.

[3] LEIBNIZ (2000), 13.

[4] LEIBNIZ (2000), 25.

[5] LEIBNIZ (2000), 25.

[6] VITRUV, *De architectura*, book 6, preface.

[7] LEIBNIZ (2000), 17f.

the cash box of the society, that is, of the Academy of Sciences –an institution he intended to establish at that time– whose purpose was to be the promotion of public welfare. He wanted to charge it with the administration of its affairs and those of its collaborators. For Leibniz, the economy and science were dependent on each other as spheres of a community.

Negotium mathematici iuris: mathematics as a legal force

How should one calculate the current value of a sum of money which is to be paid in the future? This is a problem which concerns Law, Politics, and Mathematics. The rebate must be determined.

None of these three disciplines can decide this question by itself. The just value must favor neither the debtor nor the creditor. It must conciliate the interests within the framework of commercial law and valid law of contract:

1. No composite interest.
2. The legal rate of interest is 5%.

According to civil law the following principle was valid:

Somebody who does not pay cash but pays later, pays less at that moment.

The legitimate rebate was called «interusurium,» «interest accruing in the meantime.» This term was not defined. There was no explanation of how to calculate it.

For Leibniz, there were three fundamental applications of this problematic notion:

1. Restitution of debts.
2. Sales by auctions.
3. Various kinds of insurance (old-age-insurance, etc.).

In his writings there are three ways of calculating this rebate: He found the correct solution in a number of steps and discussed it with several correspondents, including Christoph Pfautz and Johann Jacob Ferguson. This is a crucial problem for our subject because Leibniz used this rebate in order to calculate the value of a pension.

First solution: Carpzov

In the middle of the 17^{th} century the famous Saxonian jurist Benedict Capzov had claimed that the rebate had to be calculated on the basis of the interest on the money which the buyer had not yet paid at the beginning of each year. When Leibniz examined this practice the result was destructive. Carpzov's scheme implied absurd consequences:

The interest on the outstanding payments could be higher than the money paid in cash. In such a case the bidder had paid less than nothing.[8]

Leibniz was astonished that Carpzov believed to have eliminated every doubt of the reader. He added: The Saxonian jurists were not sufficiently experienced in the domain of a mathematician of law (negotium matematici iuris).[9] The first solution favored the person who paid cash.

Second solution: Jurists (popular calculation)

Leibniz defined the interest accruing in the meantime so that it provided —together with the current value— the promised sum.

The simple «interest accruing in the meantime» concerned the current value of a single sum, while the compound «interest accruing in the meantime» concerned the current values of several sums which had to be paid at different times, as in the case of pensions:

interest accruing in the meantime

simple | compound

Compound interest was forbidden by law. Hence Leibniz thought initially that he could not apply it in this case.

Let p be the sum of the lent money, let a be the number of years after which the sum has to be repaid, let i be the legal rate of interest, and x the current value looked for, $v = \frac{100}{i}\cdot$ In this case the following linear formula must be used:[10]

$$x = p\,\frac{v}{v+a}$$

Third solution: The exact calculations of the merchants

As Leibniz himself avowed, the second solution also implied absurd consequences when he wanted to calculate the purchase price distributed over 40 years. The second method favors the person who does not pay cash but by installments, the debtor rather than the creditor.

The third solution provides the just value, namely, that given by the multiplicative formula[11]

---

[8] LEIBNIZ (2000), nos. II.2, II.10, II.11, II.12.

[9] LEIBNIZ (2000), 46f.

[10] LEIBNIZ (2000), 130f.

[11] LEIBNIZ (2000), 130f.

$$x = p(v/v + 1)a$$

Leibniz deduced it in three ways:

1. as the sum of the infinite series[12]

$$1*\frac{p}{v^0} - \frac{a}{1*v^1}p + \frac{a(a+1)}{1*2}\frac{p}{v^2} - \frac{a(a+1)(a+2)}{1*2*3}\frac{p}{v^3} \pm \cdots$$

2. by stepwise calculating the infinite number of mutual virtual arguments, of anticipation and compensation:[13]

$$\frac{v}{v+1} = \frac{20}{21} = 1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} \pm \cdots$$

Here debtor and creditor are subject to a potentially infinite mechanism of rebates. Leibniz told Pfautz that he was not able either to find or to demonstrate the foundation of the calculation, that is, the proportion

$$\frac{v}{v+1} = 20:21 = x:p,$$

without the use of infinite series.[14]

3. by inverting the formula of compound interest:[15]

On condition that $\left(\frac{v+1}{v}\right)^a = p$ we get $x = p\left(\frac{v}{v+1}\right)^a$.

This method does not reveal why the objection to the application of compound interest is not justified here:[16]

> «One can claim interest on interest paid before the date agreed upon, that is, prematurely. One cannot claim interest on interest which the debtor did not pay punctually (prohibition of compound interest).»

Political calculation; demography

Leibniz invariably underlined the importance of statistics relating to the country and the people for the sake of good governance of the state. He called it calculus politi-

[12] LEIBNIZ (2000), 120-125, 360f., 368f.
[13] LEIBNIZ (2000), 266f., 278f.
[14] LEIBNIZ (2000), 220f.
[15] LEIBNIZ (2000), 92f.
[16] KNOBLOCH (1999), 548; LEIBNIZ (2000), 242f.

cus, political calculation.[17] This notion corresponded to the «political arithmetic» of some of his contemporaries, such as the English demographers William Petty (1623-1687) and John Graunt (1620-1674).

Leibniz cites their publications as well as the publications of the Dutchmen Jan de Witt (1625-1672) and Jan Hudde (1640-1704), and of the Englishman Edmond Halley (1656-1743). Thus his demographical interests represented a European interest.

In 1682 he enumerated 56 questions relevant to these interests.[18] He asked for

1. the age at which people tend to suffer from diseases,
2. the number of children who reach adulthood,
3. the mean duration of human life,
4. the increase and decrease of the number of humans,
5. the value of life annuities, etc.

These considerations were based on experience; they were uncertain. He himself explicitly preferred general considerations, which were not based on mortality tables. He preferred hypothetical considerations in order to calculate life expectancy and the value of life annuities.

Leibniz was a pioneer of mathematical modeling of reality and was conscious of working with strongly simplifying hypotheses. He may be said to have been an extreme simplifier.

His certain hypotheses were nearly always the following:[19]

Hyp. 1 All people are equally vital.
Hyp. 2 Every age is equally fatal.
Hyp. 3 The limit of human life is 80 (70, 81) years.

Sometimes Leibniz chose 70 years. Sometimes he assumed that the 80th year might be completed and at other times he assumed that it could not be completed. The duration of real life was but a special case of a finite number of possible durations. Human life was subject to an order of mortality and to random events; it was an image of the Divine Order.

Leibniz thinks that chance is but ignorance of the chain of causes which depends on Providence. It is true that human destiny depends on Providence. Leibniz conciliates the role of Providence with equal probability of individual destinies: the risk of dying is always the same for all.[20]

---

[17] LEIBNIZ (2000), no. III.15.

[18] LEIBNIZ (2000), no. III.15.

[19] LEIBNIZ (2000), 416-419, 472f., 448f.

[20] ROHRBASSER & VÉRON (2001), 88.

Leibniz assumes a stationary population: the total number of people remains unchanged. The number of people who are born is the same as the number of those who die.

He deduces formulae for the mean duration of life of individuals or of groups of persons of an arbitrary age.[21]

These assumed hypotheses are crucial for such a calculation. If one changes them, then one obtains other results.

Hence these calculations include three results:

1. a simple and original formalization of the expectation of life of individuals and associations,
2. the basis of a rigorous analysis of mortality in terms of probability,
3. a philosophical approach to problems such as unity and multiplicity, certainty and probability, necessity and contingency, time and eternity, determinism and liberty.[22]

Life annuities: mathematics as a political force

What is the just purchase price of a life annuity? When studying this question Leibniz underlined the importance of demography.

The duration of life of a human being can only be revealed by a prophet, by a Divine Revelation.[23] As an actuary Leibniz must use the calculus of probabilities in order to attribute a presumable duration to life annuities and thus a just purchase price. In spite of the uncertainty a certain sure and mathematical estimation of the probability is possible:[24]

«certa quaedam et mathematica probabilitatis aestimatio»

He calculated the purchase price of a pension by means of his operation of rebate. It was a matter of the current values of payments made at different times for a common date of purchase. Let a be the number of years, p the purchase price, $v = \frac{100}{i}$, i the rate of interest, and x the annual pension. Leibniz deduced the formula

$$x = (1 - (\mathrm{v}/\mathrm{v} + 1)^{\mathrm{a}})\, vp$$

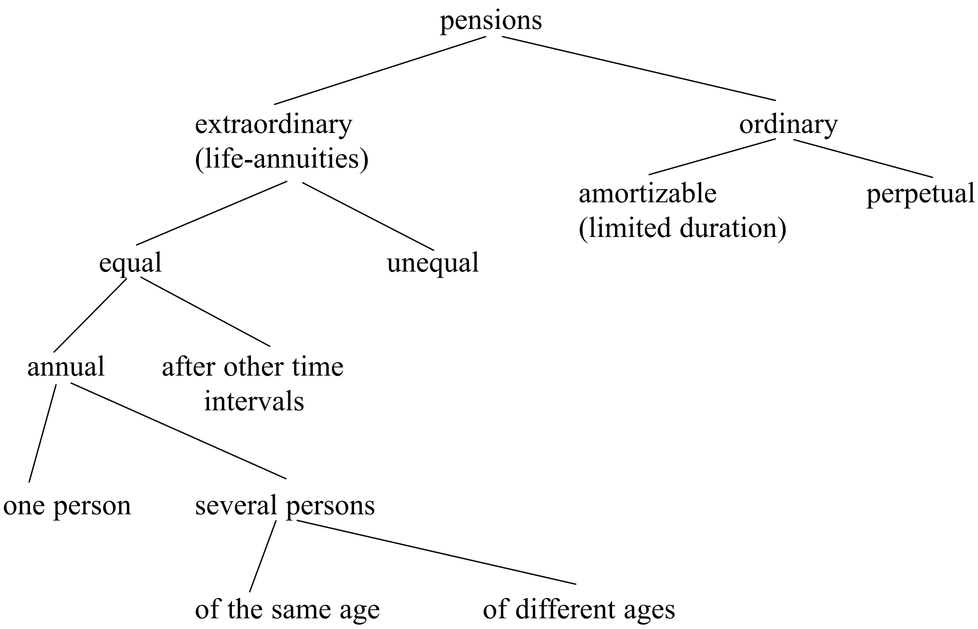
[21] Leibniz (2000), 466f., 494f., 498f.

[22] Rohrbasser & Véron (2001), 88.

[23] Leibniz (2000), 414-419.

[24] Leibniz (2000), 446f.; see also Leibniz (2000), 416f.

four times[25] without publishing anything regarding his ample consideration of life-annuities. The end of such calculations is the transformation of these pensions into ordinary pensions, that is, Leibniz used the following division:



The diagram illustrates the Leibnizian method: First, he presupposes that as many quantities as possible are constant and equal:

1. The pensions are always equal.
2. The payments are made after one year.
3. The money is given to one person.
4. If it is a matter of several persons, these persons are of the same age.

He generalizes these conditions stepwise:

1. The pensions are unequal.
2. The time intervals between the payments are shorter than one year.
3. The money is given to associations with members who might be of different ages.

He carried out long and complicated calculations pertaining to pensions being unequal at different times. He called life annuities of associations of men of different ages the apogee of this study (huius inquisitionis fastigium)[26] but did not publish anything relating to these results.

---

25 LEIBNIZ (2000), nos. II.10, II.11, II.12, III.17.

26 LEIBNIZ (2000), 468f.

In order to calculate the just value of the purchase price of an extraordinary pension, that is, of a life annuity, Leibniz had to transform it into an ordinary pension, or a pension limited in time. In other words, he had to calculate the expectation of life of an individual or of associations of persons.

The expectation of life defines the presumed life span of a single person or of an association of persons. The presumaed lifetime defines the duration of payments of the life annuity.

But how could Leibniz determine this expectation of life? We know that he did not rely on mortality tables. He consciously wanted to avoid accidental circumstances of reality in order to make possible an exact calculation based on certain hypotheses.

I would like to discuss the problem of associations. We will see that Leibniz's approach was fundamentally based on combinatorics: He enumerates the possible cases. Their completeness is guaranteed by a table ordered according to the possible cases.

In order to present the relevant details we must introduce two Leibnizian definitions:[27]

Def. 1 The life span of an association is the upper limit of the individual life spans of its members: an association survives up to the death of its last member.

Def. 2 The presumed life span of an association of n arbitrary persons is the arithmetical mean of the life spans of n-tuples.

Leibniz determined the life expectations of a group of persons of the same age as well as those of a group of persons of different ages. His hypothesis 2 (every year is equally fatal) implies that exactly one person dies at every age:

One of n persons lives	0 years
Another	1 year
Still another	2 years
The nth person	$n-1$ years

Finally, in order to facilitate his task, Leibniz only considers groups of persons consisting of no more than 81 persons. That is, according to hypothesis 3,

$$n - 1 = 80 \text{ or } n = 81.$$

Even if n should be larger, all persons must have died after 80 years.

Let us consider associations of several persons, for example of 2 or 3. As noted, Leibniz's approach is based on the enumeration of cases. The presupposed conditions are decisive:

[27] LEIBNIZ (2000), nos. III.9, III.11.

First case[28]

1. Let a (75) be the same age of a group of n (6) persons.
2. All n persons have different life spans (0, 1, …, $n - 1$ years of life).
3. Let $x = 80$ years be the maximal life span.
4. Leibniz needs four steps in order to deduce the presumed life span of such an association:
   - 4.1. He looks for all possible combinations of k persons (of k-tuples).
   - 4.2. He determines the life spans of the combinations (pairs, triples, …, n-tuples).
   - 4.3. He calculates the total number of years of the life spans.
   - 4.4. He calculates the presumed life span of k persons.

Let us solve these four problems.

• The possible *k*-tuples

To facilitate our task, we assume that $k = 3$ and that the total number of persons is 6. Let the persons be A, B, C, D, E, F.

Hence we have the following triples:[29]

ABC	ABD	ABE	ABF
	ACD	ACE	ADF
		ADE	ADF
			AEF
	BCD	BCE	BCF
		BDE	BDF
			BEF
		CDE	CDF
			CEF
			DEF

There are $\binom{6}{3} = \frac{6}{3} * \frac{5}{2} * \frac{4}{1} = 20$ triples.

They are

a) «without repetition»: repetitions are excluded (impossible, because the associations consist of different persons. Every person has another presumable life span according to our hypothesis 2.

---

[28] LEIBNIZ (2000), no. III.14.

[29] LEIBNIZ (2000), 508f.

b) «unarranged»: the case ABC is the same as the cases ACB, BCA, etc., because it is always a matter of the same association, and consequently always of the same life span of that association. We are only interested in this life span.

• **Life spans of associations**

We suppose, that all 6 persons are dead after 6 years:

A dies in the course of the first year.
B dies in the course of the second year.
C dies in the course of the third year.
D dies in the course of the fourth year.
E dies in the course of the fifth year.
F dies in the course of the sixth year.

Hence we get the following life spans: 0, 1, 2, 3, 4, 5 or the following triples of life spans:

012	013	014	015
	023	024	025
		034	035
			045
	123	124	125
		134	135
			145
		234	235
			245
			345

According to Leibniz's first definition, the life spans of our associations are:

2	3	4	5
	3	4	5
		4	5
			5
	3	4	5
		4	5
			5
		4	5
			5
			5

• **The total number of life spans is**

$$1*2 + 3*3 + 6*4 + 10*5 = 85.$$

The left factors are the triangular numbers, or $\binom{n}{2}$:

$$2*\binom{2}{2}+3*\binom{3}{2}+4*\binom{4}{2}+5*\binom{5}{2}=85$$

• The presumed life span of three persons chosen at random in a population of six persons is

$$\begin{aligned}\frac{85}{20}&=4{,}25 \text{ years}\\ &=\frac{3}{4}*3+2=\frac{17}{4}\\ &=\frac{n}{n+1}(x-n)+(n-1),\end{aligned}$$

or

$$\frac{2*\binom{2}{2}+3*\binom{3}{2}+4*\binom{4}{2}+5*\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{85}{20}$$

In order to deduce the general formula we replace 3 by n and 6 by 80:

Presumably, n persons will live $\frac{n}{n-1}(80-n)+(n-1) = \frac{80n-1}{n+1}$ years.

Leibniz gives this very formula elsewhere.[30] The underlying hypotheses are fundamental for such a calculation. If they are changed, we get other results.

Second case[31]

1. Let be a = 76 the same age of a group of 4 persons, l = 80 the limit of life. In this case all persons will die in the course of 4 years. No one can exceed the limit of life.
2. This time Leibniz admits equal life spans.
3. Let t = 79 be the maximal life span.

[30] LEIBNIZ (2000), 498f.

[31] LEIBNIZ (2000), no. III.9.

• The possible *k*-tuples

Let us take $n = 3$ persons who must die in the course of the 1st, 2nd, 3rd, 4th year but who might have the same life spans, that is, 0, 1, 2, 3 years.

Hence we must look for the different triples

a) with repetition
b) unarranged

The $x = 4$ life spans of $n = 3$ persons result in $\binom{x+n-1}{x-1} = \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!n!}$ combinations[32] $= \binom{4+3-1}{4-1} = 20$:

000	001	002	003
	011	012	013
		022	023
			033
	111	112	113
		122	123
			133
		222	223
			233
			333

We cannot form triples of persons because we cannot repeat the same person, but only the life spans.

• Life spans of associations:

0	1	2	3
	1	2	3
		2	3
			3
	1	2	3
		2	3
			3
		2	3
			3
			3

[32] LEIBNIZ (2000), 424-427, 484-487.

- **The total number of life spans is**

$$3*1+3*4+3*10=3(1+4+10)=3\binom{6}{4}=(4-1)\,\frac{(x+2)\,(x+1)\,x(x-1)}{4!}=3\binom{x+n-1}{x}$$

- **The presumed life span of three persons who must die in the course of four years is**

$$\frac{3\binom{x+2}{4}}{\binom{x+2}{3}}=(x-1)\frac{3}{4}=3*\frac{3}{4}=2\frac{1}{4}\text{ years}=(79-76)\frac{3}{4}$$

Leibniz generalizes this result by replacing 76 by a, 3 by n and finds that:

The presumed life span of n persons of a years will be[33] $\frac{n}{n+1}(79-a)$

Third case[34]

1. An association consists of two persons P_1, P_2 of different ages (74 and 75 years, respectively). One person, P_1, must die after $r = 5$ years at the latest, the other, P_2, must die after $x = 4$ years.

   P_1, P_2 belong to different associations of 6 or 5 persons whose members can be exactly characterized by the fact that they must die after 5 or 4 years.
2. Equal life spans can occur.
3. Let $t = 79$ again be the limit of life.

While up to now we knew the life spans of the selected persons, we no longer have this knowledge.

This time, Leibniz does not consider arbitrary subsets or combinations in the modern sense of the word but pairs: one element belongs to the first set, the other to the second set. We do not know whether P_1 will die in the course of the first year and P_2 in the course of the second year or vice versa: the ignorance changes the calculus of probabilities.

- **The possible *k*-tuples**

Let us denote the members of the first group by A, B, C, D, E, F: they die before the end of the 1st, 2nd, 3rd, 4th, 5th, 6th year that is they live 0, 1, 2, 3, 4, 5 years.

---

33 LEIBNIZ (2000), 486f.

34 LEIBNIZ (2000), 468-473.

Let us denote the members of the second group by L, M, N, O, P: they live 0, 1, 2, 3, 4, 5 years. Hence, Leibniz gets 6*5 = 30 pairs:[35]

AL	BL	CL	DL	EL	FL
AM	BM	CM	DM	EM	FM
AN	BN	CN	DN	EN	FN
AO	BO	CO	DO	EO	FO
AP	BP	CP	DP	EP	FP

- **Life spans of associations**

0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	2	3	4	5
3	3	3	3	4	5
4	4	4	4	4	5

- **The total number of life spans**

$$0*1 + 1*3 + 2*5 + 3*7 + 4*9 + 52 = 95$$

- **The presumed life span of two persons chosen in two groups of persons**

In order to obtain the presumed remaining life span of each of these two persons, that is, $\frac{95}{30}$, we must divide this number by the number of pairs (30).

Public indebtedness

For Leibniz, life annuities, or other amortizable pensions, seemed to be the appropriate means for eliminating excessive indebtedness of states or for providing the necessary money for cities, states, and sovereigns, and that in such a way that the creditor did not suffer any injustice.[36]

Mathematics teaches us how to find the just purchase price of a pension which must be conceded to the creditor. The aim of the action is justice. It concerns not only the percentage but also the question of which kind of indebtedness can be settled in this way. Leibniz explicitly explains what he thinks about politics: public welfare is more important than individual welfare. While we cannot compel an individual against his will to accept a pension that is an installment, so that the debtor can settle his debt, a state which got into financial straits must have this right:[37]

35 LEIBNIZ (2000), 470f.

36 LEIBNIZ (1995), 36.

37 LEIBNIZ (2000), 384f.

Salutis enim publicae maxima semper ratio habenda est.
For public welfare must always play the most important role.

In fact, in case of need and for reasons of equity we might concede a higher percentage than that dictated by mathematics: one has to reckon with, so to speak, a payment of damages. Leibniz severely criticized Johann Joachim Becher, a chemist and economist. Becher had advised the emperor to borrow one million from Dutch merchants and pay a fixed percentage of 20% for 40 years.[38]

For mathematical reasons, about 6% would have been reasonable. For political rather than legal reasons, one could have conceded 10% or 14% in order to grant compensation for a risk that is hardly calculable for a private creditor.

Leibniz discusses the example of a city whose revenues are 24000. It loses 5000 because of interest and spends 20,000 for public responsibilities.[39] In order to settle this difficulty, Leibniz suggested financial support for a period of 10 years to be paid by the citizens and a temporary restriction of public expenses. In this case, the creditors could get from 13000 to 15000 a year. After 10 years the debts would be redeemed.

What would Leibniz have said about the situation of Berlin in 2001, which was 1.3 million times worse? The expenses amounted to 40 billion, the revenues to 34.2 billion. Hence there was a yearly deficit of 5.8 billion. The debt amounted to 69.12 billion, which implied yearly interest of about 4 billion.

The increasing pensions cause profound problems for the universities. In order to guarantee the pensions of retired professors the number of students will be reduced in case of need.[40]

This brings to mind Nietzsche's «Merry Science» along the lines of a lunatic asylum. If one makes it impossible for the young to study and must nevertheless adhere to the contract of generations regarding old age insurance, it would be wiser to switch on the money-printing machines.

Epilogue

In 1997 Walter Hauser published his PhD dissertation «On the origins of the calculus of probabilities».[41] He amply discussed the pioneer works by Jan de Witt, John Grant, William Petty on political arithmetic, on the order of mortality, on demogra-

---

[38] LEIBNIZ (2000), 380f.

[39] LEIBNIZ (2000), 386f.

[40] „Der Tagesspiegel", 22nd of February 2001, p. 34.

[41] HAUSER (1997).

phy, on life annuities, on insurance problems which Leibniz knew, cited, and used. He did not say anything about the relevant Leibniz works. Apart from Parmantier's booklet, which was used by Mora Charles,[42] most of these works had not been published at that time.

Since then the situation has changed completely. The bilingual volume containing Leibniz's 50 most important papers dealing with this subject appeared in 2000. The present article is largely based on that volume.[43] In 2001 Jean-Marc Rohrbasser and Jacques Véron from the Institut Nationale d'Etudes Démographiques in Paris published their booklet «Leibniz et les raisonnements sur la vie humaine». Marc Barbut added a preface.[44] It demonstrates the quick reception of, and the great interest in, these Leibnizian studies.

Acknowledgement

I would like to thank my friend Abe Shenitzer for diligently reading this paper.

BIBLIOGRAPHY

HAUSER, WALTER (1997): *Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Die Verbindung von Glücksspieltheorie und statistischer Praxis vor Laplace*. Stuttgart: Steiner.

KNOBLOCH, EBERHARD (1999): *Les finances. In: L'actualité de Leibniz: Les deux Labyrinthes*. Décade de Cerisy la Salle 15-22 juin 1995, publ. par Dominique Berlioz et Frédéric Nef. Stuttgart: Steiner, 543-558.

KNOBLOCH, EBERHARD (2000): *Die Schriften im Überblick*. In: Leibniz 2000, 575-589.

KNOBLOCH, EBERHARD (2001): *Leibniz' versicherungswissenschaftliche Schriften im Überblick*. Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft 90, 293-302.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (1995): *l'estime des apparences*, 21 manuscrits de Leibniz sur les probabilités, la théorie des jeux, l'espérance de vie. Texte établi, traduit, introduit et annoté par Marc Parmentier. Paris: Vrin.

LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM (2000): *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik*, herausgegeben von Eberhard Knobloch und J.-Matthias Graf von der Schulenburg. Berlin: Akademie Verlag.

MORA CHARLES, MARY SOL DE (2002): «Pensiones, rentas y seguros. Los primeros cálculos y la participación de Leibniz», *Historia de la probabilidad y la estadística*. Madrid: AHEPE, págs. 35-48.

42 LEIBNIZ (1995); MORA CHARLES (2002).

43 LEIBNIZ (2000).

44 ROHRBASSER & VÉRON (2001).

ROHRBASSER, JEAN-MARC & VÉRON, JACQUES (2001): *Leibniz et les raisonnements sur la vie humaine*. Préface de Marc Barbut. Paris: Institut National d'Etudes Démographiques.

CAPÍTULO 3

La correspondencia entre los hermanos Huygens en 1669: vida media frente a vida mediana

Jesús Basulto Santos
José Antonio Camúñez Ruiz
Francisco Javier Ortega Irizo
Mª Dolores Pérez Hidalgo
Universidad de Sevilla

Introducción

En 1657, Christiaan Huygens (1629-1695) publica la versión latina de su tratado, *De ratiociniis in ludo aleae* (Calculando en juegos de azar) y tres años después, en 1660, la versión holandesa del mismo, *Van Rekeningh in Spelen van Geluck*. A partir de un principio de igualdad entre esperanza y apuesta en un juego justo y acentuando el papel del incipiente *Ars Analytica*, el álgebra en la resolución de problemas, Huygens establece en este tratado las bases para un cálculo adecuado en juegos de azar[1]. En el prefacio del tratado, Huygens escribe:

> *...quiero creer que al considerar estas cosas con más atención, el lector percibirá pronto que no se trata aquí de un simple juego de la mente, sino que* se ponen los fundamentos de una especulación altamente interesante y profunda. *Los problemas que pertenecen a esta materia no serán, a mi parecer, juzgados*

[1] En 1654, Pascal y Fermat habían hecho algo similar a través de una correspondencia entre ambos.

más fáciles que los del Diofanto, pero se les encontrará quizá más divertidos teniendo en cuenta que ellos contienen algo más que simples propiedades de números. Es necesario saber por otra parte que hace ya cierto tiempo que algunos de los más célebres matemáticos de toda Francia se han ocupado de este género de cálculo, con el fin de que nadie me atribuya el honor de la primera invención que no me pertenece.

Las tres primeras proposiciones del tratado son las fundamentales. El resto de proposiciones representan ejercicios que pueden ser resueltos con la ayuda de las tres primeras. Por una parte, podemos entender esas tres proposiciones como un «traductor» de los problemas de juego al lenguaje del álgebra, y por otra, esas proposiciones fijan la equivalencia entre esperanza y apuesta antes comentada.

En el momento de la publicación de su tratado Huygens era joven (tenía 28 años cuando se publicó la versión latina) y ya un prometedor científico. Pero sus investigaciones se dirigen hacia otros campos, sobre todo de la física y de la astronomía, participando poco, y más bien de forma pasiva, en el subsiguiente desarrollo de la Teoría de la Probabilidad.

En 1662, el comerciante inglés John Graunt publica su *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, un pequeño volumen de ochenta y cinco páginas más dos dedicatorias y un índice (una traducción al castellano de este tratado se encuentra en DE MORA CHARLES, M. S., 1989), donde se analizan los datos procedentes de las cuentas semanales de mortalidad que se publicaban desde hacía algunos años en la ciudad de Londres. El análisis de Graunt es, principalmente, un análisis estadístico descriptivo, aunque también aparece alguna inferencia sencilla pero con una fuerte carga de lógica. Consigue una «reducción de datos» (haber conseguido reducir varios grandes volúmenes confusos a unas pocas y perspicaces «Tablas», dice en la primera dedicatoria) y un «análisis estadístico»... en unos cuantos párrafos sucintos, sin ninguna larga serie de deducciones locuaces.

En su libro, Graunt tiene éxito al responder a cuestiones sobre demografía y estadísticas vitales con astutas reflexiones, basando sus razonamientos en la estabilidad de las ratios, y reforzando sus argumentaciones con discursos independientes que se fundamentan en diversos aspectos de los datos.

Una aportación importante del trabajo de Graunt fue la construcción de una tabla de vida en la que se muestra, a partir de una cohorte de cien recién nacidos, a qué edad van falleciendo. Todo ello, lógicamente, referido a la ciudad de Londres.

En la Tabla 1 mostramos la que presentó Graunt en su libro, pero con una pequeña modificación, pues él fija como edad máxima para la vida humana 80 años, mientras que los hermanos Huygens, cuando manejan la misma tabla, la fijan en 86. Aunque ha habido mucha discusión de cómo Graunt elaboró esta tabla (en las cuentas de mortalidad de la ciudad de Londres no aparecían las edades de los fallecidos), no es motivo de este trabajo el estudio de sus razones. Sí debemos añadir que, cuando los hermanos Huygens hacen sus cálculos usando como soporte la tabla de Graunt, en ningún momento encontramos alguna observación crítica sobre la construcción de la misma, aunque sí sobre su inexactitud sobre los tramos de edad intermedios.

Tabla 1. Serie de supervivientes y fallecidos según la tabla de Graunt.

Edad en años	*Fallecidos*	*Supervivientes*
0		***100***
6	***36***	***64***
16	***24***	***40***
26	***15***	***25***
36	***9***	***16***
46	***6***	***10***
56	***4***	***6***
66	***3***	***3***
76	***2***	***1***
86	***1***	***0***

El libro de Graunt se publica a finales de enero de 1662. Christiaan Huygens tiene conocimiento de la obra muy poco tiempo después de su aparición, como lo atestigua un intercambio de cartas entre Rober Moray, primer secretario de la Royal Society naciente, y Christiaan Huygens. El 16 de marzo de 1662, Moray comenta el envío a Christiaan del libro de Graunt, además de algún otro documento:

> *....la otra* (obra) *es una hermosa colección de observaciones sobre «las cifras semanales de mortalidad» que nos han hecho pensar que son muy útiles...*[2].

En esta ocasión Huygens no responde, por lo que Moray, dos meses más tarde, vuelve a insistir:

> *Es cierto que espero de usted algunas palabras de reflexión sobre las observaciones del señor Graunt. Creo que no quedaréis insatisfecho.... Si se tiene en cuenta en todas las ciudades de Europa, las enfermedades de las cuales se muere, junto con las otras cosas que se observan en las cuentas semanales de mortalidad, y que se elaboran desde hace varios años en Londres, y que si se añaden otras advertencias que aquí se hacen observar (de las que usted cono-*

[2] *Obras Completas de Huygens*, Tomo IV, págs. 94-95, Robert Moray a Christiaan Huygens, 16 marzo de 1662.

cerá las particularidades en poco tiempo), resultará una cosa de gran utilidad por varias consideraciones. Hágame saber si se hacen tales observaciones del número de muertes & c. en vuestras ciudades de Holanda o no[3].

Ahora Christiaan Huygens le responde con rapidez pero más en tono de cortesía que de interés sobre la propia obra:

El discurso de Graunt es muy digno de consideración y me gusta mucho, razona bien y con nitidez y admiro cómo se le ocurre obtener todas esas consecuencias de esas simples observaciones, que incluso a él no le parecía que sirviesen de nada. En este país no se hace esto, aunque sería deseable que se contase con esa curiosidad lo cual sería bastante fácil, principalmente en la ciudad de Ámsterdam, que se encuentra toda ella dividida en cuarteles, habiendo en cada uno de ellos unos prefectos que conocen el número de personas y todo lo que ocurre[4].

En 1669, Lodewijk (Ludwig) Huygens (1631-1699), hermano de Christiaan, dos años más joven, inicia una correspondencia con él sobre el asunto de la esperanza de vida y sobre la utilidad de la tabla de Graunt para calcular el valor de las anualidades de vida. No llegaron a tratar con rentas vitalicias; esto quedó para de Witt y Hudde que lo inician dos años después. Sin embargo, de una manera casi accidental, en una correspondencia de carácter privado, los dos hermanos van a introducir en el contexto del «cálculo de edades» dos conceptos fundamentales: *vida media* (o *esperanza de vida*) y *vida probable* (o *vida mediana*). En lenguaje de Christiaan, se trata de «esperanza» versus «apariencia». Dicha correspondencia no fue publicada hasta 1895, en el Volumen VI de las *Obras completas de Huygens*. La misma se desarrolla entre agosto y noviembre de 1669, y se entabla por el hecho de vivir distanciados ambos hermanos, Christiann en París y Lodewijk en La Haya.

Para Christiaan los asuntos tratados en esta correspondencia son marginales en el contexto de su rica vida científica durante aquel año. Trabajos sobre lentes, choques de cuerpos, resistencia del aire o del agua contra los cuerpos que atraviesan esos medios, diseño de máquinas destinadas a medir la fuerza motriz del agua y del viento, la cuestión de la coagulación de la sangre, la invención del clavicordio, las causas de la fuerza de la gravedad o la experimentación para la medida de la velocidad del sonido, constituyen un bagaje lo suficientemente importante y amplio como para resultarle casi un pasatiempo el análisis de los datos de vida a instancia de su hermano menor.

---

[3] *Obras completas de Huygens*, Tomo IV, págs. 130-131, Robert Moray a Christiaan Huygens, 16 de mayo de 1662.

[4] *Obras completas de Huygens*, Tomo IV, pág. 149, Christiaan Huygens a Robert Moray, 9 de junio de 1662.

Los cálculos de Lodewijk

De la basta correspondencia que Huygens mantuvo a lo largo del año 1669 hemos seleccionado seis cartas intercambiadas con su hermano Lodewijk entre el 22 de agosto y el 28 de noviembre. De éstas, dos fueron escritas por Lodewijk (la del 22 de agosto y la del 30 de octubre) y las otras cuatro (28 de agosto, 14 de noviembre, 21 de noviembre y 28 de noviembre) lo fueron por Christiaan. La carta del 21 de noviembre incorpora un apéndice (que no llegó a manos de Lodewijk) que lleva por título *Examinando los cálculos de mi hermano Luis*, donde, además de acertados razonamientos, aparece por primera vez en la historia de la estadística la gráfica de una función de supervivencia. El tono de las cartas es de tipo personal y los asuntos tratados son relevantes tanto de la vida cotidiana de los dos personajes como de sus reflexiones sobre el asunto que nos ocupa.

El 22 de agosto Lodewijk le dirige una carta a Christiaan en la que, en primer lugar, le comenta asuntos locales y de familia, mostrando después su preocupación ante el próximo viaje que el padre, persona ya mayor, pensaba realizar en solitario por diversos lugares de Holanda:

> *El señor padre va a iniciar mañana otro* (viaje) *por la parte de Herlem, Ámsterdam, Utrech, etcétera, en el que empleará nueve o diez días, pero lo que me desagrada es que va solo en su carroza; no es que yo tenga muchas ganas de acompañarle, pero quisiera que fuese con alguien, con la edad que tiene.*

La mención a la edad del padre le sirve de transición entre los asuntos privados comentados en la carta y el asunto que nos ocupa sobre la duración de la vida:

> *A propósito de la edad, estos días pasados he construido una tabla del tiempo que queda de vida para personas de toda clase de edades. Es una consecuencia que he extraido de la tabla del libro inglés* Of the Bils of Mortalitij *de la cual os envío aquí una copia con el fin de que vos os toméis la molestia de entreteneros un poco con los mismos cálculos y así poder ver si nuestros resultados concuerdan. Os advierto que me ha costado bastante trabajo conseguirlo, pero para vos no será lo mismo, y las consecuencias que resultan son muy interesantes y pueden, incluso, ser útiles para la constitución de rentas vitalicias. La cuestión es hasta qué edad debe vivir naturalmente un niño, tan pronto como es concebido*[5]*. Después un niño de 6 años, después uno de 16, de 26, etcétera. Si encontráis dificultades o demasiados obstáculos me ofrezco a haceros partícipe de mi método, que es seguro, por el primer motivo.*

En la posdata de la carta y sin explicar su modo de cálculo, Lodewijk estima que su hermano vivirá hasta los 56 años y medio y que él mismo, sólo hasta los 55.

[5] Graunt, al examinar la mortalidad al nacer habla de «quick conceptions» (concebido vivo), por lo que los abortos y nacidos muertos son contados como fallecidos entre 0 y 6 años.

Aunque era más joven, según este cálculo, Lodewijk debería morir primero pues la diferencia de esperanza de vida no compensaba la diferencia de edad.

Christiaan no se muestra muy interesado en un principio por las formulaciones de Lodewijk. En su carta de réplica afirma que para lograr resultados «exactos» se necesita una tabla de vida con el número de muertos en cada año de edad. Además, considera la tabla de vida como un juego de azar y afirma que uno puede apostar como 4 a 3 sobre el evento de que una persona de 16 años viva a la edad de 36 (realmente debe ser 24 a 16 o 3 a 2, como aclararemos después, en lugar de lo que él escribe en esta carta). Finalmente, pide a Lodewijk que le muestre sus cálculos.

Es en su carta del 30 de octubre de 1669, cuando Lodewijk explica su modo de cálculo de la vida media. Admite que su cálculo no es exacto (dada la inexactitud de la tabla de Graunt) y estima la vida media suponiendo que dentro de cada intervalo la distribución de los fallecidos es uniforme (aunque no lo dice así), por lo que para sumar los años vividos por las personas de cada edad multiplica el número de personas por el punto medio de cada intervalo.

> *Cuento en primer lugar los años que todas esas cien personas deben haber vivido, que son en total 1.822 años,...*

Después, relaciona estos años con la población de partida:

> *Estos 1.822 años repartidos por igual entre las cien personas da para cada una, 18 años y alrededor de 2 meses, que es la edad de cada persona creada o concebida, la una con la otra* (lo que va a durar cada persona concebida).

En la carta se generaliza el cálculo de la vida media en cada edad. La suma de los años vividos desde la edad en cuestión hasta el final de la vida es entonces promediada por el número de supervivientes a esa edad.

Los cálculos los hace mediante sustracciones sucesivas. Su método le lleva a restar de 1.822 años, total de años vividos desde el nacimiento hasta la muerte, aquéllos vividos por los que fallecen antes de la edad considerada por el cálculo de la vida media. Por ejemplo, la vida media a la edad de 6 años la obtiene así:

> *Resto en primer lugar los 108 años* (que es la edad[6] de los treinta y seis niños que mueren antes de los 6 años) *del total de 1.822 años; quedan 1.714 años, los cuales deben ser repartidos entre las sesenta y cuatro personas que quedan,....*

La Tabla 2 resume los cálculos efectuados por Lodewijk en esta carta.

Por último, cuando la edad no corresponde a las cifras que figuran en la tabla de Graunt (0, 6, 16, 26,...), Lodewijk efectúa una interpolación lineal:

---

[6] Es decir, el total de años vividos por esos 36 niños.

Tabla 2. Cálculos realizados por Lodewijk Huygens en 1669.

Edad	Número de supervivientes	Número de muertes	Punto medio del intervalo edad	Años vividos	Acumulación de los años vividos desde abajo	Edad media a la muerte	Esperanza de vida de los que alcanzan esa edad
0	100	36	3	108	1822	18,22	18,22
6	64	24	11	264	1714	26,78	20,78
16	40	15	21	315	1450	36,25	20,25
26	25	9	31	279	1135	45,40	19,40
36	16	6	41	246	856	53,50	17,50
46	10	4	51	204	610	61,00	15,00
56	6	3	61	183	406	67,67	11,67
66	3	2	71	142	223	74,33	8,33
76	1	1	81	81	81	81,00	5,00
86	0						0,00

Cuando quiero determinar la edad de una persona que está entre 36 y 46, por ejemplo, como vos y yo, ajusto sus años futuros en proporción de aquéllos que ellos han excedido del susodicho número 36, y así con el resto.

Así, como la vida esperada a los 36 años es de 17,5 años, y a los 46 años es de 15, interpolando, Lodewijk estima su esperanza de vida y la de su hermano. Dado que Christiaan tenía 40 años en 1669, la interpolación le daba como tiempo restante de su vida 16,5 años y, por tanto, una edad al fallecer de 56 años y medio. Para Lodewijk, entonces con 38 años, la interpolación le da una esperanza de vida de 17 años y, en consecuencia, una edad al morir de 55 años.

La aportación de Christiaan Huygens: esperanza vs. apariencia

En su carta del 21 de noviembre, Christiaan se entrega a una interpretación probabilística de la tabla de Graunt (HALD, A., 1990). Para Pressat (2001), Huygens observa en la serie de fallecimientos de una tabla de mortalidad la base de la ley de probabilidad que gobierna la duración de nuestra vida.

En esta época, el único vocabulario disponible para discutir Teoría de la Probabilidad era el de los juegos de azar. Por tanto, Christiaan considera la tabla de vida como una lotería con cien boletos, de los que treinta y seis de ellos tienen el valor 3, 24 tienen el valor 11, etcétera. Afirma que la esperanza de vida se va a calcular según la regla que dio en su tratado (el publicado en 1657).

En su descripción de la tabla de vida, Christiaan considera el resto de la vida de una persona de una determinada edad como lo que hoy entendemos como una variable aleatoria continua. En lugar de la función de distribución o la de supervivencia, usa la ventaja, y la correspondiente apuesta en un juego justo, para caracterizar la distribución de la variable. Así, según la tabla de Graunt, de cien personas al nacer, cuarenta sobreviven a los 16 años mientras que sesenta fallecen entre 0 y 16 años. La apuesta sobre la supervivencia es («apostar con igual ventaja» escribe él), en consecuencia, de 40 contra 60, o sea 2 contra 3, y no 4 contra 3, como había escrito en la carta anterior del 28 de agosto. Sobre cuarenta personas que sobreviven a los 16 años, dieciséis de ellas sobreviven a los 36 años, mientras que veinticuatro fallecen entre 16 y 36 años: la apuesta sobre la supervivencia es 16 contra 24, o esa, de nuevo 2 contra 3.

Por tanto, Christiaan convierte los datos de mortalidad de Graunt en una especie de distribución de probabilidad que le conduce a considerar las cifras de fallecidos como chances intemporales, con el mismo tratamiento que las de aparición de una cara dada en el juego del dado.

En el apéndice de la carta del 21 de noviembre de 1669, Christiaan hace un cálculo (Tabla 3) estrictamente idéntico al de su hermano pero su lógica es completamente distinta.

Tabla 3. Duración de vidas ponderadas por las chances correspondientes.

	36 por 3		108
	24 “ 11		264
	15 “ 21		315
	9 “ 31		279
multiplicad	6 “ 41	que hace	246
	4 “ 51		204
	3 “ 61		183
	2 “ 71		142
	1 “ 81		81
			1.822

Cuando Lodewijk efectúa, por ejemplo, la multiplicación 36 por 3, está calculando los años vividos por aquéllos que mueren antes de los 6 años. Cuando Christiaan hace esta misma operación lo que hace es ponderar los 3 años vividos con la chance de vivirlos.

Para estimar «lo que vale la chance de un niño concebido» (apéndice a la carta del 21 de noviembre de 1669), Christiaan efectúa el producto entre el número de chances de vivir x años y dicho número x; la suma de estos productos da, como en el caso de Lodewijk, 1.822 años. Dividiendo este número por el número total de chances, Christiaan calcula una «esperanza matemática», la esperanza de vida al nacer[7]:

[7] Lodewijk calcula la media de la duración de la vida: divide 1.822 por el número de personas, 100; Christiaan calcula una esperanza de vida: divide 1.822 por las chances, 100. Christiaan denomina a este resultado de 18 años y 2 meses como la «chance» o «esperanza de un niño concebido».

> *Entonces, por mi regla de los juegos de azar, es necesario multiplicar cada número de chances por los años que dan, y dividir la suma de los productos, que es aquí 1.822, por la suma de todas las chances, que hacen aquí 100.*[8]

El mismo Christiaan señala que su resultado es idéntico al de su hermano pero que sus métodos son diferentes: «El método de mi hermano Luis llega al mismo resultado aunque es conseguido por otro camino». Según Veron y Rohrbasser (2000), más que un camino diferente lo que está en cuestión es una forma diferente de entender los datos de mortalidad. Realmente, Christiaan no pone en duda el principio de la media usado por su hermano, sino simplemente su utilización en este caso concreto. Le importa menos saber cuánto tiempo viven las personas consideradas que conocer la probabilidad de alcanzar una edad determinada.

Insistimos entonces, Christiaan discute la validez de una media para tratar tal cuestión. El argumento dado por Christiaan se basa en la posibilidad de una fuerte dispersión alrededor de la media, y esta dispersión no es indiferente en términos de apuesta, es decir, de cálculo de chances.

Decir, como lo hace Lodewijk, que cien personas viven colectivamente 1.822 años con una vida media de 18 años y 2 meses es dar a entender que la mayoría de esas personas vivirá efectivamente ese número de años. La objeción de Christiaan consiste en imaginar que, de esas cien personas, noventa mueren antes de alcanzar la edad de 6 años, mientras que los otros diez viven hasta los 152 años y 2 meses. En este caso, la suma de los años vividos por las cien personas es siempre 1.822. Ahora bien, no sólo nadie ha vivido realmente 18 años y 2 meses[9], sino que la mayoría de ellos mueren antes de los 6 años de edad. Su vida probable es pues, de menos de 6 años. La «apariencia» de exceder esa edad es escasa.

Después añade en el mismo anexo:

> *Pero, aunque la esperanza de un niño concebido valga 18 años y 2 meses y medio, eso no quiere decir que sea aparente que viva tanto tiempo, pues es mucho más aparente que muera antes de ese plazo* (la esperanza así calculada no expresa una apariencia, es decir, una probabilidad). *De manera que, si se quiere apostar que él lo conseguirá, la partida sería desventajosa, pues se puede apostar con igual ventaja a que viva sólo hasta los 11 años aproximadamente. Además, él se engaña también diciendo que, cuando se apuesta a que un niño de 6 años o uno de 16 vivirán aún 20 años, la partida es igual. Pues sólo se puede poner 25 contra 39 sobre el de 6 años, y 2 contra 3 sobre el de 16, aunque la esperanza del uno y del otro valgan los citados 20 años, es decir, los apos-*

[8] Se refiere a la Proposición III de su libro *De ratiociniis in ludo aleae.*

[9] Hay que señalar que 90 x 3 + 10 x 152,2 = 1.792 y no 1.822. La edad de fallecimiento de las 10 que sobreviven debe ser 155,2 años, en lugar de 152,2.

tantes se perjudicarían si aceptan asegurar como mínimo 20 años. Su cálculo es bueno para las rentas vitalicias.

En este último párrafo nos presenta un ejemplo de dos edades con iguales esperanzas y distintas apariencias: bajo una perspectiva de juego justo, aunque las duraciones de las vidas medias sean idénticas en 6 y 16 años (20 años), no resulta indiferente apostar por qué una persona de 6 o una de 16 viva 20 años más.

Acaba centrándose en el caso especial en el que hay una igual chance de morir antes o después de t años, para cada edad, encontrando ese valor de t, la «mediana del tiempo de vida que resta» tal como hoy la conocemos, o también llamada con frecuencia «tiempo de vida probable». Entonces distingue entre la esperanza y la mediana y afirma que, para un recién nacido, la mediana es de alrededor 11 años, mientras que su esperanza de vida es sobre 18.

En la última carta dedicada a la duración de la vida humana, Christiaan retoma en términos muy parecidos esta argumentación e insiste de nuevo en la diferencia entre esperanza y apariencia. Él escribe a su hermano:

Vos dais a un niño concebido 18 años y 2 meses y medio de vida, y es cierto que su esperanza vale tanto como esto. Sin embargo, no es aparente que viva tanto, pues es mucho más aparente que morirá antes de ese plazo,...[10]

Más allá de una distinción teórica, las nociones de vida media y de vida probable tienen aplicaciones diferentes. Lodewijk explicaba en su primera carta de introducción a este asunto, que sus cálculos podían ser útiles para las rentas de vida. Christiaan comparte este punto de vista y opone la vida media, aplicable a las rentas vitalicias, a la vida probable, aplicable a las «apuestas». Él distingue la utilización de estos indicadores en su carta del 28 de noviembre:

Por tanto, son dos cosas diferentes la esperanza o el valor de la vida futura de una persona, y la edad en la cual hay igual apariencia de que sobreviva o no sobreviva. La primera es para regular las rentas de vida, y la otra es para las apuestas.

Como ya se ha comentado, también da el notable paso de considerar la tabla de vida como una distribución continua y nos muestra un gráfico, que puede ser considerado el primero de una función de supervivencia (la complementaria de una función de distribución). Señala que el tiempo de vida mediano para un recién nacido puede encontrarse en el gráfico como la abcisa correspondiente a una ordenada de 50, y generaliza la mediana del tiempo restante para cualquier edad dada, como él muestra para una persona de 20 años, para quien la mediana del tiempo restante está próxima a los 16 años.

[10] Carta del 28 de noviembre de 1669.

Finalmente Huygens discute sobre esperanzas de vida conjuntas. Como un ejemplo, menciona el caso de un hombre de 56 que se casa con una mujer de 16 y pregunta por la esperanza del tiempo que ellos vivirán juntos, la esperanza de la vida más corta, y el valor esperado del tiempo del que viva más. El problema lo plantea en términos de un contrato justo:

> *O bien, si se me han prometido cien francos por cada año que vivan juntos, ¿por cuánto sería justo que se rescatase esa obligación?*

No lleva a cabo el cálculo para este ejemplo sino, por simplificar, sólo para el caso de una pareja en la que ambos son de 16 años. «¿En cuánto tiempo morirán dos personas de 16 años cada una? Respuesta, en 29 años 2 2/3 meses».

Para describir esta situación, Huygens considera una lotería que contiene cuarenta boletos (cuarenta supervivientes a partir de los 16 años), cuyos valores son los tiempos de vida que restan, o sea, la edad de los fallecidos menos 16 (siendo la edad de los fallecidos el centro del intervalo correspondiente) y las chances son los números de fallecidos en cada edad, como se muestra en la Tabla 4.

Las dos personas de 16 años que constituyen la pareja son representadas por A y B. Extraerán cada una de ellas sucesivamente y de forma independiente (con reemplazamiento) un boleto, y serán registrados los valores de T_A y T_B, los tiempos de vida que restan a cada uno, coincidiendo las distribuciones de ambas variables con las de la Tabla 4. Para encontrar la esperanza de $T = \text{máx } \{T_A, T_B\}$, Huygens usa un argumento condicional basado en la idea de que si $T_A = t$, se sigue que $T = t$ para $T_B \le t$, y $T = T_B$ para $T_B > t$.

Tabla 4. Distribución del tiempo de vida que resta a una persona de 16 años.

Tiempo de vida que resta	Chance asociada
21 – 16 = 5	15
31 – 16 = 15	9
41 – 16 = 25	6
51 – 16 = 35	4
61 – 16 = 45	3
71 – 16 = 55	2
81 – 16 = 65	1

Supone que $T_A = 15$, esto es, A fallece en el intervalo de edad (26,36), y combina esta información con la distribución de T_B. Para obtener la distribución de T, Huygens señala que la única dificultad está en que ocurra $T_A = T_B = 15$. Distribuye uniformemente las nueve muertes en ese intervalo de 10 años y señala que hay 4,5 chances para $T_B \le 15$ y 4,5 chances para $T_B \in (16,20)$, lo cual simplifica usando el punto medio $T_B = 18$.

Para $T_B \geq 25$, usa el atajo de considerar el tiempo de vida esperado de la tabla de Lodewijk, que da 53,5 − 16 = 37,5 para los dieciséis casos considerados. La Tabla 5 presenta la distribución de T cuando $T_A = 15$ es:

Tabla 5. Distribución de T cuando $T_A = 15$.

$T \mid T_A = 15$	**Chances**
15	15 + 4,5 = 19,5
18	4,5
37,5	16

lo que da la esperanza condicional $E[T/T_A = 15] = 24{,}3$. De esta forma calcula las esperanzas condicionadas para todos los posibles valores de T_A y a dichas esperanzas les asocia como chances los fallecidos en cada tramo. Así se consigue la siguiente tabla (Tabla 6) con la que se podrá calcular la esperanza que él ha dado:

Tabla 6. Esperanzas condicionadas.

Posibles valores de T_A	$E[T/T_A]$	**Chances**
5	20,3	15
15	24,3	9
25	30,2	6
35	37,6	4
45	46,1	3
55	55,3	2
65	65	1

La esperanza no condicionada es entonces $E(T) = 29{,}22$ (*29 años 2 2/3 meses*). Éste es un buen ejemplo de una primera aplicación del principio fundamental de que la esperanza $E(T)$ puede ser encontrada como la esperanza de una esperanza condicionada $E[T/T_A]$.

Pressat (2001) comenta sobre el cálculo de esta esperanza matemática:

Apropiándose de la tabla de mortalidad de Graunt y produciéndose en su materia una transferencia dichosa de la noción de apuesta que es el origen del cálculo de probabilidades, Christiaan Huygens ha ilustrado magistralmente el concepto de esperanza matemática bajo su forma más inmediata, y de manera más ingeniosa aún, como acabamos de mostrar, bajo la forma de esperanza matemática condicionada.

BIBLIOGRAFÍA

DE MORA CHARLES, M. S. (1989): *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII.* Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.

GRAUNT, J. (1662): *Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality*. Martyn, London. Fifth edition reprinted in C. H. Hull (ed.): *The Economic Writing of Sir William Petty,* 1899, Cambridge Univ. Press; reprinted by Kelly, Fairfield, New Jersey, 1986.

HALD, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750.* John Wiley & Sons. New York.

HUYGENS, C. (1888-1950): *Oeuvres Complètes*. 22 volúmenes. Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. Los volúmenes usados aquí son: Vol. IV, VI y XVI.

PRESSAT, R. (2001): *Christiaan Huygens et la table de mortalité de Graunt*. *Math. & Sci. hum.*, nº 153, págs. 29-36.

VERON, J., ROHRBASSER, J. M. (2000): Lodewijk et Christiaan Huygens: La distinction entre vie moyenne et vie probable. *Math. & Sci. hum.*, nº 149, págs. 7-21.

CAPÍTULO 4

Correspondencia entre los hermanos Huygens en 1669 donde se aborda el asunto de la «duración de la vida»

Traducción al castellano de las seis cartas que constituyen esta correspondencia realizada por:

JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
Universidad de Sevilla

Estas seis cartas están incluidas en el Tomo VI de las *Obras completas de Christiaan Huygens*, publicado por la Société Hollandaise des Sciences (Nijhoff, La Haye) en 1895. Están escritas en francés del siglo XVII. La numeración de las cartas que presentamos es la que la editora asignó a las mismas en el momento de la publicación. El formato y la presentación es casi idéntico al que nos muestra el tomo donde están incluidas. Las notas al pie son las que aparecen en la publicación de 1895.

Las seis cartas son:

1ª. Carta de Lodewijk a Christiaan Huygens, 22 de agosto de 1669; carta n.º 1.755, págs. 482-483 del Tomo VI.

2ª. Carta de Christiaan a Lodewijk Huygens, 28 de agosto de 1669; carta n.º 1.756, págs. 484-485 del Tomo VI.

3ª. Carta de Lodewijk a Christiaan Huygens, 30 de octubre de 1669; carta n.º 1.771, págs. 515-518 del Tomo VI. La más interesante de las dos escritas por Lodewijk.

4ª. Carta de Christiaan a Lodewijk Huygens, 14 de noviembre de 1669; carta n.º 1.775, págs. 523-524 del Tomo VI. Christiaan aún no aborda el problema.

5ª. Carta de Christiaan a Lodewijk Huygens, 21 de noviembre de 1669; carta n.º 1.776, págs. 524-532 del Tomo VI. Es la más interesante de las escritas por Christiaan. Se incluye un anexo que describe una especie de «borrador» donde Christiaan hace sus cálculos y reflexiones. En el mismo está la primera curva de supervivencia de la historia de la estadística. Este anexo no lo recibió Lodewijk.

6ª. Carta de Christiaan a Lodewijk Huygens, 28 de noviembre de 1669; carta n.º 1.781, págs. 537-539 del Tomo VI.

N.º 1.755

CARTA DE LODEWIJK HUYGENS A CHRISTIAAN HUYGENS

22 DE AGOSTO DE 1669

La carta se encuentra en Leiden col. Huygens.
Christiann respondió con la carta n.º 1.756.

En La Haya, el 22 de agosto de 1669

El desorden que hay en las postas es la razón por la que desde hace tres semanas no hayamos tenido noticias de vos, y no puedo aún decir que se haya puesto remedio. Entre otras incomodidades que sufro está el hecho de que no sepa nada de mi peluca[1], de la cual comienzo a tener mucha necesidad, pues no sabría decidirme si hacerme aquí otra mientras que espero aquélla. Por favor, no descuidéis vos el hacérmela llegar cuanto antes.

Si nuestras cartas han sido más afortunadas que las vuestras, habréis tenido noticias frecuentes de nosotros durante la citada interrupción, y es por esto por lo que no creo que me quede mucho que contaros. Habréis conocido la muerte del señor de Noortwijck[2], y que el señor La Lecq[3] le ha sucedido en su gobierno[4]. El gobernador de Hulst, Bont[5] va a morir un día de éstos. El admiral Gent quiere sucederle.

1 En la carta n.º 1.753, Lodewijk le pedía a su hermano Christiaan que le comprase una peluca en París.

2 Wigbold van der Does, murió el 11 de agosto de 1669.

3 Maurits Lodewijk, Conde de Nassau la Lecq.

4 Cargo de Maître General de la Artillería de la Armada de las Provincias Unidas.

5 Willem de Bont, gobernador de Hulst, no murió hasta el 28 de diciembre de 1670.

No sé si alguien os habrá anunciado que el matrimonio de nuestra ilustre heredera[6] de Bennebroek con Warmenhuijsen[7] se rompió, y esto incluso con una promesa de matrimonio concebida en términos muy precisos, que ellos se dieron recíprocamente. Ella se excusó ante la voluntad de sus padres, que no lo consentían, por el humor un poco brusco del caballero. He aquí la segunda infidelidad femenina que nosotros hayamos presenciado en poco tiempo. La de Jacoba[8] fue la primera.

Moggershill[9] y su mujer[10], con Monsieur de Leeuwen y la suya, están haciendo un tour por el país, desde Gueldre hasta Cleve. Creo que volverán esta semana. El señor padre va a iniciar mañana otro por la parte de Herlem, Ámsterdam, Utrech, etcétera en el que empleará 9 o 10 días, pero lo que me desagrada es que va solo en su carroza; no es que yo tenga muchas ganas de acompañarle, pero quisiera que fuese con alguien, con la edad que tiene.

A propósito de la edad, estos días pasados he construido una tabla del tiempo que queda de vida para personas de toda clase de edades. Es una consecuencia que he extraido de la tabla del libro inglés *Of the Bils of Mortalitij*[11] de la cual os envío aquí una copia con el fin de que vos os toméis la molestia de entreteneros un poco con los mismos cálculos y así poder ver si nuestros resultados concuerdan. Os advierto que me ha costado bastante trabajo conseguirlo, pero para vos no será lo mismo, y las consecuencias que resultan son muy interesantes y pueden, incluso, ser útiles para la constitución de rentas vitalicias. La cuestión es, hasta qué edad debe vivir naturalmente un niño, tan pronto como es concebido. Después un niño de 6 años, después uno de 16, de 26, etcétera. Si encontráis dificultades o demasiados obstáculos me ofrezco a haceros partícipe de mi método, que es seguro, por el primer motivo.

Adiós.

Según mis cálculos vos viviréis, aproximadamente, hasta los 56 años y medio. Y yo hasta los 55.

Al Señor
Monsieur Chr. Huygens de Zuijlichem, en París.

6 Adriaen Pauw, señor de Bennebroek, se había casado con su prima Cornela Pauw. Tuvieron cinco hijas: Anna Cornelia, bautizada el 30 de junio de 1645, Clara Cornelia, bautizada el 3 de junio de 1646, Anna Christina, bautizada el 9 de febrero de 1648, muerta poco después, Anna Christina, bautizada el 30 de agosto de 1649, y Adriana Cornelia, bautizada el 5 de septiembre de 1655.

7 Nicolaas Sohier de Vermandois, señor de Warmenhuyzen, Crabbendan, etcétera, nació en 1645 y murió en marzo de 1691, se casó con Anna Christina Pauw; tuvieron sólo una hija, Adrianne Constance.

8 Jacoba Victoria Bartelotti, que estaba comprometida con Hendrik de Pickere. La oposición de Jan Six, burgomaestre de Ámsterdam había impedido el matrimonio.

9 Philips Doublet.

10 Susana Huygens.

11 El libro de John Graunt.

N.º 1.756

CARTA DE CHRISTIAAN HUYGENS A LODEWIJK HUYGENS

28 DE AGOSTO DE 1669

La carta se encuentra en Leiden col. Huygens.
Es la respuesta a la n.º 1.755.

En París, el 28 de agosto de 1669

Creo haber recibido la mayor parte de las cartas de mi padre y de las vuestras, incluso la última del 22 de este mes. He enviado algunas respuestas aunque no todas, viendo que están detenidas en el camino.

Entre otras, envié a mi padre una descripción exacta y bastante larga de la invención de mi teclado móvil, que él me había pedido.

He enviado vuestra peluca con Monsieur van der Mijle, que partió hace 15 días. Va en una caja lacrada con una inscripción para vos. Enviadme mi dinero mediante algún viajero conocido, cuando se presente.

También he enviado a mi padre dos ojos de cristal para ponerlos en mi máscara de escayola[12], mediante un gentilhombre de aquí que le recomendé por carta. Y en otra guardé los cristales de unas pequeñas lentes que él esperaba.

Os agradezco vuestras noticias. Tengo mucha alegría de saber, por todas las cartas del señor padre, que todo el mundo por allá se encuentra bien. No tengo tiempo de extenderme más en este comunicado, pues tengo aún que pasar a limpio un discurso bastante largo que debo leer esta noche en nuestra asamblea. Es abordando la causa de la gravedad[13].

Es mucho lo hecho por vos, no poco, lo de hacer los cálculos de las edades, que vos mismo decís que acabáis de terminar. Pero con el fin de que ese cálculo fuese exacto sería necesario tener una tabla que marcara de año en año cuántas personas mueren de las cien que se han supuesto, y ha sido necesario que vos lo hayáis suplido por algún medio que yo no conozca, o de lo contrario vos no sabríais, en verdad, cuánto debe vivir una persona de 6, 16 o 26 años y así, y menos aún, de

---

[12] Chr. Huygens había mandado hacer esta máscara de escayola cuando su viaje a Inglaterra en 1663.

[13] Según los registros de los primeros años de la Academia de las Ciencias, esto ocurrió, en efecto, en la sesión del miércoles 28 de agosto, cuando Christiaan leyó su «Discurso sobre la causa de la gravedad». Este discurso no fue publicado hasta 1690, a continuación del «Tratado de la luz» bajo el título: *Discours de la Cause de la Pesanteur*, par C.H.D.Z. A Leide, chez Pierre Van der Aa, Marchand Libraire, MDCXD in-4º.

alguna edad intermedia entre éstas como lo habéis hecho con vos y conmigo. Creo, por tanto, que habéis resuelto sólo aproximadamente.

Lo que puedo concluir de cierto por los datos de la tabla es lo que apostaría por que un niño recién nacido (o concebido como decís vos, pero me parece que el inglés no hablaba de concebidos, pues si no, cómo se puede tener registro de ellos) viva hasta los 16, tomaría la partida mala y apostaría 4 contra 3. De igual forma lo que apostaría por el hecho de que una persona de 16 viva hasta los 36, la apuesta sería la misma de 4 contra 3.

Os envío de suplemento la tabla tal y como he dicho y resuelto los problemas que se pueden proponer sobre esta materia que es bastante sutil. No sabría si vuestro método es el mismo que el mío, y estaría encantado de conocerlo.

Adiós.

Al Señor
Monsieur L. Huygens de Zulichem, en La Haya

N.º 1.771

CARTA DE LODEWIJK HUYGENS A CHRISTIAAN HUYGENS

30 DE OCTUBRE DE 1669

La carta se encuentra en Leiden col. Huygens.
Es la respuesta a la n.º 1.756. Chr. Huygens respondió por las n.º 1.775 y 1.776.

En La Haya, el 30 de octubre de 1669

He recibido hace pocos días dos de vuestras cartas, la primera ya antigua, de seis semanas, la otra de 15 días. Todo lo que habéis enviado a mi padre, ojos de cristal, cristales para lentes, descripción de vuestro teclado, etcétera ha llegado bien, como vos habréis sabido de cuando en cuando, por él mismo[14], sin duda. No sé por qué el señor van der Mijle ha querido abrir la caja donde vos dijisteis haber puesto la peluca, pues me la ha dado toda descubierta, sin caja o envoltura alguna. Es cierto que los de la aduana podrían haberla abierto, pero también él debería habérmelo dicho.

Advierto que mi cálculo no es del todo exacto, pero hay tan poco que decir sobre esto que no vale la pena considerarlo, tanto menos cuanto la tabla inglesa, sobre la

[14] No se han encontrado estas cartas de Constant. Huygens padre.

que nos basamos, tampoco tiene tal exactitud, pero como dice el autor, «tose numbers are practically neere enough to the truth, for men doe not die in exact proportions nor in fractions»[15]. He aquí pues el método del que me estoy sirviendo. Cuento en primer lugar los años que todas esas cien personas deben haber vivido, que son en total 1.822 años, lo que vos veréis probado en la página que sigue.

Las 36 personas que mueren con menos de 6 años, han vivido los unos con los otros 3 años, lo que hace	108 años
Los 24 que mueren entre 6 y 16 han vivido los unos con los otros 21 años, lo que hace	264 años
Los 15 que mueren entre 16 y 26, han vivido 21 años, lo cual hace	315 años
Los 9 entre 26 y 36 han vivido 31 años, que hacen	279 años
Los 6 entre 36 y 46 han vivido 41 años, que hacen	246 años
Los 4 entre 46 y 56 han vivido 51 años, que hacen	204 años
Los 3 entre 56 y 66 han vivido 61 años, que hacen	183 años
Los 2 entre 66 y 76 han vivido 71 años, que hacen	142 años
Y uno que muere entre 76 y 86 ha vivido 81 años	81 años
Suma	1.822 años

Estos 1.822 años repartidos por igual entre las cien personas da para cada una 18 años y alrededor de 2 meses, que es la edad de cada persona creada o concebida, la una con la otra. Pues observad de paso que el inglés habla de personas concebidas y, por tanto, pueden ser contados, además de los que son nacidos, los abortos que también entran en las observaciones.

Ahora bien, para llegar a nuestra cuenta y especificar cuánto queda de vida a cada persona de tal o cual edad, he aquí cómo procedo.

Resto en primer lugar los 108 años (que es la edad de los treinta y seis niños que mueren antes de los 6 años) del total de 1.822 años; quedan 1.714 años, los cuales deben ser repartidos entre las sesenta y cuatro personas que quedan, lo que hace para cada una, es decir, para cada niño de 6 años, 26 años y alrededor de 10 meses, de manera que a los de dicha edad de 6 años le quedan aún por vivir 20 años y 10 meses.

A continuación restamos de estos 1.714 años, la edad de las veinticuatro personas que mueren entre 6 y 16 (que son 264 años), quedará 1.450. Los cuales han de repartirse entre las cuarenta personas que quedan, lo que hace para cada una de ellas, es decir, para cada persona de:

[15] Estos números son en la práctica bastante próximos a la verdad, pues los hombres no mueren según proporciones exactas, ni en fracciones.

		años	meses
16 años	36 años y 3 meses, de manera que le queda de vida	20	3
Para los de 26	saldrá 45 años 4 meses; para su resto	19	4
Para los de 36	53 años 6 meses; para su resto	17	6
Para los de 46	61 años; para su resto	15	—
Para los de 56	67 años y 6 meses; para su resto	12	8
Para los de 66	74 años 4 meses; para su resto	8	4
Para los de 76	81 años; para su resto	5	0
Para los de 86	Nada	0	—

Cuando quiero determinar la edad de una persona que está entre 36 y 46, por ejemplo, como vos y yo, ajusto sus años futuros en proporción de aquéllos que ellos han excedido del susodicho número 36, y así con el resto.

Después de lo que está arriba no comprendo la razón de vuestro cálculo de 4 contra 3, pues en mi opinión la partida es aproximadamente igual cuando se apuesta por el hecho de que una persona de 6 o una de 16 vivan aún alrededor de 20 años. Espero entonces vuestras razones como yo os he enviado las mías.

Por mis últimas[16] habréis conocido la historia[17] de la brutalidad del Conde de Rieux[18]. Estaba citado para el 28 de este mes, pero, al no comparecer, el fiscal ha obtenido orden de captura contra su persona en virtud de su rebeldía. Él está siempre en casa del señor embajador[19], pues parece que su tiempo lo pasaría bastante mal si se le pudiese atrapar fuera de allí. Se le ha hecho ofrecer, de nuevo, lo de pedir perdón, incluyendo una genuflexión, ante las damas[20], si se quiere, pero sus mejores amigos le aconsejaron dejar hacer a la justicia, por lo que según ésta él

[16] No se dispone de esa carta.

[17] Lunes, 7 de octubre de 1669. Algunos caballeros y damas de La Haya, cuyos nombres se encuentran en la nota 20, quisieron hacer una partida de «cingelen», es decir: pescar en los charcos de agua de la playa de Scheveningen. El Conde de Rieux, informado de este proyecto, paró su coche y dirigió, mediante su hidalgo Dessales, injurias a las damas, con el fin de poder batirse con sus caballeros. Pero los espectadores les separaron y los franceses (Rieux y Dessales) se salvaron refugiándose en el hotel de la embajada francesa. Algunos días después huyeron hacia París. Sin embargo, el 23 de diciembre Rieux volvió a La Haya.

[18] Este Conde Jean de Rieux amaba los duelos. En febrero de este mismo año envió un desafío al capitán Adriaan Van Gent.

[19] Simón Arnaud, marqués de Pomponne (llevando en primer lugar los nombres de señor de Briotte y señor de Andilly), segundo hijo de Robert Arnaud d'Andilly y de Catherine le Fern, nació en 1618 y murió en Fontenebleau en 1699. Llegó a ser consejero de estado, intendente general de la armada y, por fin, embajador en 1665 en Estocolmo y en 1668 en La Haya. Se casó en 1660 con Catharina Ladvocat. Era gran diplomático y conocido por su probidad.

[20] Las damas eran: Marineau, esposa de N. Godyn, Sanneke Pergens, hija de Jacob Pergens, Leonora Bartelotti, esposa de Jacques Pergens, Susana Ryckaert, esposa de Constantyn Huygens. Los señores eran: Lodewijk y Constantyn Huygens, N. Godyn, J. Diederik Hoeufft y Sicco Eeck.

será desterrado[21] indiscutiblemente, y en mi opinión, también es la mejor satisfacción que ellas podían tener. Hemos sabido hoy de Francia que su madre, de la que se dice es una mujer muy prudente, tiene una cólera terrible contra él, estando a punto de tratar con el gobierno de Saint Malo la ruptura categórica del acuerdo para él usando el aviso de esta desagradable acción.

En Leiden no hay peste, pero hay una especie de fiebre contagiosa que es casi peor que ésta. Las iglesias están cerradas a falta de ministros, y en la casa de la villa falta el burgomaestre, y de los concejales, apenas si queda alguno de pie. Nuestro buen amigo de Leeuwen, que ha sido nombrado burgomaestre desde hace poco[22], ha sufrido su buena parte de esta enfermedad. Uno de sus hijos ha muerto, y casi todos lo demás, junto con todos sus domésticos, han estado o están aún enfermos. Con él la fiebre se portó mucho mejor y parece fuera de peligro.

El hermano de Moggershill[23] también ha tenido una fuerte fiebre terciaria: pero está casi curado, pero la pobre Mademoiselle Ida[24] se encuentra siempre muy mal de su fiebre cuartana, lo cual le ha hecho disminuir mucho su buen humor.

El criado de Sebastián Chieze[25] no ha llegado aún.

Os felicito por el buen éxito de vuestras longitudes, pero estamos muy impacientes por ver estas bellas observaciones del señor de Beaufort de las que vos habláis. Casi dudo de si vos no las habréis enviado al señor Van Beuningen en esa carta de gran tamaño.

Pero por qué no nos las habéis enviado. El señor padre no dejará sin duda de enviaros cómo él ha comparado vuestra estancia en Francia y el éxito que habéis logrado, con la de José en Egipto, y como consigue lo que quiere de todos nosotros, os iremos a encontrar aún algún día.

Se me ha propuesto estos días pasar la residencia a la Corte de España, ocupando la plaza del difunto señor Rhede[26], aunque bajo diferente carácter, y pienso que podría asumirlo, pero lo malo es que la mayor parte de la ventaja, lo de la inmu-

---

[21] El 15 de diciembre Rieux fue desterrado de los Países Bajos, pero el secuestro de los bienes fue levantado el 30 de diciembre.

[22] Diderik Van Leyden Van Leeuwen, fue elegido burgomaestre el 13 de octubre de 1669, reemplazando a Willem Poets.

[23] Philips Doublet.

[24] Ida Van Dorp.

[25] En la carta n.º 1.765 de este tomo aparece este personaje.

[26] Hendrik barón Van Reede, hijo del diplomático Johan Van Reede y de Jacoba Van Reede, nació en 1628 y murió soltero el 19 de septiembre de 1669. Llego a ser embajador en España en 1659. En un viaje a los Países Bajos en 1667 compró la baronía de Schonauwen.

nidad de impuestos, en ésta desaparece. Pienso que podría ganar sobre siete u ocho mil libras, además de extras. No sé qué resolveré al final; sobre todo, con otro asunto que está desde hace poco en muy buena situación y si no estoy aún enteramente desesperado no lo llevaré adelante. Hacedme llegar vuestra opinión sobre esta residencia. Una de las dificultades más grandes que yo encuentro es la edad del señor padre que según las apariencias, yo no conseguiría volverlo a ver.

Adiós.

N.º 1.772

LODEWIJK HUYGENS A CHRISTIAAN HUYGENS

Apéndice al n.º 1.771

1669

La pieza se encuentra en Leiden col. Huygens.

Copia de la Tabla Inglesa

De un ciento han muerto durante los primeros seis años	36
Los diez años siguientes, o década	24
La segunda década	15
La tercera década	9
La cuarta	6
La siguiente	4
La siguiente	3
La siguiente	2
La siguiente	1

De donde se sigue que de los citados cien concebidos, quedan vivos

Al final de 6 años	64
Al final de 16 años	40
A los 26	25
A los 36	16
A los 46	10
A los 56	6
A los 66	3
A los 76	1
A los 80	0

N.º 1.775

CARTA DE CHRISTIAAN HUYGENS A LODEWIJK HUYGENS

14 DE NOVIEMBRE DE 1669

La carta y la copia se encuentran en Leiden col. Huygens.
La carta es respuesta a la n.º 1.771.

En París, el 14 de noviembre de 1669

Os agradezco la verdad de la historia de vuestro altercado con ese tonto Conde de Rieux. No sabía que vos estabais cuando el señor Romf contó el hecho por primera vez[27], y seguro que ni siquiera él lo sabía. Estaría muy contento de conocer lo que ha ocurrido por fin, y si dio alguna satisfacción a estas bellas y a vosotros dos, que esta afrenta os atañe tanto como a ellas.

Me parece que la residencia en España no sería un mal asunto, pues uno puede regresar si no se encuentra bien. El señor padre debe saber si puede soportar que vos os alejéis tanto. Observo que el señor Romf también tiene algún interés sobre esto, y no dudo que aún no se ha encontrado a otros[28]. No sabría deciros nada de vuestro cálculo ahora, pues he consumido todo el tiempo que tenía en escribir cartas que estaba obligado enviar[29].

Lo pensaré más con tranquilidad. Encuentro vuestro método muy bueno, puede que sea muy legítimo.

---

[27] Consultar la carta n.º 1.771.

[28] Esta embajada no fue ocupada entonces; en 1670, Hieronymus Beverningh fue enviado como embajador extraordinario a España para tratar una alianza defensiva.

[29] No se conoce nada de esas cartas.

N.º 1.776
CARTA DE CHRISTIAAN HUYGENS A LODEWIJK HUYGENS
21 DE NOVIEMBRE DE 1669

La carta y la copia se encuentran en Leiden col. Huygens.
La carta es respuesta a la n.º 1.771.

En París, el 21 de noviembre de 1669

Acabo de examinar vuestros cálculo sobre edades y de rehacer los míos que había perdido. Quisiera que los vuestros fuesen ciertos, pues nos da un poco más de edad, pero no sirve de nada favorecernos; *Scit nos Proserpina canos*, y no se fija en la cuenta que nosotros hagamos. Vos concluís, bastante próximos a la verdad, que las cien personas han hecho juntas 1.822 años de vida, pero no se desprende que los 18 años y 2 meses que resultan de dividir ese número por cien sea la edad de cada persona creada o concebida, tal y como vos lo tenéis por cierto. Supongamos, por ejemplo, que los hombres son aún más débiles en su infancia de lo que lo son, y que de cien, mueren de ordinario noventa durante los primeros 6 años, entonces, aquéllos que sobrepasen esa edad serán Néstores y Matusalenes, viviendo de ordinario hasta los 152 años y 2 meses. Vos tendréis para los cien el mismo número de 1.822 años y, sin embargo, quien apostase entonces que un niño concebido alcanzará la edad de 6 años tan solo tendría una gran desventaja, puesto que de diez sólo uno lo conseguiría.

He aquí aún otro caso. Consideremos que sobre los cien niños concebidos (en el supuesto ordinario) yo apuesto por el hecho de que cada uno de ellos alcance la edad de 16 años. Es cierto que, puesto que de cien, de ordinario, no quedan más que cuarenta a los 16 años, tendría desventaja, y que tendría que haber apostado nada más que 40 contra 60, o 2 contra 3 para que la partida sea justa.

Veis entonces, que 18 años 2 meses no es en modo alguno la edad de cada uno que sea concebido, y yo sólo encuentro que dicha edad no es más que 11 años aproximadamente.

Quien apueste que un niño de 6 años vivirá hasta los 26 puede poner 25 contra 39, puesto que de 64 niños de 6 años hay 25 que sobreviven a la edad de 26, contra 39 que mueren por debajo de esa edad.

Y quien apueste que un muchacho de 16 años vivirá hasta los 36, puede poner 16 contra 24 o 2 contra 3, de manera que es un poco más aparente que uno de 16 años, más que uno de 6, viva aún 20 años más.

Este cálculo, como veis, es muy seguro y muy fácil, pero preguntaréis cómo podría determinar yo, como lo habéis hecho vos, cuánto queda, razonablemente, por vivir a una persona de una determinada edad. Para hacer esto he suplido la pequeña tabla inglesa, y sin entorpecimientos de cálculo, trazando una línea curva, y sobre la cual, con el compás mido la vida de aquél que se quiera, y veo por ejemplo, que a vuestra edad de 38 años podéis aún vivir alrededor de 19 años y 4 meses. Pero si vos os entretenéis en llamar con frecuencia a gentes para batiros en duelos, entonces sería necesario restar algo. Os enviaré la línea de vida en otra ocasión con la práctica de ésta, e incluso, una tabla de vida para cada edad, de año en año, lo cual apenas me costará construir.

El señor Conde de Warfuse[30] me ha dicho que el arreglo de lo de Rieux[31] está hecho.

Al Señor
Monsieur L. Huygens de Zulichem en La Haya.

N.º 1.777
CHRISTIAAN HUYGENS
Apéndice I al n.º 1.776
21 DE NOVIEMBRE DE 1669
La pieza se encuentra en Leiden col. Huygens.

Examinando los cálculos de mi hermano Luis.

21 de noviembre de 1669

Por las observaciones hechas en Londres con mucha exactitud

De cien personas concebidas mueren[a)]
- 36 al cabo de 6 años
- 24 entre 6 y 16 años
- 15 entre 16 y 26
- 9 entre 26 y 36
- 6 entre 36 y 46
- 4 entre 46 y 56
- 3 entre 56 y 66
- 2 entre 66 y 76
- 1 entre 76 y 86

[30] Se trata de L. Van Schagen Van Beyeren, personaje que aparece en la carta n.º 1.216 del Tomo VI de las obras de Huygens.

[31] Consultar la carta n.º 1.771.

a) Contienen desde la concepción porque en los billetes, los abortos están también marcados (nota del propio C. Huygens).

por lo que, de las cien personas, las que alcanzan la edad de

6 años son	64
16 años	40
26 años	25
36 años	16
46 años	10
56 años	6
66 años	3
76 años	1
86 años	0

Quien apueste por el hecho de que un niño concebido viva hasta los 6 años puede poner 64 contra 36, o 16 contra 9.

Y quien apueste que un niño concebido vivirá hasta los 16 años no puede poner más que 40 contra 60, o 2 contra 3, puesto que de cien sólo habrá cuarenta que vivan a la edad de 16 años.

Pero quien apueste que un niño de 6 años vivirá hasta los 16 podrá poner 40 contra 24 o 5 contra 3, ya que de las sesenta y cuatro personas de 16 años hay cuarenta que viven hasta los 26 años, y quince que mueren antes de esa edad.

De igual forma, quien apueste que un niño de 16 años vivirá hasta los 26 puede también poner 5 contra 3, puesto que de cuarenta personas de 16 años hay veinticinco que viven hasta los 26 años, y quince que mueren antes.

Quien apueste por que un niño de 6 años viva hasta los 26 puede poner 25 contra 39, puesto que de sesenta y cuatro niños de 6 años sólo hay veinticinco que sobreviven a la edad de 26 años, y los otros treinta y nueve mueren antes.

De manera semejante, sobre uno de 16 años, quien apueste que vivirá hasta los 36 puede poner 16 contra 24 o 2 contra 3, de manera que es un poco más aparente para uno de 16 años que para uno de 6, que viva aún 20 años más.

multiplicad ... que hace

multiplicad		que hace
36	por 3	108
24	“ 11	264
15	“ 21	315
9	“ 31	279
6	“ 41	246
4	“ 51	204
3	“ 61	183
2	“ 71	142
1	“ 81	81
		1.822

De cien niños concebidos mueren treinta y seis antes de la edad de 6 años, para los cuales se puede decir que han vivido, los unos con los otros, 3 años.

De los sesenta y cuatro restantes, de 6 años, mueren veinticuatro antes de la edad de 16, los cuales han vivido, los unos con los otros, 11 años. Y así para el resto, como está en esta tabla.

1.822		
108	para	100
1.714	para	64
264		
1.450	para	40
315		
1.135	para	25
279		
856	para	16
246		
610	para	10
204		
406	para	6
183		
223	para	3
142		
81	para	1

Por tanto, un niño concebido tiene 36 chances de vivir 3 años
y 24 chances de vivir 11 años
y 15 chances de vivir 21 años
etcétera.

Entonces, por mi regla de los juegos de azar, es necesario multiplicar cada número de chances por los años que dan, y dividir la suma de los productos, que es aquí 1.822, por la suma de todas las chances, que hacen aquí cien. Y el cociente, que es en este caso 18 años y alrededor de 2 meses y medio, será lo que vale la chance del niño concebido.

El método de mi hermano Luis llega al mismo resultado aunque es conseguido por otro camino.

Pero, aunque la esperanza de un niño concebido valga 18 años y 2 meses y medio, eso no quiere decir que sea aparente que viva tanto tiempo, pues es mucho más aparente que muera antes de ese plazo. De manera que, si se quiere apostar que él lo conseguirá, la partida sería desventajosa, pues se puede apostar con igual ventaja a que viva sólo hasta los 11 años aproximadamente. Además, él se engaña también diciendo que, cuando se apuesta a que un niño de 6 años o uno de 16 vivirán aún 20 años, la partida es igual. Pues sólo se puede poner 25 contra 39 sobre el de 6 años, y 2 contra 3 sobre el de 16, aunque la esperanza del uno y del otro valgan los citados 20 años, es decir, los apostantes se perjudicarían si aceptan asegurar como mínimo 20 años. Su cálculo es bueno para las rentas vitalicias.

Para saber en qué tiempo de cuarenta personas de 46 años morirán dos, tengo 1 año y 3 meses.

De diez mueren cuatro entre 46 y 56.

Por tanto, de cuarenta mueren dieciséis entre 46 y 56, es decir, en 10 años.

muertos	en	años	muertos	
16	—	10	2	1 año y 3 meses

Un hombre de 56 años se casa con una mujer de 16, ¿cuánto pueden vivir juntos sin que muera ni uno ni otro? O bien, si se me han prometido cien francos por cada año que vivan juntos, ¿por cuánto sería justo que se rescatase esa obligación? Item, en cuánto tiempo deben morir los dos.

¿En cuánto tiempo morirán cuarenta hombres de 46 años cada uno?

¿En cuánto tiempo morirán dos personas de 16 años cada una? Respuesta: En 29 años y 2 meses.

					Edad donde ellos llegan
A un niño concebido	le queda de vida	18,22	o	18 años 2b meses aprox.	18,22
A uno de 6 años	“	20,81	o	20 años 10 meses	26,81
A uno de 16 años	“	20,25	o	20 años 3 meses	36,25
A uno de 26 años	“	19,40	o	19 años 5 meses	45,40
A uno de 36 años	“	17,50	o	17 años 6 meses	53,50
A uno de 46 años	“	15,00	o	15 años 0 meses	61,00
A uno de 56 años	“	11,67	o	11 años 8 meses	67,67
A uno de 66 años	“	8,33	o	8 años 4 meses	74,33
A uno de 76 años	“	5,00	o	5 años 0 meses	81
A uno de 86 años	“	0,00	o	0 años 0 meses	86

Para saber cuánto vivirá la última de dos personas de 16 años es necesario imaginar que cada una de ellas extrae un billete entre cuarenta (completos) de los que hay

15 que dan 5 años
9 que dan 15 años
6 que dan 25 años
4 que dan 35 años
3 que dan 45 años
2 que dan 55 años
1 que da 65 años

Y que ellas tomarán los dos billetes, y aquél de más años será para la vida de la última.

Supongamos que el primero toma su billete, y es cierto que hay 15 chances de obtener uno que le otorga aún 5 años de vida. Y 9 chances por tener uno de 15 años de vida, y así. Ahora bien, si él toma uno de 5 años de vida, después de esto será necesario que la otra persona extraiga también su billete, y todo lo que le toque por debajo de 5 años no puede perjudicar, puesto que el primero tiene ya un billete de

5 años, de manera que todo lo que pueda tocarle al segundo de menos de 5 años vale tanto como los 5 años, pues este segundo tiene 15 chances de las que 7½ son para vivir menos de 5 años, y 7½ para vivir 6 o 7 u 8 o 9 o 10 años, que vale tanto como 7½ para vivir 8 años.

15 — 7½ — 5 7½ — 8 25 — 29,40	20,3
9 — 19½ — 15 4½ — 18 16 — 37½	24,3
6 — 27 — 25 3 — 28 10 — 45	30,2
4 — 32 — 35 2 — 38 6 — 51,67	37,6
3 — 35½ — 45 ½ — 48 3 — 58,33	46,1
2 — 38 — 55 1 — 58 1 — 65	55,3
1 — 39 — 65 1 — 66½	65,0

Y aún 25 chances que valen a un hombre de 16, 20, 40 años (pues éstos deben ser tomados como aquéllos después de que ninguna de esas 25 chances dan menos de 5 años). Entonces, el primero en sacar su billete tiene 15 chances de tener

7½ chances a 5 años
7½ chances a 8 años
25 chances a 29,40 años.

Este primero en extraer tiene también 9 chances de tomar un billete de 15 años, y habiendo tomado uno de ellos, todo lo que pueda sacar el otro de menos de 15 años vale tanto como 15 años. Pero este segundo tiene 15 chances que dan por debajo de los 15 años, que son entonces como 15 chances en 15 años. Y tiene 9 de los que 4½ son por debajo de 15 años, y las otras 4½ para 16, 17, 18, 19 o 20 años, que valen tanto como 4½ para 18 años. Y aún, 16 chances de vivir 37½ años. Por tanto, el primero en extraer tiene por eso

19½ chances a 15 años
4½ chances a 18 años
16 chances a 37½ años.

Y así siempre, como en el margen.

El primero en extraer

15	chances a	20,3	304,5
9	"	24,3	218,7
6	"	30,2	181,2
4	"	37,6	150,4
3	"	46,1	138,3
2	"	55,3	110,6
1	"	65,0	65,01
			1.168,7

Entonces 29,22[32] años será lo que vivirá la última de dos personas de 16 años cada uno. Es decir, que uno de los dos alcanzará la edad de 45 años 2b meses.

[32] Cifra obtenida al dividir la suma precedente por 40, el número total de chances.

Para saber en cuánto tiempo morirá una de dos personas, cada una de 16 años, es necesario imaginarse nuevamente que uno, y después el otro, saca un billete entre cuarenta (completos) donde hay quince que dan 15 años, nueve que dan 15 años, y así igual que en la cuestión precedente, pero aquí es necesario tomar los años del menor billete.

El primero en sacar su billete tiene 15 chances de vivir 5 años: 9 chances de vivir 15 años, y así. Y si toma uno de los quince billetes de 5 años, el otro, al sacar a continuación cualquier billete que extraiga, no puede servir de nada si pasa de los 5 años, puesto que de los dos billetes se fija el menor. Por el contrario, puede aún disminuir algo; pues es necesario considerar a su atención los quince billetes de 5 años, como si él tuviera 7½ por encima de 5, que no valdrán más que 5 entonces, y 7½ de 5 o 4 o 3 o 2 o 1 años. Ahora bien, este segundo, además de estos quince billetes o chances, tiene aún veinticinco que, también, sólo pueden tener como valor nada más que 5 años. Entonces, el primero en extraer tiene 15 chances para tener 7½ chances a 3 años y 32½ chances a 5 años.

El primero extrayendo tiene también 9 chances de conseguir un billete de 15 años. Y si saca uno de ésos, el otro, al extraer a continuación, no puede sacar nada que sirva para sobrepasar esos 15 años. Pero él los puede disminuir, primero si él saca uno de los 15 de 5 años o uno de los 4½ que estando por debajo de 15 valen tanto como 13 años; los otros 4½ valen sólo 15 también, aunque estén por encima. Ahora bien, este segundo además de estos 15 y 9, es decir, 24 chances, tiene aún 16 que también, sólo pueden valer 15. Entonces, el primero en sacar tiene también 9 chances para tener 15 chances a 5, 4½ chances a 13 y 20½ chances a 15[33].

N.º 1.778
CHRISTIAAN HUYGENS

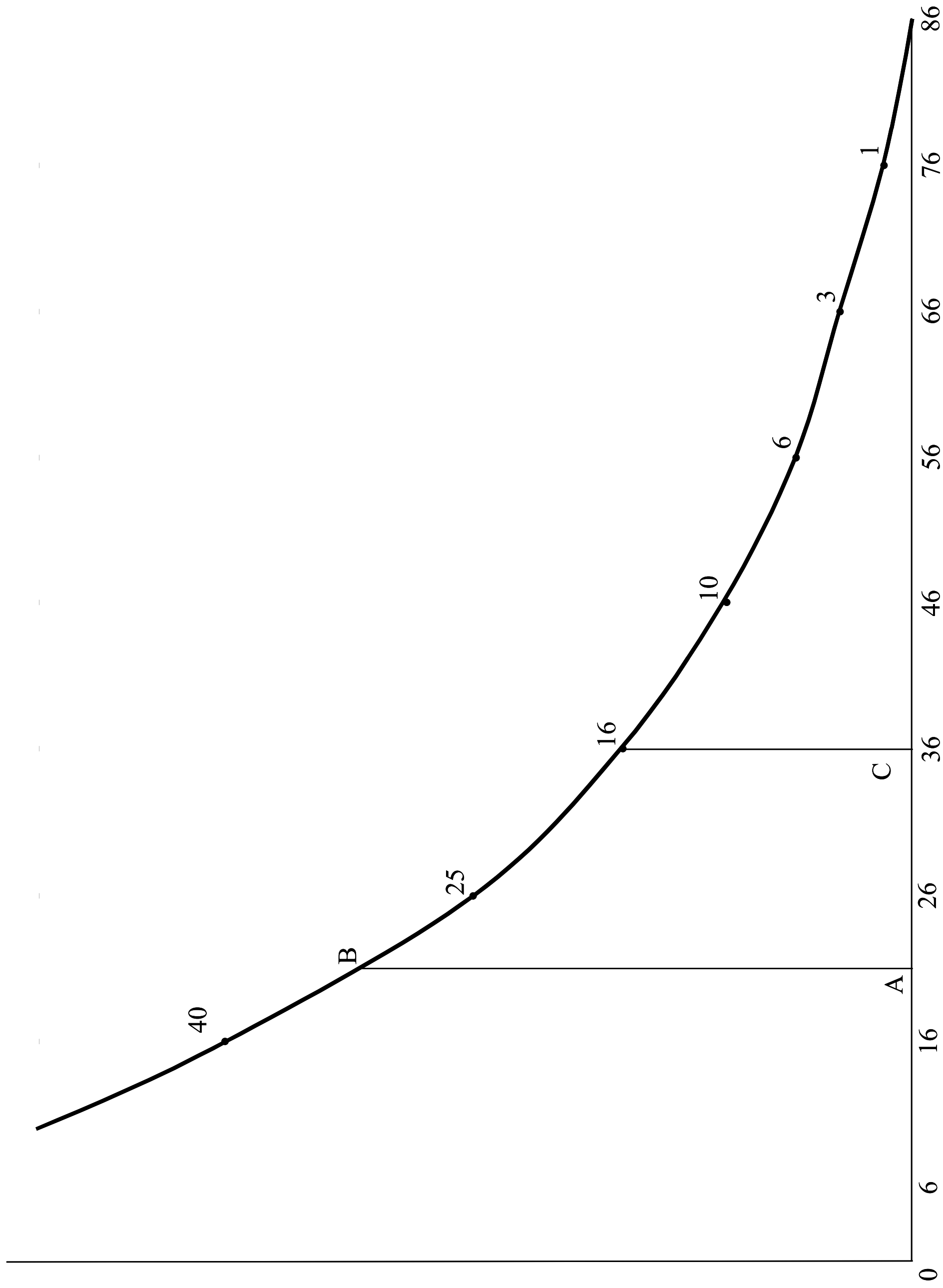
Apéndice II al n.º 1.776

21 DE NOVIEMBRE DE 1669

La pieza se encuentra en Leiden col. Huygens.

Sobre la línea derecha de apoyo están marcadas las edades de las personas y sobre los 6 años hay una perpendicular de sesenta y cuatro partes porque de cien personas, según la tabla inglesa, quedan 64 a la edad de 6 años. Sobre el 16 hay una perpendicular de 40 partes porque a la edad de 16 años quedan cuarenta personas de las cien que fueron concebidas, y así para el resto. Y por todos los puntos o

[33] Chr. Huygens no parece haber concluido este cálculo.


0
6
16
26
36
46
56
66
76
86
A
B
C
40
25
16
10
6
3
1

extremos de estas perpendiculares trazo la línea curva 64, 40, 25, y así. Si ahora quiero saber cuántas personas quedan después de los 20 años, de los cien niños concebidos, tomo sobre la línea de la base la edad de 20 años en el punto *A* desde donde, habiendo levantado una perpendicular que encuentra a la curva en *B*, yo digo que *AB*, que tomado sobre la escala de la base hace casi 33 partes, es el número de personas que de las cien concebidas alcanza la edad de 20 años, que si yo quiero saber a continuación cuánto queda de vida, razonablemente, a una persona de 20 años, por ejemplo, tomo la mitad de *BA* y lo ajusto en *DC* entre la curva y la recta, de manera que sea perpendicular a la última. Y tengo *AC* para los años que quedan de vida a la citada persona, que son casi 16 años, como parece por las divisiones, donde cada una es un año. La razón es que la perpendicular *DC*, siendo la mitad de *BA*, que marcaba el número de hombres de los cien que quedan 20 años después de la concepción, a saber, treinta y tres, este *DC* caído sobre 36 de la recta, señalará que queda la mitad de treinta y tres, es decir, 16½ hombres después del año 36. Entonces, puesto que de las treinta y tres personas de 20 años la mitad mueren, de ordinario, en los siguientes 16 años, se puede apostar con igual ventaja que una persona de 20 años viva aún 16 más. De igual forma, se encuentra que la vida de un niño concebido debe ser tasada aún en 11 años, en lugar de lo que mi hermano contaba de 18 años y 2 meses.

N.º 1.781
CARTA DE CHRISTIAAN HUYGENS A LODEWIJK HUYGENS
28 DE NOVIEMBRE DE 1669

La carta y la copia se encuentran en Leiden col. Huygens.

En París, el 28 de noviembre de 1669

El cálculo que os he enviado[34] os habrá desconcertado sin duda. Habiendo pensado después en ello, y también en el vuestro[35], encuentro que los dos tenemos razón tomándolo en sentido diferente. Vos dais a un niño concebido 18 años 2 meses y medio de vida, y es cierto que su esperanza vale tanto como esto. Sin embargo, no es aparente que viva tanto, pues es mucho más aparente que morirá antes de ese plazo, de manera que si se quiere apostar que él sobrevivirá, la partida sería desventajosa, pues sólo se puede apostar con igual ventaja a que él viva justo hasta los 11 años, aproximadamente. Así es como yo lo encuentro por mi manera. De la misma forma, la esperanza de un niño de 6 años o un muchacho de 16 vale los 20 años que

[34] Carta n.º 1.776.

[35] Carta n.º 1.771.

vos decís, pero vos no podéis concluir que apostando que él vivirá aún 20 años, la partida sería igual, pues para esto sólo se debería apostar 25 contra 39 en el de 6 años, y 2 contra 3 en el de 16, o de otro modo, sobre uno de 16 se puede apostar 1 contra 1 que él vivirá aún 15 años.

Por tanto, son dos cosas diferentes la esperanza o el valor de la vida futura de una persona, y la edad en la cual hay igual apariencia de que sobreviva o no sobreviva. La primera es para regular las rentas de vida, y la otra es para las apuestas. Veré si vos habéis hecho la misma distinción. No obstante, vuestro método es muy bueno y sutilmente encontrado. Llega justo a lo mismo que yo consigo siguiendo mis reglas de azar impresas en los *Exercitationes Mathematicae de Schoten*[36], diciendo que un niño concebido, por ejemplo, tiene 36 chances de vivir 3 años, 24 chances de vivir 11 años, y así pues es necesario, por la regla, multiplicar cada número de chances por lo que ellas dan, y dividir la suma de los productos por la suma de todas las chances para obtener el valor.

Para vuestros capitanes[37] os habéis servido de la tabla inglesa como creo. Diciendo si de diez personas mueren cuatro entre 46 y 56 años, entonces, de cuarenta morirán dieciséis entre los 46 y 56 años, es decir, en un período de 10 años. Entonces, dos mueren en un plazo de 1 año y 3 meses, por la regla de tres. Sin embargo, por este cálculo morirán dos de cuarenta en 15 meses, si los suponemos de 46 años cada uno[38] y no de 50. E incluso no harían por completo los 15 meses, puesto que no mueren por igual durante esos 10 años, sino que más durante los primeros años, debido a que el número de personas es mayor entonces que después de que la muerte haya restado algunos.

He aquí una cuestión bastante bonita que parece mucho más difícil que la de los capitanes, y que yo no tengo aún calculada, pero veo el medio de hacerlo. Dos personas de 16 años cada uno, cuánto pueden ellos esperar vivir juntos sin que el uno o el otro muera. Además, en qué tiempo habrán muerto los dos. Éstas son, en efecto, dos cuestiones diferentes, y hay que pensar en cada una de ellas[39].

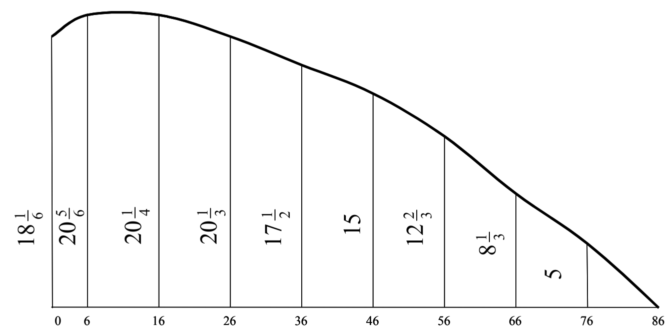
---

[36] Donde se encuentra la obra de C. Huygens, *De ratiociniis in ludo aleae*.

[37] El problema de los capitanes parece haber sido planteado por Lodewijk Huygens en alguna carta que no se conserva, escrita después de la 1.771. Sin duda, se trata de calcular el tiempo que transcurrirá antes que de 40 capitanes, de 50 años de edad, mueran dos.

[38] En la pieza n.º 1.777 el problema es tratado de esta forma.

[39] Estos problemas son tratados en la pieza n.º 1.777.



Si las edades de las dos personas son planteadas diferentes, como la una de 16 y la otra de 56, esto aportaría aún algún cambio, pero no tendría mayor dificultad después de que se haya encontrado la solución con las edades iguales. La línea curva de la que os he hablado en mi precedente sólo sirve para las apuestas, por lo que no es necesario que yo os la envíe, pero se puede hacer así una para suplir vuestra tabla de los restos de vida de cada edad, pero con mayor volumen.

El cónsul[40] os ha encontrado oportunamente ocupado en estos cálculos. Deseo que este admirador se mantenga en su promesa respecto de la cuestión de completar las plazas vacantes, y quisiera ya ver nuestra capitana con los péndulos en el mar. He mandado a mi padre la razón por la que no envié copia de la última relación, y es necesario que vos no hayáis visto su carta.

Me someto sencillamente a vuestras consideraciones y a las del señor Van Leeuwen en lo tocante a la residencia, y para mí en particular me gustaría muchísimo más que encontraseis algún empleo o alguna sociedad en el país. ¿Pero creéis vos además que aquéllos que *rerum potiuntur* os considerarán válido para este cargo?

Recibí vuestra carta[41] en casa de la señora Caron[42] y les ofrecí, en ese momento, vuestras felicitaciones a ella y a la recién casada[43], y les testimonié que se aprobaba la cuestión entre el parentesco. Había escrito al señor Schott para pedirle información, y me ha dicho mucho de bien, de gentilhombre, en su respuesta. Es de la religión y primogénito de la casa. Se tiene que hacer cargo del matrimonio de dos de sus hermanas a diez mil *u*[44] cada uno, pero él tiene suficiente, según lo que me cuenta el señor Schott.

[40] David Suerius. Aparece en la carta n.º 1.552 de este tomo VI.

[41] No se ha encontrado esta carta de Lodewijk a Christiaan.

[42] Constance Boudeau, viuda de Caron.

[43] Madame la Ferté, nacida Susanne Caron.

[44] Símbolo de una moneda holandesa de la época.

Leí a las primas, también, la admirable aventura del comisario Schotte[45] a quien la madre conoce muy bien. Tratad de olvidaros de lo otro si es posible.

Olvidé vuestro libro de cifras y versos para la señora de Beverning[46]. Acabo de apartarlo lo uno y lo otro en mi repisa.

¿Cómo se encuentra la señorita Ida?[47]

[45] Quizá se refiere a Jacobus Schott, nacido en La Haya en 1619 y fallecido en 1670. Estudió jurisprudencia en Leiden y acabó siendo consejero de la Corte Suprema.

[46] Aparece en la carta n.º 1.753 del tomo VI.

[47] Ida Van Dorp había estado muy enferma. Véase la carta n.º 1.771.

CAPÍTULO 5

El problema del testimonio

Mary Sol de Mora Charles
UPC-ICREA/UPV-EHU

El testimonio ha sido utilizado a veces como criterio de verdad. En realidad se inserta en un problema mucho más amplio, el problema de la decisión, y así sucede en el caso de Leibniz.

Ante una situación contingente, hay que tomar decisiones que no vienen totalmente justificadas por el Arte de la Demostración o del Juicio, sino que pertenecen al Arte de Conjeturar. Ya Pascal había señalado esta necesidad de decidir en sus *Pensées*:

> *Si no hubiera que hacer nada, excepto por aquello que es seguro, no se debería hacer nada por la religión, pues no es algo seguro. Pero cuántas cosas se hacen por algo incierto, los viajes por mar, las batallas. Así pues, digo que no habría que hacer nada en absoluto, pues nada es seguro... Ahora bien, cuando se trabaja para mañana y para lo incierto, se actúa con razón, pues se debe trabajar por lo incierto según la regla de los «partis» que está demostrada. San Agustín ha visto que se trabaja para lo incierto... pero no ha visto la regla de los «partis» que demuestra qué se debe hacer*[1].

[1] Ediciones Brunet, pág. 234, Lafuma, pág. 577. Citado en Mora Charles, 1989, pág. 147. Nota 19.

Y también Leibniz considera esa situación:

> *...El hombre se encontraría indeciso en la mayor parte de las acciones de su vida si no tuviera nada para conducirse cuando le falta un conocimiento certero. Con frecuencia es necesario contentarse con un simple crepúsculo de probabilidad*[2].

Podríamos clasificar esas decisiones que se han de tomar sosteniendo que son fundamentalmente de tres tipos:

- *Decisión de creer* en el testimonio de alguien o de algo; lo que nos conduce a una enorme variedad de aplicaciones, desde los problemas de la jurisprudencia, tan caros a Leibniz, hasta los referentes a la religión: credibilidad de los milagros, de las Sagradas Escrituras, etcétera, y tantos otros.
- *Decisión de saber:* Relacionado con el epígrafe anterior está el problema de la transmisión de la información, ya no necesariamente basada en el testimonio, sino cualquier tipo de información de origen experimental o teórico; los problemas de las votaciones, encuestas y elecciones que estudiará Condorcet entrarían en este apartado.
- *Decisión de actuar:* El otro aspecto de la decisión es la actuación: la conducta del individuo en su vida cotidiana, las decisiones comerciales, la ciencia, la técnica. Todo ello dará lugar posteriormente a la llamada Teoría de la Decisión, de carácter matemático y que sin embargo fue inventada por Pascal en su famosa apuesta sobre la existencia de Dios.

Y la base matemática de estas decisiones es precisamente, como hemos visto en las citas anteriores, lo que llaman los autores de la época el cálculo de los «partis», la Teoría De Alea, es decir, la Teoría de la Probabilidad.

La Teoría de la Probabilidad, desde su comienzo, ha sido aplicada a temas «no científicos», tales como la conducta de la vida diaria, los riesgos que un hombre prudente debe afrontar en el juego, en el comercio o respecto a su fe; la credibilidad que se debe conceder a los testimonios humanos, bien en los tribunales o en otros asuntos legales, bien en lo referente a la religión. Y en éste último caso, la transmisión de las tradiciones orales o escritas, la credibilidad de los milagros, etcétera. A continuación haremos un breve repaso de la historia de estas aplicaciones.

---

[2] «1.Ph. L'homme se trouveroit indeterminé dans la pluspart des actions de sa vie, s'il n'avoit rien à se conduire dès qu'une connoissance certaine luy manque. 2. Il faut souvent se contenter d'un simple Crepuscule de probabilité.» *S.S.*, VI, pág. 438, *Du Jugement* (Nouveaux Essais).

La credibilidad del testimonio

Para comenzar, debemos hacer una distinción entre el autor que ha sugerido la idea y el que ha establecido su fundamento matemático. La idea es muy antigua. Ya en la época medieval encontramos precedentes de los conceptos de la Teoría de la Probabilidad y su aplicación a los problemas de transmisión de la información, sobre todo en el caso de informaciones relacionadas con la religión. Encontramos así autores como Santo Tomás, para quien el problema de la verosimilitud de las Sagradas Escrituras se plantea justamente para ser negado: los autores de la Biblia eran hombres, pero sobre todo eran instrumentos de Dios. Es Dios quien ha escrito la Biblia. No se trata de una cuestión de opiniones verdaderas o falsas; lo que se dice en ella, se dice con la certeza divina.

Por otra parte, para aceptar una información que nos ha sido transmitida, es necesario lo mejor de lo que piensan los mejores hombres, y para Santo Tomás, los santos son en este caso de mayor utilidad que los filósofos[3]. La palabra *probable* se utiliza aquí todavía en su acepción epistemológica.

Es difícil asegurar quién fue el primero que sugirió la idea de aplicar el análisis matemático al testimonio y también quién fue el primero que estableció los fundamentos de su tratamiento matemático. Condorcet piensa que fue Nicolás Bernoulli en su tesis de 1705. Como veremos, tampoco fue John Craig quien hizo la primera sugerencia de la pertinencia de aplicar las matemáticas al testimonio, como pretende Karl Pearson en sus lecciones sobre la *Historia de la Estadística*[4], sino Leibniz, aunque éste no realizara personalmente los cálculos sino propusiera hacerlo a otros. De todos modos, Craig, en su *Theologia Christiana Principia Mathematica* de 1699, nos aparece como un autor original, y enuncia algunos principios fundamentales, aunque es poco verosímil que hubiera leído a Pascal, Fermat o Huygens, si bien había realizado algunos trabajos sobre el cálculo de superficies y de fluentes. Para Pearson, en cualquier caso, la primera sugerencia aparece en la obra de John Craig, en 1699, antes del *Essai* de Montmort (1708), pero después de Pascal, Fermat y Huygens.

Las ideas de Craig eran originales, no conocía la Teoría de la Probabilidad de su época ni era un jugador de dados o cartas. Craig ve que la creencia es proporcional a la probabilidad y que la tradición se debilita con el paso del tiempo, con la distancia respecto al suceso y con el número de individuos a través del cual se comunica, pero en cambio se refuerza con el número de testigos y de líneas independientes de tradición.

[3] Para más información, véase el libro de EDMUND F. BYRNE (1968): *Probability and Opinion*, Nijhoff, La Haya.

[4] KARL PEARSON (1978): *The History of Statistics in the 17th and 18th Centuries*, ed. E. S. Pearson, Griffin, London.

Craig no conoce la idea de producto de probabilidades independientes, lo que hace es sumar todos los factores para obtener la probabilidad total. Hace depender a su factor tiempo de la inversa del cuadrado del tiempo y a su factor espacio de la inversa del cuadrado de la distancia. Obtiene así una fórmula para la credibilidad:

$$p = x + (m - 1)s + (k\,T^2)/t^2 + (q\,D^2)/d^2$$

donde x = probabilidad de que transmita el primer testigo
m = número de testigos en la cadena
s = sospecha originada por una transferencia
t = intervalo de tiempo transcurrido
d = distancia del suceso
k, T, q, D = constantes

Para conseguir que $p = 0$, damos a s, la sospecha, valores negativos. La fórmula entera es perfectamente arbitraria. Su argumentación consiste en que, en lo que se refiere al testimonio oral, la credibilidad respecto a la vida de Cristo se anulará en 800 años. En cuanto al testimonio escrito, la credibilidad desaparecería también en 3.150 años; es decir, 1.451 años después de su propia época. De ese modo, la segunda venida de Cristo sobre la Tierra tendrá lugar cuando ya no haya fe en el mundo, como decía el Evangelio. (Lucas, XVIII, 8.)

Otros autores proponen otras fechas igualmente arbitrarias. Como Robert Peterson, para quien la credibilidad se anularía en 1789, y tanto en el siglo XVII como en el XVIII éste será un tema de interés general y se propondrán otras muchas fechas similares.

Poco después aparece, en las *Philosophical Transactions* de la Royal Society de Londres, en 1699, un texto anónimo: «Un cálculo de la credibilidad del testimonio humano». En el *Diccionario de Biografías Nacionales* de Londres[5], 1908, aparece el nombre de George Hooper, obispo de Bath y Wells, como autor de dicho artículo. Pearson cita los nombres de Arbuthnot, Robartes, De Moivre, y se decide por Edmond Halley, opinión que nosotros aceptamos[6].

En el mencionado artículo se hace depender la credibilidad de un informador de su integridad y fidelidad así como de su capacidad de aprehender y retener. Se hace la distinción entre el caso de varios informadores individuales sucesivos y los testimonios concurrentes. Quien escribió el artículo sabía cómo medir la probabilidad y lo que son los sucesos y también sabía algo de seguros. Su planteamiento es el siguiente:

---

[5] Es el *Dictionnary of National Biography*, London, 1908, vol. IX.

[6] Véase MORA CHARLES (1986): «Una aplicación de la Teoría de la Probabilidad a problemas filosófico-teológicos: Edmond Halley (?) 1699», *Actas del III Congreso de la SEHC*, págs. 301-313.

Si $5/6 = p$ es la credibilidad del informador, 1.200 L = cantidad que se me afirma recibiré, (5/6) 1.200 = 1.000 y por lo tanto tengo seguras 200 L, que decidiré *asegurar*.

En general, tras n informadores en cadena, con la misma credibilidad, el valor final será pn. En cuanto a la fórmula es ahora: $p = a/(a + c)$, donde p es el valor actual de la suma de dinero a pagar al interés c al final del año y según la credibilidad del informador, así durará (en años) la credibilidad del informe. La fórmula de Condorcet, $p^n = 1/2$ tiene aquí un precedente de más de un siglo.

Respecto a los testimonios concurrentes, tenemos que el primer testigo me da una esperanza de sp_1 y me deja $s - sp_1$ sin asegurar, el segundo $s(1 - p_1)p_2$ y me deja $s(1 - p_1)(1 - p_2)$, etcétera. El autor supone $p_1 = p_2 = p_3 =$... aunque ello no es necesario. Dice que si un único testigo tiene una credibilidad 1/2, dos testimonios darán una credibilidad 3/4, un tercero, 7/8, etcétera. En esto también es precursor de Condorcet. Pearson considera correcta esta proposición, pero está menos seguro de la corrección de las demás.

La importancia de este artículo se encuentra en que de él fluye de manera natural la tesis de Nicolás Bernoulli y las concepciones de Diderot, Condorcet y, por último, Poisson. En esto Pearson discrepa radicalmente de Todhunter, que consideraba que las ideas aquí expresadas no se sostienen y las descartaba como absurdos.

Más tarde, en 1705, encontramos por una parte la tesis doctoral de Nicolás Bernoulli[7] y de otra, en 1708, el *Essai* de Montmort[8].

Bernoulli, en el último capítulo de la mencionada tesis, «De fide testium et de suspicionibus gradum fidei», propone una fórmula para el «grado de fe» y utiliza las frecuencias, al tiempo que aconseja tomar la media aritmética, cuando ello sea posible, con casos similares en el pasado.

Montmort, por su parte, también comenta este tema, que como decíamos antes, en el siglo XVII estaba de plena actualidad, aunque al lector de hoy le pueda parecer sin sentido. Habla Montmort del artículo de las *Philosophical Transactions* que acabamos de mencionar, sin proponer un nombre para el autor. En cuanto al libro de Craig, admira al autor que, según dice, se propone probar contra los judíos la verdad de la historia de Jesús y demostrar a los libertinos que el partido que toman de preferir los placeres de este mundo, tan pequeños y de tan corta duración, a la esperanza, aunque sea incierta, de los bienes prometidos a los que siguen la Ley del Evangelio, no es un partido razonable ni conforme a sus verdaderos intereses.

---

7 NICOLÁS BERNOULLI: *Dissertatio Inauguralis Mathematico-Juridica de Usu Artis Conjectandi in Jure*, 14 de julio 1709, Basilea.

8 PIERRE RÉMOND DE MONTMORT (1708): *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, París.

En esta última parte de su artículo, Halley comparaba la duración de los placeres con su intensidad, utilizando «bellos y sabios teoremas», según Montmort, pero que no eran verdaderamente necesarios, porque el tema es, dice, muy fácil de demostrar.

Para Montmort, de todos modos, la ejecución de lo que el autor se propone en la primera parte (es decir, la verdad de la historia de Jesús) es ciertamente imposible, y no puede creer que el autor no se haya dado cuenta de ello. Proponiendo otras hipótesis igualmente verosímiles, habría podido encontrar cifras muy diferentes, de manera que sus comentarios constituyen una extraña mezcla de fe y racionalidad.

Es interesante observar cómo los primeros escritos de Leibniz, sus obras sobre derecho de 1664, 1661 y 1670, son anteriores a todos estos comentarios y, aunque no se aplican al testimonio sobre temas de religión, constituyen un interesante precedente. En el punto de partida, encontramos una preocupación común, la de la certidumbre. Leibniz realiza una investigación centrada sobre la interpretación. También para Tullio Ascarelli, en su estudio sobre Hobbes y Leibniz[9], este último intenta conciliar lo necesario con lo contingente.

Para encontrar fácilmente la solución de un caso particular cualquiera, el jurista debe esforzarse por descubrir la unidad lógica de los diversos datos jurídicos.

En el *De Casibus*, Leibniz intenta demostrar que es posible resolver mediante la lógica todas las cuestiones que se le pueden plantear al intérprete de la ley. Por ejemplo, el caso de testimonios contradictorios.

Leibniz parte de la idea de que los casos de incertidumbre existen e intenta enumerarlos. Distingue tres grados en la justicia que muestran el aspecto contingente de la ley humana:

- el *jus strictum*, el derecho de propiedad, que existe ya en el estado de naturaleza.
- *l'aequitas*, la sociabilidad y la paz.
- la *pietas*, el respeto de una voluntad superior, la voluntad de Dios.

Así pues, será en lo contingente donde habrá que aplicar el cálculo de probabilidades, como hará más tarde el propio Leibniz.

---

[9] TULLIO ASCARELLI (1966): *Hobbes-Leibniz*, traduc. francesa Ducouloux & Favard, Ed. Dalloz, París. En esta edición se encuentran:

LEIBNIZ (1664): *Specimen quaestionum philosophicarum ex jure collectarum*.
——— (1663-67): *Doctrina conditionum*.
——— (1666): *De casibus perplexis*. Su tesis doctoral.
——— (1670): *De interpretatione*.

Tomados de la edición: *G.W. Leibniz, Samtliche Schriften und Briefe* (1930), Preuss. Akad. der Wiss., Darmstadt, VI, I 69 s., 231 s., 369 s.

En el *Specimen demonstrationum politicarum* de 1669, consecuente con lo anterior, emplea el razonamiento matemático para demostrar que el único candidato digno de ser elegido para el trono de Polonia era Felipe Guillermo de Neuburg. Para Leibniz, la diversidad de soluciones no resulta más que de un cálculo equivocado, porque el cálculo no conduce nunca más que a una solución y a una sola.

La probabilidad de verdad que se podrá descubrir en el derecho positivo no es más que un atisbo de la verdad que le es necesaria al derecho natural.

La probabilidad para Leibniz es un criterio objetivo de verdad. Es una lógica de lo contingente que se contrapone a la lógica de lo necesario, igual que la lógica de las matemáticas es insuficiente para el derecho.

La probabilidad permite pues alcanzar la verdad. Constituye una justificación de la acción y muestra también que en todo acto de voluntad hay necesariamente una apuesta que, ante la imposibilidad de lograr una verdad perfecta, marca al menos la racionalidad de la acción.

También en la *Encyclopédie Française*, artículo «Probabilité», encontramos que se considera al testimonio como una de las fuentes de la probabilidad y se distinguen en él algunas condiciones:

1. Que, por su naturaleza, la cosa transmitida o contada sea posible.
2. Cuando se han sopesado las pruebas que se desprenden de la naturaleza misma de la cosa, y se ha reconocido la posibilidad, en cierto sentido el grado de probabilidad intrínseca, hay que pasar a la validez misma del testimonio.
3. El testimonio es tanto más probable cuanto mayor sea el número de testigos.
4. En cuanto a la fe que merece cada testigo, está basada en su capacidad y en su integridad.
5. Está claro que, en igualdad de circunstancias, un testigo de oídas es menos digno de crédito que un testigo ocular.
6. Si el testimonio se transmite por escrito, la probabilidad aumenta infinitamente[10], puesto que subsiste y se conserva mucho más tiempo; el testimonio concurrente de diversas copias o libros impresos que forman otras tantas cadenas diferentes da una probabilidad tan grande que se acerca indefinidamente a la certeza.

Así pues, es evidente que ya no se trata aquí de la fe, pero no obstante se continúa creyendo en la Teoría de Leibniz, Craig y otros autores para los casos más materiales y cotidianos.

[10] No se trata aquí de que aumente al infinito en el sentido moderno, es un término impreciso que se refiere más bien a ese «acercarse indefinidamente a la certeza».

Y en el artículo de Condorcet, «Sección Matemáticas», páginas 640-663, se habla de la probabilidad del testimonio. Esta idea era según Pearson original de Condorcet, salvo por alguna sugerencia de Nicolás Bernoulli. Según Condorcet:

Si p = probabilidad de que uno de los testigos diga la verdad y p' = probabilidad de otro testigo, si ambos afirman que un suceso ha tenido lugar, la probabilidad de que eso sea cierto será pp'. Pero si el primero miente y el segundo dice la verdad, la probabilidad de que sea cierto el suceso será $(1-p)p'$ *y al contrario,* $p(1-p')$*. Mientras que* $(1-p)(1-p')$ *es la probabilidad de que ambos mientan y el suceso no haya tenido lugar.*

Por lo tanto, $pp' + (1-p)p' + (1-p')p$ es la probabilidad de que el suceso haya tenido lugar.

Se pueden hacer dos críticas a esta teoría. En primer lugar Condorcet supone que los testimonios de cada testigo son independientes y es muy difícil que no haya alguna correlación entre ellos. En segundo lugar está la dificultad de medir la probabilidad p de que un testigo diga la verdad.

Condorcet habla también de la debilitación de la evidencia transmitida oralmente a medida que la cadena de narradores se alarga, al ser p^n y p menores que 1.

La decisión de saber. La opinión oficial

El caso de Condorcet[11] es muy interesante. Se interesa por la probabilidad de la verdad, es decir, por un lado, trata de encontrar un método para tomar la decisión correcta en los tribunales y en las elecciones, le preocupa el problema de las decisiones por mayoría de votos. Con él aparece el término «motif de croire», nombre que él atribuye a una interpretación decisional de la probabilidad. En su texto de 1785, contamos con 191 páginas de discurso preliminar y 304 páginas del *Ensayo* propiamente dicho. El discurso preliminar es muy largo, pero constituye, como decía Pearson, «una bendición», porque aclara mucho la oscuridad de la matemática de Condorcet. En el *Ensayo* mismo aparecen números y fórmulas algebraicas que a veces ocupan toda una página.

---

[11] CONDORCET (1785): *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Décissions rendues à la pluralité des voix*, París.

CONDORCET (1805): *Eléments du calcul des probabilités, et son Application aux Jeux de Hazard, à la Loterie et aux jugements des hommes*, París.

Véanse también los textos recogidos en:

CONDORCET (1986): *Sur les élections*, ed. O. de Bernon, Fayard, París.

CONDORCET (1975): *From Natural Philosophy to Social Mathematics*, ed. K.M. Baker, U. of Chicago Press.

El punto clave del tratado de Condorcet es el temor a una democracia inculta. Es interesante leer en su prólogo que la voluntad de la mayoría debe acatarse para evitar las rupturas y no porque sus decisiones sean conformes a la verdad; se trata sólo de equilibrar los intereses y pasiones de los diferentes grupos.

Así, en un grupo o asamblea, si la probabilidad de que cada individuo tome la decisión correcta es mayor que 1/2, la probabilidad de que la decisión sea correcta aumenta con el número de individuos o votantes, pero si es menor que 1/2, disminuye, de ahí la importancia de la educación o buena información del votante o del juez y de su ausencia de prejuicios. Es improbable que una asamblea numerosa esté compuesta de hombres extremadamente inteligentes y cultos.

Condorcet piensa que sólo cuando todos los miembros de la sociedad son igualmente ignorantes, tiene sentido una asamblea muy numerosa.

A menos que se lean sus obras matemáticas no se puede entender la acción política de Condorcet, pues es una aplicación de las mismas. Así, Condorcet proyecta una constitución en la cual algunos artículos se colocan fuera del alcance de una asamblea legislativa, de modo que para modificarlos sea necesario un proceso lento y dificultoso. Condorcet insistía en que las cortes de justicia deberían estar separadas de la legislatura. Un voto de la asamblea no debería enviar a un hombre a la guillotina.

Sostiene que es preferible que escape un culpable a condenar a un inocente. Condorcet establece una binomial $(v + e)^{2q+1}$ donde v = probabilidad de que un votante se decida por la verdad, e = por el error y $2q+1$ es el número de votantes. Se muestra que si, por ejemplo, tenemos once miembros en un jurado y cada uno se equivoca una vez de cada tres, $v = 2/3$; $e = 1/3$, tenemos una probabilidad de acertar de 0,8779, en lugar de 0,6667, que tendría un solo juez. Se supone naturalmente que estas reglas son para hombres libres de toda disciplina de partido a la hora de votar o, si se quiere, de todo prejuicio.

El valor V_q, verosimilitud para q individuos, tiende a uno si v es mayor que e, por poco que sea, cuando q tiende a infinito. Es decir, que *Vox populi, vox Dei*, pero sólo en este caso. Recuérdese que v y e son probabilidades de acertar o de errar para cada individuo, por eso q ha de ser muy grande.

Se plantean entonces dos problemas: el tamaño de la mayoría exigida para obtener un veredicto o resultado: $2q + 1$; y el número de casos en que no se puede obtener un veredicto $f(q)$, que puede ser grande en los cálculos de Condorcet.

Uno de los casos que Condorcet estudia, muy interesante, es el de la decisión mediante un cierto número de tribunales consecutivos concordantes, r.[12]

[12] Todhunter expone esta teoría en su libro de 1865, (págs. 361-8) con más claridad que el propio Condorcet y estudia el caso de r tendiendo a infinito. Es el problema de los «runs». También De Moivre en su *Doctrine of Chances* se ocupa de este tema.

Otra de las conclusiones de Condorcet es que si los electores tienen que votar por uno de varios candidatos (tres o más) es muy probable que el candidato o línea de acción ganadores representen en realidad a una minoría de votantes. El texto de Condorcet, a pesar de su ingenuidad y de su formulación farragosa y a veces confusa, es muy denso y está lleno de sugerencias interesantes.

La tercera parte del texto de Condorcet (págs. 176-241), trata de problemas bayesianos: lo que los jurados harán en el futuro sólo podemos conocerlo por lo que hicieron en el pasado.

La cuarta parte (págs. 242-78) estudia las variaciones que puede sufrir v para cada votante, de la influencia de unos votantes sobre otros, de la pasión y de la mala fe de un votante o jurado. Todas estas innumerables variantes hacen que la cuestión resulte prácticamente insoluble. Condorcet intenta paliar los inconvenientes y por ello está completamente en contra de la condición de unanimidad que rige en los jurados ingleses, por ejemplo.

En otra de sus obras, *Eléments du Calcul des Probabilités, et son Application aux Jeux de Hazard, à la Loterie, et aux Jugements des Hommes*, París, 1805, se encuentra una traducción de las *Cartas a una princesa alemana* de Euler y fue publicada a los 10 años de la muerte de Condorcet. En la cuarta sección se habla de la creencia como proporcional a la probabilidad. Y también emplea el término «motif de croire», que Poisson[13] llamará «raison de croire». Para Condorcet es fácil ver que el «motivo de creer» en un caso dado que el suceso se repetirá a sí mismo, es exactamente el mismo que nos induce a creer que un fenómeno constantemente observado se repetirá bajo circunstancias similares. Este motivo para creer que un suceso altamente probable volverá a ocurrir es el mismo que nos hace creer en la constancia de las leyes de la naturaleza. Por este tipo de textos, Pearson cree que Condorcet es el primero que expresó claramente que el principio de la estabilidad de los valores estadísticos tiene la misma base que la constancia de las leyes naturales.

También discutía Condorcet algunas de las bases de nuestras creencias, tales como la experiencia del tamaño de los objetos en la distancia. El fundamento de nuestros juicios de probabilidad sería el conocimiento de la naturaleza que obtenemos de experiencias repetidas.

Pero toda esta doctrina ha sido posible gracias a la intervención del Teorema de Bernoulli. La regla de Bayes, como dice Rashed[14] en su libro sobre Condorcet, ha

---

[13] S. D. POISSON (1837): *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile, précédés des règles générales du calcul des probabilités*, París.

[14] ROSHDI RASHED (1974): *Condorcet, Mathématique et Société*, Hermann, París.

proporcionado a una doctrina de la creencia o de la credibilidad una medida precisa, la cual ha permitido a la interpretación decisional un cambio de naturaleza.

Pierre Simon de Laplace (1749-1827), en su *Essai Philosophique sur les Probabilités* de 1795, sostiene que la probabilidad de error o de falsedad por parte del testigo se hace tanto mayor cuanto más extraordinario es el hecho atestiguado; así pues, los argumentos de Craig o de Pascal acerca de la existencia de Dios son de nuevo criticados.

En cuanto a Craig, que pensaba que esta gradual debilitación de las pruebas de la religión cristiana acabaría 1.454 años después de su época, Laplace encuentra su análisis incorrecto y su hipótesis estrafalaria.

Para Laplace el análisis matemático era sobre todo un instrumento que él adaptaba a los más variados usos, pero siempre subordinando el método empleado a las necesidades del problema particular. Más tarde[15] hablará también del «grado de fuerza que provoca la convicción», aunque dirá:

> *Tantas pasiones, intereses diversos y circunstancias complican las cuestiones relativas a estos objetos, que son prácticamente siempre insolubles*.[16]

Nunca se refiere a Condorcet o a Bayes (y en general a otros autores), aunque es evidente que utiliza sus resultados y sus ideas. Codifica los conocimientos existentes sobre probabilidad y la amplía.

Su texto más famoso, *Essai Philosophique sur la Probabilité*, de 1812, está basado en lecciones de 1795 y fue reeditado en 1814. La situación en Francia influye bastante en sus exposiciones. La probabilidad tenía entonces intereses muy mundanos y sus resultados afectaban con frecuencia a instituciones sociales y políticas. Condorcet, el enemigo de los jacobinos, había sido condenado a muerte en el año 1794, el año anterior a las lecciones de Laplace. Era pues un tema peligroso y todos los hombres de ciencia estaban bajo sospecha, especialmente los que se ocupaban de probabilidades. No es pues extraño que Laplace no mencione a Condorcet. En sus lecciones[17] habla de las decisiones de una asamblea y esto se publicará en 1812, pero en 1814 el texto es revisado[18]. Laplace apunta que las probabilidades de los sucesos simples son desconocidas y que sólo tenemos a los sucesos pasados para guiarnos a las causas de las que dependen. En la edición de 1814, el ensayo filosófico aparece como introducción a la *Teoría analítica* y se

---

[15] P. S. LAPLACE (1795): *Essai philosophique sur les probabilités*.

[16] «Tant de passions, d'intérêts divers et de circonstances compliquent les questions relatives à ces objets, qu'elles sont presque toujours insolubles», *Théorie Analytique des Probabilités*, pág. CXXXVIII.

[17] Véase *Oeuvres*, XIV, pág. 173.

[18] Véase *Oeuvres*, VII, págs. LIII-LIV.

plantea el problema del conocimiento de todos los factores que influyen en un fenómeno. La fórmula famosa que aparece en este último texto es que la probabilidad tiene relación en parte con nuestra ignorancia y en parte con nuestro conocimiento.

La Teoría de la Decisión

En estrecha relación con la transmisión de la información se encuentra la Teoría de la Decisión. Después de haber recibido las informaciones, hay que decidir. Pero las primeras aplicaciones de esta teoría tienen también un carácter religioso. Se trata de elegir el tipo de vida que se debe llevar sobre la tierra para obtener en todos los casos la utilidad máxima, es decir, la máxima felicidad, tanto si Dios existe como si no. Se trata aquí de un problema en el que como decíamos más arriba, no tenemos datos experimentales, no se pueden realizar pruebas.

El ejemplo más conocido de este tipo de aplicación es la Apuesta de Pascal (publicada póstumamente en 1670), ya tratada por muchos autores, tanto del campo de la religión como de la ciencia[19]. Pero en su época, muchos otros han elegido este método de demostración o defensa de la existencia de Dios con el instrumento de la geometría, es decir, en este caso, de la probabilidad. Entre estos autores se encuentra uno muy interesante, Richard Price, que publica en 1787 su libro *Una revisión de las principales cuestiones morales*[20]. Price era un clérigo, y la mayor parte de sus obras son de este género, pero también estaba bien dotado para las matemáticas y su presentación del famoso trabajo de Bayes, publicado en las *Philosohical Transactions*, lo atestigua. En el libro de Price podemos encontrar varios puntos de interés desde el punto de vista de la probabilidad. Por ejemplo, intenta mostrar la posibilidad de una probabilidad tan pequeña que se la pueda considerar nula, sin ser no obstante cero. Pero lo más interesante se encuentra en la Conclusión, en la que retoma el problema propuesto por Pascal en su Apuesta, el de la ventaja que hay en ser «virtuoso» en este mundo para obtener la felicidad en el otro.

En este comentario podemos encontrar elementos nuevos respecto a Pascal; por ejemplo, Price reconoce que aunque la virtud tiende siempre a la felicidad, y aunque su naturaleza es aumentar nuestra ventura y mejorar nuestra condición, en la medida en que la poseamos, no obstante el estado de las cosas aquí abajo es tal que con frecuencia el resultado es otro.

---

19 En el terreno científico, uno de los más interesantes es el comentario de I. Hacking, en *The Emergence of Probability*, Cambridge U. P., London, 1975. Véase el capítulo 8, «The great decision», pág. 63. Véase también MORA CHARLES: «Premières applications des Mathématiques à la décision de quelques problèmes religieux et éthiques» en Bäumer & Büttner (eds.) (1989): *Science and Religion*, U. Verlag, Bochum.

20 R. PRICE (1787): *A Review of the Principal Questions in Morals*, London; París, 1906.

Con frecuencia la virtud es oprimida y el vicio prospera y florece. Muchas gentes viciosas son felices.

De todos modos, se puede decir que la virtud, incluso en las peores circunstancias, es preferible al vicio en las circunstancias más prósperas, pero eso no significa que la virtud sea, en estas ocasiones, más próspera que el vicio.

Price no menciona a Pascal, pero coincide con él, puesto que trata de señalar que la vida mundana puede ser más agradable que la vida piadosa y por lo tanto, si Dios no existe, habrá desventaja en llevar una vida piadosa. El interlocutor de Pascal decía:

> – Sí, hay que apostar, pero quizás arriesgo demasiado.

Y Pascal responde:

> – Veamos, puesto que hay parecidos azares de ganancia y de pérdida, si no tenéis para ganar más que dos vidas por una, podréis todavía apostar...

Pascal no desarrolló este punto de la posible ventaja de llevar una vida mundana, y propuso para este caso el criterio que ahora se llama de la esperanza dominante. Pero Price no acepta que la vida piadosa, incluso en el caso de que Dios no exista, no sea feliz o al menos satisfactoria: «No es la felicidad de la vida lo que la virtud nos exige abandonar, sino sus locuras y miserias».

Para Price es la revelación cristiana la que confirma y promete a los virtuosos la vida eterna, es decir, una inmortalidad feliz.

Supone que sólo hay una oportunidad contra un gran número finito y no determinado de oportunidades contrarias, que esta recompensa de la virtud existe. El valor de la recompensa debe ser proporcional a su posibilidad y por lo tanto si la recompensa futura tiene un valor mayor que el bien presente, sería de justicia abandonar por ella una parte proporcionalmente mayor del bien presente.

Pero el bien futuro es tan grande que no importa qué posibilidad de obtenerlo vale más que todo lo que se puede gozar en esta vida. Y se puede decir lo mismo para evitar el mal futuro.

Cuando el bien es infinito, el precio de cualquier posibilidad debe ser también infinito.

Price salta directamente al tercer caso de la Teoría de Pascal, el criterio de esperanza dominante:

Tenemos dos estados del problema, E_1: Dios existe, y E_2: Dios no existe. Y dos acciones posibles, A_1: vivir como si Dios existiera, es decir, llevar una vida piadosa, o A_2: vivir una vida de vicio, mundana. Cada estado posee una probabilidad, p_1 y p_2, y cada acción dos utilidades, U_{ij}, según los estados del problema. Si para la acción A_j y las probabilidades *pi* no encontramos ninguna esperanza matemática que sea más pequeña que la esperanza de las otras acciones, y encontramos una asignación de probabilidad para la cual la esperanza de A_j es mayor que la de cualquier otra acción, entonces A_j es la que tiene la esperanza dominante.

Price añade una nueva posibilidad, que las dos acciones A_1 y A_2 pudieran conducir a la felicidad futura, pero que una fuera ligeramente más favorable que la otra para obtener el cielo.

Price relativiza la acción A_2. Si Dios existe (E_1), entonces A_2 puede producir la felicidad con alguna probabilidad, aunque sea pequeña, de que esta acción conduzca al infierno. Así pues, A_1 es todavía preferible en el estado E_1, porque la menor mejora de una posibilidad de obtener un bien sube de valor a medida que dicho bien aumenta, y en este caso se hace infinita.

Por otra parte, sería incoherente que un escéptico afirmase que la virtud no da mejores oportunidades de obtener la felicidad (infinita se entiende) que el vicio.

Price considera también el argumento de Pascal por intermedio de Samuel Butler, en sus comentarios sobre la necesidad en que nos encontramos cada día de actuar con evidencias mucho más pequeñas que lo que se llama probable normalmente. Por lo tanto sería absurdo no seguir el razonamiento de la Apuesta en un tema tan importante.

Se podría formalizar así:

Estados del problema E_1 = Dios existe
E_2 = Dios no existe

Acciones posibles (decisiones) A_1 = vida piadosa
A_2 = vida mundana

Utilidades (según Pascal)

$$(E_1, A_1) \to U_{11} = +\infty \text{ (vida feliz e infinita)}$$
$$(E_1, A_2) \to U_{12} = -\infty \text{ (pérdida del cielo)}$$
$$(E_2, A_1) \to U_{21} = \text{pérdida finita}$$
$$(E_2, A_2) \to U_{22} = \text{ganancia finita}$$

Probabilidades

$$p_1 = p(E_1) = 1/2 \text{ o bien } > 0$$
$$p_2 = p(E_2) = 1/2 \text{ o bien } < 1$$

Así pues, para Pascal,

$$U_{11} > U_{22} > U_{21} > U_{12}$$

y para Price U_{12} proporciona también el cielo con una probabilidad p'_2, y $1 - p'_2$ es ligeramente mayor que p'_1, luego A_1 es preferible.

Posteriormente ha habido muchos desarrollos de este tipo de razonamiento y se ha adaptado a diferentes aplicaciones en numerosas ocasiones. Podríamos nombrar a Laplace en el siglo XVIII, o el caso de Pierre Duhem[21], a comienzos del XX, que habla de «un testigo sincero, con la suficiente claridad de espíritu para no tomar por percepciones los juegos de su imaginación», en el caso de una experiencia física. Hasta llegar a los autores más recientes, como Glen Shafer[22], que escribe en 1976 sobre la Teoría Matemática de la Evidencia o, en el campo de acción de la filosofía de la ciencia, autores como Sneed[23], Suppes[24], Hintika[25], etcétera.

---

[21] Pierre Duhem (1906): *La théorie physique, son object et sa structure*, Chevalier et Rivière, París.

[22] Glen Shafer (1976): *A mathematical Theory of Evidence*, Princeton U. P.

[23] Joseph Sneed (1967): «Entropy, Information and Decision», *Synthese*, 17, págs. 392-407.

———— (1971): *The logical structure of mathematical Physics*, Reidel, Dordrecht.

[24] P. Suppes (1970): *A probabilistic Theory of Casuality*, North-Holland, Amsterdam.

[25] K. J. J. Hintikka & Suppes (eds.) (1966): *Aspects of Inductive Logic*, North-Holland, Amsterdam.

CAPÍTULO 6

La Teoría de los Juegos de Azar en el siglo XVIII. La participación del matemático francés François Nicole

ANTONIO FRANCO RODRÍGUEZ DE LÁZARO
RAQUEL ÍBAR ALONSO
PILAR ORDÁS AMO
Universidad San Pablo CEU

Introducción

En esta ponencia comentamos dos artículos escritos en 1730 por el matemático francés M. Nicole, recogidos en las *Memorias de Matemáticas y Física* de la Real Academia de Ciencias de París. Con la finalidad de situar temporalmente estos artículos, se especifican algunos aspectos relevantes de los estudios realizados sobre la probabilidad hasta esa fecha y se incorpora una breve sinopsis de la historia de la Academia de París.

La probabilidad hasta 1730

El ideal griego de contemplar lo bello y armonioso de la naturaleza desembocó en que el hombre pasara de trabajar con objetos sensibles a utilizar entes abstractos, ideales, perfectos y eternos. Los filósofos medievales pretendieron, sin lograrlo, encontrar una característica universal que permitiese captar cualquier esencia y la deducción absoluta. Hay que esperar hasta el siglo XVI para que se produzca el nacimiento de un procedimiento con el que analizar la aleatoriedad de los sucesos que todavía no han acaecido, la probabilidad, y esto ocurre en un momento histórico en que tanto la ciencia como la tecnología comienzan a desarrollarse a un ritmo mucho más rápido que en los siglos precedentes.

El estudio de la probabilidad comienza con Cardano (1500-1571), médico italiano nacido en Milán, que escribió su propia biografía *De vita propia liber* (El libro de mi vida), en el que manifiesta sentir una gran atracción por los juegos de azar, en particular los dados, las cartas y el ajedrez, realizando los razonamientos sobre la probabilidad con ellos. En sus 131 trabajos publicados y 111 manuscritos sin publicar investiga cuestiones de matemáticas, astronomía, física, astrología y por supuesto medicina.

En *De Liber de ludo aleae* (Libro de juegos de azar) Cardano expresa los fundamentos de la probabilidad. Fue escrito en 1520 y publicado en 1663 después de su muerte. Con este texto ocurre lo que va a ser frecuente en los primeros investigadores de la probabilidad, la no publicación en vida de los autores, tal vez por ser obras escritas en su etapa creativa de madurez y/o por no atreverse a publicar conceptos tan novedosos. El término probabilidad viene de *probare* (probar o aprobar), por eso Cardano lo utilizó para cuantificar el grado de credibilidad o aprobación de una opinión.

También en el Renacimiento y en Italia, Galileo (1564-1642) escribió textos relativos a la Teoría de la Probabilidad, siendo su obra más conocida acerca de este tema *Sopra gli scopertie dei dadi* (Sobre los descubrimientos de los dados). Galileo, al igual que Cardano, analiza la frecuencia de diferentes combinaciones y posibles resultados al tirar los dados.

Posteriormente, los franceses del siglo XVII, Blaise Pascal, Pierre de Fermat y Antoine de Gombaud, caballero de Méré, propusieron un método sistemático para medir la probabilidad. Antoine de Gombaud optó por un enfoque más intuitivo y filosófico que el de los otros dos, pero su gran afición por los juegos de apuestas le llevó a indagar sobre la probabilidad de casos reales y a promover, a partir de 1654, un intercambio de correspondencia entre Fermat (que utilizaba el álgebra), y Pascal (que empleaba la geometría), con la finalidad de que resolvieran problemas concretos suscitados por los juegos de azar.

Las investigaciones estadísticas efectuadas a finales del siglo XVII y principios del XVIII comienzan a sustentarse en la resolución de cuestiones sociales, centrándose fundamentalmente, en estudios de la población y en determinar la probabilidad con la que una mujer podía tener un niño en lugar de una niña, lógicamente antes de producirse el parto.

En 1662 John Graunt utilizó las listas de mortandad de Londres para realizar inferencias sobre la tasa de mortalidad de esa ciudad. Este tipo de estadísticas encontró pronto aplicación en el estudio de las pensiones vitalicias o contrato por el que un comprador paga una cantidad de dinero fija a cambio de una renta anual.

También Christiaan Huygens (1629-1695), astrónomo y matemático holandés, se interesó por estos contratos, ya que las ciudades holandesas vendían regularmente pensiones vitalicias para conseguir recursos.

El inglés John Arbuthnot (1667-1735), miembro de la Royal Society y médico de la reina Ana, pensaba que la mayoría de los análisis de la probabilidad de los fenómenos aleatorios se efectúan *a posteriori*. Por eso concedió una gran importancia a las estadísticas publicadas, argumentando sus teorías con análisis de los registros del censo de nacimientos de Londres, comentando tras sus observaciones que «es una posibilidad, si una mujer está embarazada, que éste sea varón, y si se quiere saber la posibilidad exacta, debe considerarse la proporción de varones sobre mujeres en los registros»[1].

Rechazó la posibilidad de equiprobabilidad al encontrar en 1692 que cada año nacía un número ligeramente mayor de niños que de niñas, asegurando que este desequilibrio había existido «durante años y años y no sólo en Londres, sino en todo el mundo»[2]. Es la primera vez que se publica el contraste de una hipótesis estadística.

Arbuthnot justificó estas diferencias por una intervención de Dios en los asuntos relativos al hombre, pero Nicolás Bernoulli (1687-1759) aplicó posteriormente la ley de los grandes números para obtener que la probabilidad de parir un niño era 18/35, ya que el análisis de los datos contenidos en los registros de nacimientos por él estudiados proporcionaron que existía una tendencia estable de 18 varones por cada 17 mujeres.

Estos estudios estadísticos contrastan con la investigación de los fenómenos aleatorios efectuada en el continente, y especialmente en Francia, donde imperaba el subjetivismo. Es una época en la que en Inglaterra azar equivale a falta de habilidad, mientras que en el continente significa falta de conocimiento. Así Arbuthnot dice «Es imposible para un dado, con una fuerza y dirección definidas, no caer sobre una cara determinada y, por ende, llamo a esto azar, que no es otra cosa que carencia de arte»[3].

Los miembros de la Royal Society estaban influenciados por la idea de Isaac Newton (1642-1727) de una deidad omnipresente encargada de mantener los valores estadísticos medios, de ahí que sus investigaciones estuvieran motivadas fundamentalmente por causas teológicas y sociológicas en lugar de realizarlas para lograr descubrimientos matemáticos o estadísticos. Newton especificó un mayor número de reflexiones sobre cuestiones religiosas que sobre física y, aunque no las

---

1 HACKING, IAN (1995): *El surgimiento de la probabilidad*. Gedisa, Barcelona, pág. 204.

2 *Ibíd*. pág. 205.

3 *Ibíd*. pág. 209.

publicó, fueron conocidas por sus coetáneos, como lo demuestran las cartas enviadas a Richard Bentley (1662-1742). Asimismo, De Moivre (1667-1754) era consciente de la trascendencia de su teorema del límite, pero pensaba que la regularidad estadística necesitaba de la intervención divina para funcionar[4].

El capítulo 13 de *La Lógica de Port Royal* (12 en la primera edición) incorpora una regla para el uso apropiado de la razón en la determinación de cuándo aceptar la autoridad del hombre. En el capítulo 14 se aplica esta regla a los milagros, analizando la credibilidad de los testigos de los mismos, en el 15, se utiliza con hechos históricos siguiendo el modelo de los notarios y en el 16 se incorpora al estudio de los hechos aleatorios futuros, asignando medidas numéricas a las probabilidades. Uno de los ejemplos que contiene relata cómo ganar un juego donde cada uno de diez jugadores arriesga una moneda por la posibilidad de obtener diez de ganancia, llegando a la conclusión de que perder es nueve veces más probable que ganar, ya que existen nueve grados de probabilidad de perder una moneda por sólo una de ganar nueve.

El autor de los cuatro capítulos sobre probabilidad utiliza frecuencias para asignar probabilidades a los acontecimientos aleatorios y considera que la resolución de problemas de decisión requiere que las esperanzas matemáticas se obtengan incorporando tanto utilidades como probabilidades. Espera que se produzca un acontecimiento no sólo por la proporción de su ventaja o desventaja sino también por alguna consideración sobre la verosimilitud de su ocurrencia.

Los teólogos de la Royal estaban influenciados por el escepticismo formulado en 1739 por David Hume (1711-1776) sobre la inducción, de ahí que pensaran que las leyes estadísticas eran meramente descriptivas cuando especificaban el comportamiento de la naturaleza, por tanto, eran contrarios a una concepción subjetiva del azar.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nació en Leipzig, en un entorno familiar y académico en el que se entremezclaba la jurisprudencia y las matemáticas. Su

---

[4] La *Lógica de Port Royal*, publicada en 1665, utilizó los juegos de azar como modelo para representar la probabilidad epistémica en una escala numérica, siendo la primera vez que la palabra probabilidad es utilizada para expresar una medida. El libro *Lógica o arte de pensar* fue redactado por los colaboradores de Blaise Pascal (1623-1662), y aunque conocemos los nombres de los que han intervenido se desconoce la parte que ha escrito cada uno de ellos. En los tres primeros libros se analizan el concepto, el juicio y el razonamiento o silogismo, mientras que el cuarto comenta el orden o razonamiento deductivo no silogista, siendo su posible autor Antoine Arnauld (1560-1619).

Los diez primeros capítulos del libro IV describen las dos posibilidades de inferencia geométrica: el análisis y la síntesis; a continuación encontramos un capítulo que recoge los conocimientos que sólo se pueden lograr a través de la fe y, finalmente, aparecen cuatro capítulos sobre la probabilidad, posiblemente redactados por un autor diferente al que escribe el resto del libro IV, siendo en estos cuatro capítulos donde se inicia el estudio de la inferencia o inducción no deductiva.

padre era profesor de ciencias morales, su abuelo materno trabajaba como profesor de teoría legal y su maestro, E. Weigel (1625-1699), compaginaba las matemáticas con los temas jurídicos. No debe sorprendernos entonces que Leibniz llegase a afirmar que la probabilidad no era extraña a la ley. Los abogados tienen que diferenciar entre testimonio y circunstancia, y el requerimiento usual de los epistemólogos, la evidencia, es un concepto legal.

Leibniz publicó en 1665 un artículo en el que utiliza números para representar lo que llamó «grados de probabilidad», asignando los valores numéricos como grados de certeza. Con esta concepción de la probabilidad se enfrenta al probabilismo hispano por su subjetivismo, ya que según el probabilismo si las autoridades discrepan en sus opiniones somos libres de elegir la autoridad más probable para seguir sus indicaciones. Diferencia la probabilidad casuística, que se basa en el número y reputación de los doctores, de la probabilidad real que se deriva de la naturaleza de las cosas en la medida que sabemos de ellas. La probabilidad emana de los hechos pudiendo ser considerada como una proporción de lo que sabemos. Si a esto le añadimos que las normas jurídicas son el modelo que se debe aplicar a la asignación de probabilidades, Leibniz se muestra receptivo para aceptar el análisis de casos propuesto por Huygens, su mentor cuando llegó en 1672 a París en misión diplomática, y el análisis desarrollado por Jacques Bernoulli.

Mientras los contemporáneos de Leibniz estudian diferentes fenómenos aleatorios relacionados con los juegos de azar y las tablas de mortalidad, trasladando posteriormente sus argumentaciones y teorías a otros casos inciertos de la realidad, Leibniz parte de una concepción epistémica de la probabilidad que le lleva a considerar que el estudio del azar no consiste en analizar las características físicas de los diferentes juegos de azar sino del conocimiento de ese conjunto de juegos.

Leibniz es el precursor de la lógica simbólica moderna y su notación es tan apropiada que sigue usándose en la actualidad. En 1676 regresa a Alemania, publicando en 1684 la primera versión del cálculo diferencial y dos años después el cálculo integral.

La cuantificación de la probabilidad fue posible cuando los signos se hicieron evidencia interna, porque si se quiere medir la ocurrencia de un fenómeno no es suficiente con estudiarlo aisladamente, como ocurre con las proposiciones de la geometría, sino que es imprescindible tener en cuenta todas las circunstancias tanto internas como externas que le afectan.

Debido a la popularidad que seguían teniendo los juegos de azar a finales del siglo XVII y principios del XVIII, el suizo Jacob Bernoulli (1654-1705), aún siendo nieto, hijo y cuñado de farmacéuticos y habiendo estudiado teología, escribió *Ars conjectandi* (El arte de conjeturar), obra redactada en 1690 y publicada en 1713. Este texto popularizó la palabra *combinatoria* introducida por Leibniz en su

Disertatio de arte combinatoria. Los hallazgos de Leibniz y Bernoulli establecen el inicio de la combinatoria como una nueva rama de las matemáticas.

Los acontecimientos de la vida cotidiana son excesivamente complejos para estudiarlos directamente, por ese motivo, hay que subdividirlos en problemas simples que sean asequibles al análisis estadístico, como puede ser calcular la probabilidad de que una persona de 30 años llegue a cumplir 75 o más años, o la probabilidad de que un coche al llegar al cruce tuerza a la derecha. Jacob Bernoulli era consciente de la complejidad del mundo real cuando escribía: «¿Qué mortal, pregunto, puede estar seguro del número de enfermedades, teniendo en cuenta todos los casos posibles, que afligen al cuerpo humano en todas sus partes y a todas sus edades, y decir que una enfermedad es mucho más probable que sea letal que otra –la peste que la hidropesía, por ejemplo, o la hidropesía que la fiebre– y sobre esta base realizar una predicción sobre la relación entre la vida y la muerte en futuras generaciones?[5]».

¿Hay que relegar las probabilidades a los juegos de azar? Jacob Bernouilli responde a esta pregunta en *Ars Conjectandi* con su Teorema Aúreo, hoy en día conocido como Teorema del Límite, con el que hace comprensible la estabilidad estadística y posibilita la definición de probabilidad frecuentista.

En cuanto a las ganancias y pérdidas logradas en un juego, esto es, la obtención de la ganancia promedio o esperanza matemática en una larga serie de partidas similares, no tenemos constancia de que se efectuaran promedios con anterioridad al año 1650. Hay que esperar a la correspondencia entre Fermat y Pascal para que la esperanza quede perfectamente descrita. Galileo había admitido que un jugador podía descubrir que una estrategia era más ventajosa que otra para él, pero no llegó a especificar cuantitativamente cómo lograr la esperanza matemática, Cardano se limitó a anticipar la noción de esperanza matemática con sus ideas de *igualdad* y *circuito* aplicadas en los juegos de dados, los problemas planteados por el caballero de Méré requerían para su solución del razonamiento implícito en la obtención de esperanzas matemáticas y Huygens incluyó diferentes conceptos vinculados con la esperanza en *De ratiociniis in ludo aleae* (Calculando en juegos de azar) publicado en 1657.

Huygens se dio cuenta de que era necesario conocer con antelación cuál iba a ser el valor del juego, ya que si un jugador era invitado a jugar con un esquema prefijado de premios, que dependen de los diferentes resultados que se obtienen en las sucesivas partidas, exigirá un precio justo para aceptar la apuesta. Con este razonamiento Huygens justifica la obtención de un método que permita valorar las jugadas, concepto que posteriormente se denominó «esperanza matemática».

---

5 NEWMAN, JAMES R. (1956): *The World of Mathematics*. Nueva York. Simon and Schuster, vol. 3, págs. 1.452-1.453.

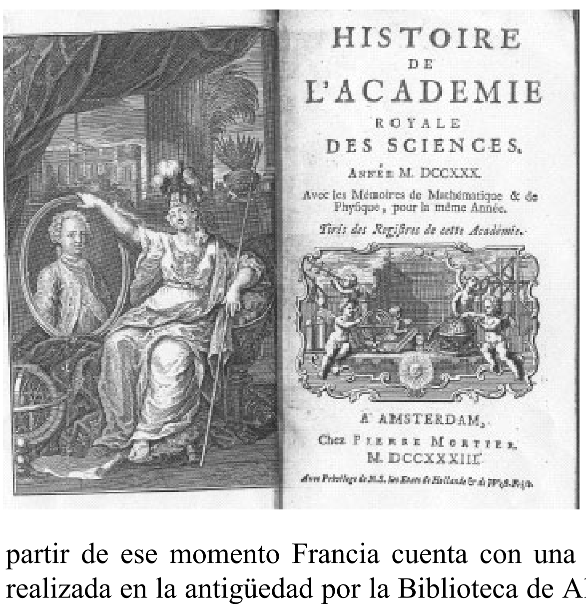
El motivo por el que Huygens no realiza una justificación a largo plazo de sus precios justos, podría ser que en su época todavía no era habitual utilizar promedios para representar datos. Incluso hoy en día se cuestiona si la ganancia promedio a largo plazo es una medida de equidad cuando se aplica a una sola jugada.

Según Huygens, si en una lotería justa cada jugador o apostador paga el mismo precio por cada jugada o billete y el premio que puede lograr es x, a cada una de las n jugadas o billetes habrá que asignarles un valor de x/n.

Finalizaremos este epígrafe diciendo que los avances logrados en álgebra y cálculo diferencial e integral durante los siglos XVII y XVIII fueron decisivos y contribuyeron al desarrollo de múltiples aplicaciones en la Teoría de la Probabilidad, desde la medición de riesgos en seguros e inversiones, hasta temas relacionados con medicina, física y meteorología.

La Academia de Ciencias de París

La Academia de Ciencias de París (1666-1793) debe su origen al ministro de economía de Luis XIV Jean-Baptiste Colbert (1619-1683), siguiendo una costumbre que provenía del siglo XVII y consistía en reunir los diversos círculos del saber en torno a un mecenas o a un personaje erudito. Esta institución contribuyó en el siglo XVIII al crecimiento científico con sus publicaciones y jugó un papel fundamental ofreciendo asesoramiento a los que ostentaban el poder en Francia.



Colbert seleccionó un número no demasiado grande de intelectuales de su época, para que formaran parte de la Academia de Ciencias y los convocó en la biblioteca de su residencia el 22 de diciembre de 1666 donde fijaron un esbozo de los formalismos, normas y líneas de acción a seguir en las reuniones de trabajo, siendo precisamente en esta biblioteca donde de forma bisemanal tuvieron lugar las primeras sesiones de la Academia. A partir de ese momento Francia cuenta con una institución que recuerda la labor realizada en la antigüedad por la Biblioteca de Alejandría, en cuanto a potenciar el desarrollo del conocimiento, fomentar la investigación y favorecer la transmisión del saber, poniéndola como país en inmejorables condiciones para afrontar un siglo de grandes cambios políticos y de avances científicos[6].

Los primeros años de existencia de la Academia fueron algo irregulares en la consecución de los logros que en principio sus miembros se habían propuesto, hasta que el 29 de enero de 1699, momento histórico en el que la Academia estaba constituida por setenta miembros, el rey Luis XIV le confiere una mayor proyección, influencia y autoridad al otorgarla su primer reglamento, adjudicando el estatus y título de Academia Real de Ciencias, fijando como lugar de emplazamiento de las reuniones el Palacio del Louvre.

Algunos de los miembros de la Real Academia de París alcanzaron un gran prestigio dentro del mundo científico y el reconocimiento público por sus aportaciones. Entre ellos citaremos a Huygens, los Cassini, Réaumur Buffon, Cuvier, los Jussieu, d'Alembert, Lavoisier y Condorcet. También existía la figura de asociado para los participantes extranjeros, destacando las contribuciones de Newton, Leibnitz y Euler.

El 8 de agosto de 1793, la Convención adoptó la decisión de suprimir todas las academias, tanto científicas y literarias como artísticas. Pero dos años más tarde, el 22 de agosto de 1795, todo cambia al reagruparse lo que habían sido las antiguas academias en el recién creado Instituto Nacional de las Ciencias y las Artes. El Instituto estaba formado por ciento cuarenta y cuatro miembros, de los cuales el grupo más numeroso era el constituido por los sesenta y seis integrantes de Ciencias Físicas y Matemáticas. En 1805 se transfiere el Instituto Nacional de las Ciencias y las Artes al antiguo Colegio de las Cuatro Naciones, debiendo esperar hasta 1816 para que la Academia de Ciencias recobre otra vez su autonomía como parte fundamental del Instituto de Francia; siendo la autoridad máxima del estado Francés la encargada de protegerla desde ese momento.

En los primeros años del siglo XX, la Academia de Ciencias inicia su decadencia al ir perdiendo, paulatinamente, la influencia que ejerce sobre el mundo científico debido a la disminución en términos relativos de los descubrimientos, tanto teóricos como prácticos que, de forma progresiva se fueron originando en la Academia, ya que durante este siglo tanto en Francia como en el resto de los países desarrollados,

[6] La información relativa a la primera etapa de la Academia, la que va desde su fundación en 1666 a su supresión en 1793 puede consultarse en una obra de reciente publicación *Les publications de l'Academie Royale des Sciences de Paris 1666-1793*. Este libro constituye una fuente de consulta muy útil para investigar la abundante base documental de la Academia y sus problemas bibliográficos especiales. Está compuesta por dos volúmenes, el primero contiene la descripción bibliográfica de las obras publicadas por la Real Academia y el detalle de su contenido según los ejemplares originales. El segundo incorpora aspectos cuantitativos tales como los índices de los autores de las publicaciones, los personajes citados en los títulos y las materias tratadas.

se desencadena un fuerte incremento de la producción investigadora. Esto impulsa una necesaria adaptación de sus estatutos, tanto en lo que afecta a sus miembros como a sus cometidos, para adaptar la Academia a los nuevos retos que plantea la evolución del conocimiento. Es ésta una reforma de tal magnitud que hubo de aprobarse, por decreto, en dos fases, (ya entrado el siglo XXI) la primera el 2 de mayo de 2002 y la segunda el 31 de enero de 2003.

François Nicole

M. Nicole, de nombre François, nació en París el 23 de diciembre de 1683 y murió también en París el 18 de enero de 1758. Fue un experto geómetra como lo demuestran las más de veinte investigaciones centradas en análisis de curvas, cónicas, cálculo de diferencias finitas y ecuaciones de tercer grado, la mayoría recogidas en las *Memorias* de la Real Academia de Ciencias de París, entre 1707 y 1747. El siglo XVIII se caracterizó por la gran expansión colonial de Francia, posibilitando que el reinado de Luis XV (1715-1774) coincidiera con un período de prosperidad económica que favoreció el mecenazgo de nobles y clérigos.

De sus artículos destacan:

- El publicado en 1717 «Traité du calcul des différences finies» (Tratado de cálculo de diferencias finitas) que contiene reglas para determinar la suma de algunas series dadas y resolver ecuaciones de diferencias finitas, tema que sigue desarrollando en los trabajos publicados en 1723 y 1724.

- Asimismo destacan los publicados en 1729 y 1731 sobre el ensayo de Newton en curvas de tercer grado «Traité des lignes du troisième ordre ou des courbes du second genre» (Tratado de líneas de tercer orden o de curvas de segundo género) y «Sur les sections coniques. Manière d´engendrer dans un corps solide toutes les lignes du troisième ordre» (Sobre las secciones cónicas. Manera de engendrar en un cuerpo sólido todas las líneas de tercer orden).

- En 1730, publica en las *Memorias* de la Real Academia de París dos estudios sobre los juegos de azar, que son los que vamos a analizar en esta comunicación, «Examen et résolution de quelques questions sur les jeux» (Análisis y resolución de algunas cuestiones sobre los juegos) y «Méthode pour déterminer le sort de tant de joueurs que l´on voudra, et l´avantage que les uns ont sur les autres, lorsqu´ils jouent à qui gagnera le plus de parties dans un nombre de parties déterminé» (Método para determinar la suerte del tanto de unos jugadores, y la ventaja de unos sobre los otros, jugando a quién ganará más partidas en un número de partidas determinado).

La razón por la que Nicole abandona momentáneamente su campo habitual de investigación, la geometría y las ecuaciones en diferencias finitas, para escribir estos dos artículos sobre la repercusión que tiene el azar en el resultado de los juegos, es porque participa de la fascinación que tenían sus coetáneos por el juego, reflejo de la que ha sentido el hombre desde el principio de los tiempos (astrágalos, dados, cartas,...) y que se mantiene en la actualidad (ruletas, máquinas tragaperras, loterías, quinielas,…). Como en toda investigación sobre los juegos de azar, Nicole debe enfrentarse a manifestaciones de la aleatoriedad concretas para poder obtener conceptos teóricos rigurosos o generalizaciones robustas.

Los problemas de tipo discreto fueron los más fáciles de superar, al explorar las posibilidades de la nueva forma de enfocar la ocurrencia de sucesos futuros inciertos.

En el primer artículo, Nicole divide los juegos de azar en dos grandes grupos: por un lado, estarían aquellos juegos en los que el azar sólo interviene en parte, ya que sus reglas dan ventaja a unos jugadores sobre los otros, como en «la Bassette», «le Faraon», y «des Trois Dés». Por otro, se encuentran los juegos en los que el azar afecta, en todo momento y por igual, a todos los jugadores, no siendo posible que un jugador pueda tener alguna ventaja sobre los demás por este motivo, entre estos juegos se encuentra «Le Piquet». Las investigaciones de Nicole, según él mismo manifiesta, van a centrarse en estudiar este último grupo, es decir, los juegos en los que ganar o perder una partida depende exclusivamente de la habilidad de los jugadores y para dotar de un mayor realismo al análisis considera que uno de los jugadores es más hábil que el otro.

Inicia su investigación acometiendo la resolución del caso más sencillo en un juego, dos jugadores que realizan dos partidas, pasando después a estudiar situaciones con un mayor número de partidas.

El problema que plantea es:

Tenemos dos jugadores con fuerzas p y q que juegan al «Piquet» un determinado número de partidas, ¿qué probabilidad hay de que el jugador más fuerte gane y cuál será su ventaja?

PROBLEME.

Deux joüers, dont les forces ſont entr'elles comme p *&* q*, jouent au piquet un certain nombre de parties, on demande quelle probabilité il y a que le joüeur le plus fort gagne, ce que les joüeurs appellent la* queüe des paris*, & quel eſt ſon avantage. Celui qui perd, eſt celui qui eſt marqué le plus de fois dans le cours des parties que l'on eſt convenu de joüer.*

Las magnitudes p y q, donde p es siempre mayor que q, son para Nicole las fuerzas o habilidades de los jugadores en cada partida; p representa la habilidad del jugador más fuerte y q la del más débil. La cuantía de p y la de q no varía a lo largo de todo el juego, lo que desde nuestra perspectiva implica que Nicole considera las partidas independientes entre sí, aunque él no utiliza la palabra «independencia» en ningún momento.

Aunque Nicole no da pistas de cómo obtener los parámetros p y q, considera que son valores enteros y al analizar las diferentes partidas los divide siempre por su suma, $p + q$, lo que nos recuerda la concepción clásica de la probabilidad $\frac{CF}{CP}$, donde CF es la habilidad de cada jugador y CP es la suma de las habilidades.

En el planteamiento del problema, Nicole utiliza la palabra «probabilidad» para designar la posibilidad de que el jugador más hábil en cada partida gane todo el juego.

Para resolver el problema, analiza diferentes casos en los que el juego consta de 2, 4, 6, 8 y 10 partidas respectivamente. Llama a al dinero que se pone en juego, y pretende calcular para cada caso la suerte del jugador más hábil, es decir, la ventaja que saca el jugador más fuerte sobre el jugador más débil. Esta ventaja la calcula en términos de esperanza matemática.

En el caso más sencillo, que es el que se produce cuando dos jugadores acuerdan que el juego esté compuesto por dos partidas, tenemos cuatro opciones posibles para un jugador GG, PP, GP y PG. Pero Nicole solamente considera las dos primeras, ganar las dos o perder las dos partidas, y define la suerte del jugador más fuerte como el exceso de dinero que debería recibir este respecto al percibido por el otro. Posteriormente, repite el mismo esquema incorporando más ecuaciones para el caso de 4, 6, 8 y 10 partidas.

Al simplificar las expresiones dividiendo numerador y denominador por $p + q$, aparecen los números combinatorios del triángulo de Pascal, por lo que encuentra una ley de comportamiento que extiende al caso de 12 y 24 partidas, y según él, se puede extender hasta donde se quiera, aunque no especifica cuál sería la expresión en términos de n partidas.

Nicole particulariza los resultados teóricos obtenidos al caso concreto de que $p = 5$ y $q = 4$, calculando la suerte del jugador más fuerte para 2, 4, 6, 8, 10 y 24 partidas. En este ejemplo observa que al aumentar el número de partidas, aumenta la suerte del jugador más fuerte, esto es, se incrementa sucesivamente la ventaja que posee sobre el otro jugador, pasando de la novena parte de a, a un número entre 2/3 de a y 3/4 de a. Este resultado, desde nuestro punto de vista, es lógico, porque al tratarse de una binomial con p invariante en cada partida, al aumentar n se incrementa el valor esperado.

En sus conclusiones finales, Nicole establece que se consiguen idénticos resultados al realizar las mismas operaciones en juegos con un número impar de partidas que en juegos con una partida más; por tanto, se obtendría el mismo resultado jugando 5 que 6 partidas, ya que se consiguen las mismas expresiones. Esto le sorprende porque contradice la conclusión anterior de que la suerte del jugador aumenta al aumentar el número de partidas. Nicole intenta dar una salida a este problema proponiendo que siempre se juegue un número par de partidas. A nuestro parecer, esta paradoja no lo es tanto, ya que en sus formulaciones Nicole no considera todas las opciones, como hemos visto en el caso de dos partidas, en las que excluye de sus ecuaciones las posibilidades GP y PG.

Nicole finaliza este primer artículo, de forma similar a la de todos los estudiosos de los juegos de azar de la época, preguntándose qué repercusión tiene en el resultado del juego el hecho de que se interrumpa antes de que haya finalizado. La solución que propone es acudir a las ecuaciones que ha ido planteando en su exposición y sustituir en la que se haya parado el juego.

En nuestra opinión, el mayor inconveniente del método planteado por Nicole es que no tiene en cuenta los resultados obtenidos a lo largo del juego, sino que se basa en las habilidades de los jugadores especificadas al comienzo del mismo. Es un método que siempre favorece al jugador que se ha considerado más fuerte con independencia de cuál haya sido su actuación a lo largo del juego.

En el segundo artículo, Nicole pretende dotar a su análisis de una mayor complejidad descubriendo la ley de comportamiento de la suerte del jugador más fuerte para un número de partidas cualesquiera, con un número de jugadores mayor que dos.

También hay que destacar que renuncia a usar el método compuesto de ecuaciones utilizado en el artículo anterior, debido a su complejidad operacional al incrementarse el número de jugadores, y desarrolla uno más simple y general.

El primer problema planteado por Nicole en esta segunda memoria es el siguiente:

Tres Jugadores, con fuerzas p, q y m, juegan o apuestan a quién ganará más veces en un determinado número de partidas. ¿Cuál será la suerte de cada uno de estos jugadores y la ventaja del jugador más fuerte sobre cada uno de los otros dos?

PROBLEME I.

Trois joüeurs, dont les forces sont entr'elles, comme les grandeurs p, q, m, *jouent ou parient à qui gagnera le plus de fois en un nombre déterminé de parties. On demande le fort de chacun de ces joüeurs, & l'avantage du joüeur le plus fort sur chacun des autres.*

Este problema es análogo al desarrollado en la memoria anterior, por eso vamos a destacar solamente las novedades que incorpora:

- Especifica la expresión de la suerte de cada jugador, y no como antes que se limitaba a dar la suerte del jugador más fuerte.
- El análisis se centra tanto si el número de partidas es par como si el número de partidas es impar, especificando la expresión para 1, 2, 3 y 4 partidas.
- También particulariza los resultados teóricos en un ejemplo, en el que $p = 6$, $q = 5$ y $m = 4$, sustituyendo estos datos en las fórmulas anteriores con la finalidad de obtener los valores numéricos concretos para cada jugador.
- Nicole se enfrenta al inconveniente del elevado número de ecuaciones necesario para resolver los casos de más de 4 partidas, planteando un nuevo método de resolución.

El segundo problema planteado en este artículo consiste en analizar el caso de cuatro jugadores que acuerdan jugar 8 partidas. La importancia de esta fase reside en que Nicole abandona el método de ecuaciones utilizado hasta ahora, para pensar en términos abstractos. Plantea las diferentes posibilidades que tiene un jugador de ganar y encuentra algo que hasta ahora no había observado o al menos no lo había especificado por escrito, la similitud que hay al detallar las formas de ganar partidas con los números combinatorios del triángulo aritmético de Pascal.

Una vez que es capaz de escribir todas las formas que tiene un determinado jugador de ganar, sólo le queda a Nicole distinguir cuáles de estas maneras llevan al jugador a ganar todo el dinero que está en juego, si queda como vencedor absoluto, o a ganar sólo una parte, en el caso de que haya empate con uno o más jugadores.

En sus conclusiones, Nicole explica cómo la suma de las suertes de cada jugador, que expresa la parte del dinero que pertenece a cada jugador, o el derecho que tiene sobre el juego, ha de ser igual al todo, es decir, al total de dinero puesto en juego. Consigue generalizar la expresión de la suerte para un número cualquiera de jugadores y partidas, con la particularidad de que se queda sin letras del alfabeto y tiene que recurrir al etcétera. La expresión que logra no es una formulación precisa del caso general, pero ofrece las pautas a seguir para conseguirla.

Aunque alcanza unos resultados razonables, su trabajo contiene algunas ausencias importantes, ya que sólo estudia los casos en los que uno de los jugadores gana claramente, y no incluye en su análisis la posibilidad de que un jugador ni gane ni pierda.

Conclusiones

En las dos memorias que hemos estudiado se observa cómo Nicole realiza un paulatino aprendizaje de procedimientos cuantitativos al abordar las cuestiones que se le van planteando en su análisis de los juegos de azar. Primero intenta resolver el caso más sencillo: dos jugadores que juegan dos partidas y aunque no es capaz de especificar una expresión que proporcione el resultado para un jugador después de n partidas, sí que es paciente en escribir las ecuaciones para dos y más jugadores en número cada vez mayor de partidas y cómo la complejidad de los cálculos le llevan a utilizar expresiones diferentes que faciliten la obtención de los resultados.

Algunas características a destacar en los artículos de Nicole son:

- Coincide con Descartes en la simbología empleada, dedicando las primeras letras del alfabeto a las magnitudes de valor conocido, que son las constantes de sus expresiones, así por ejemplo, llama a al dinero en juego. Ocurre lo mismo al utilizar las últimas letras del alfabeto para las incógnitas, aunque como hemos visto al final casi se queda sin letras. Tal vez fueron sus conocimientos de geometría los que le llevaron a leer la famosa *Geometría* de Descartes.
- No utiliza el paréntesis, sino una raya horizontal sobre los términos. La potencia, sin embargo, sí viene representada por un número de tamaño más pequeño que los términos de la base y va al final de esta raya.
- En cuanto al orden de las potencias, nunca escribe una incógnita elevada al cuadrado, pero sí elevada a grados mayores, especificando pp en vez de p^2, aunque p^3 y las siguientes potencias tienen una representación similar a la actual.

CAPÍTULO 7

La mesure du risque jusqu'à Laplace

Pierre-Charles Pradier
Matisse, Paris-I.

A la fin des années 80, Stigler (1986) puis Daston (1988) ont produit deux grandes synthèses: une histoire des statistiques sous-titrée «mesure de l'incertitude» et une histoire des probabilités *classiques* qui ménage une large place à la «domestication du risque». Dans ces ouvrages, on ne trouve malheureusement aucune étude systématique ni du concept de *risque*, ni de sa mesure. Le présent exposé vise à combler cette lacune. Il faut d'abord faire observer que c'est un travail d'une ampleur bien plus modeste que les fresques précédemment citées, car le mot *risque* est d'un usage peu courant jusqu'à la fin du XVIIIe siècle. En revanche, il convient de s'aider de pincettes méthodologiques, ou oratoires à tout le moins, afin justement de garder au sujet ses modestes proportions, loin de l'ampleur qu'il a su prendre depuis.

On se cantonnera donc à l'étude des contributions à l'histoire des probabilités, statistiques ou de la théorie de la décision dans la mesure où elles mentionnent explicitement le mot *risque*. Ceci conduit à exclure toute les théories du juste prix des contrats aléatoires antérieures au calcul des probabilités (et on renverra sur le sujet à Coumet (1970)), car il n'y est question que de *periculum*, fût-il *sortis*, ou de *damnum* plus ou moins *emergens*. On exclut aussi toutes considérations sur les débuts du calcul, avec Pascal, Fermat, Huyghens, Caramuel puisque dans les jeux de hasard il n'est guère question que de *partis*, d'espérance (*spes*) et de valeur des jeux. On peut exclure encore la construction des tables de mortalité par Petty (le pseudo-Graunt) etc. (en renvoyant à Le Bras (2000) le lecteur désireux de précisions sur ce sujet). De même, on néglige Jacques Bernoulli et son *Ars conjectandi*. Que reste-t-il alors? Le débat sur l'inoculation et un ensemble de contributions de la fin des années 1780 qui établissent un parallèle entre risque économique et risque d'estimation. Enfin, le cas de Nicolas et Daniel Bernoulli, les cousins paradoxaux, est suffisamment épineux pour mériter les faveurs d'un traitement séparé.

Première époque: le Problème de Pétersbourg

Daniel Bernoulli a publié en 1738 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Pétersbourg* un mémoire déjà présenté en 1731 devant cette même institution. Le titre et le sujet de cette communication ont fait l'objet d'un contresens récurrent: la traduction d'*Econometrica* en 1956 s'intitule «(Exposition of a new) theory on the measurement of risk»; il faut d'ailleurs rappeler que les gloses de Friedman et Savage en 1952, mentionnent —dans la lignée de Bernoulli, si l'on veut— la «mesure du risque» comme un des traits distinctifs de leur théorie de la décision. Toute cette affaire est un pur contresens. En effet, le titre original[1], «*Specimen theoriae novae de mensura sortis*», fait état de la mesure *du sort*; c'est-à-dire «de la variable aléatoire» si l'on craint moins l'anachronisme de la notion que l'imprécision. Le singulier de *sors* s'explique soit par l'usage en latin classique (le singulier désigne le concept), soit par une insistance rhétorique sur *un* sort particulier (celui de Pétersbourg).

Après tout, ce contresens est loin d'être le seul en cette matière que l'on nomme maintenant couramment *paradoxe de Saint-Pétersbourg*, et que les contemporains qualifiaient de *Problème de Pétersbourg*, mettant ainsi l'accent sur cette situation, qui constitue la pierre de touche des conceptions des probabilités, plus que sur une solution en particulier (en tant qu'elle heurte le sens commun, puisque l'espérance mathématique du jeu est infini alors qu'aucun homme sensé ne miserait une somme importante). De la même façon, si on considère que le jeu consiste à miser puis à tenter sa chance, on peut d'intéresser à l'événement qui consiste à ne pas récupérer sa mise, ou à sa probabilité. Justement, ce danger ou —par une métonymie fréquente— sa probabilité sont couramment dénommés *periculum* dans la littérature (par exemple De Soto (1556) pour la première acception ou Caramuel (1670) pour la seconde). La probabilité justement focalise l'attention de Nicolas Bernoulli ou Jean D'Alembert. Il faut donc avoir entendu le sens traditionnel (c'est-à-dire

[1] Un titre alternatif apparaît dans la correspondance des cousins Daniel et Nicolas (Bernoulli (1732), p. 566): *Specimen theoriae novae metiendi sortem pecuniariam*. On pourrait traduire par «exposé d'une théorie nouvelle pour mesurer les perspectives aléatoires monétaires».

dans la littérature des contrats aléatoires avant les probabilités) des mots pour comprendre l'insistance de Nicolas et Jean. Le premier écrit dès 1728:

> «Le vulgaire ne met ici en ligne de conte ni des millions, ni des centaines d'Ecus (…), il n'est engagé par là ni à accepter, ni à refuser le parti, il se détermine seulement selon les degrés de probabilité qu'il a de gagner ou de perdre (…). Il faut donc, pour régler au juste l'Equivalent, déterminer jusqu'où la quantité d'un probabilité doit diminuer, afin qu'elle puisse être censée nulle» (N. Bernoulli (1728), lettre à Cramer du 3 juillet 1728).

Comme Nicolas Bernoulli, D'Alembert s'intéresse de près la *certitude morale*[2]; il considère également des transformations des probabilités[3], afin que la certitude morale apparaisse comme le dernier terme d'une suite décroissante de probabilités. Mais plus encore, l'esprit dominant les mathématiques françaises, comme Nicolas Bernoulli avant lui, conteste l'égalité de traitement entre «la probabilité» et «la somme qu'on espère»:

---

2 AINSI D'ALEMBERT (1761a) p. 11: «On peut donc, ce me semble, poser pour règle que, quand la probabilité est fort petite, on doit dans l'usage ordinaire de la vie, la regarder comme zéro et la traiter comme telle […] 1°. Quel est le terme où la probabilité commence à pouvoir être regardée comme nulle?» Signalons que si la notion de certitude morale est déjà présente chez les scolastiques tardifs, c'est très vraisemblablement Buffon qui attire l'attention de D'Alembert sur le sujet, voir Martin [1999], Rieucau [1998].

3 On trouve par exemple dans D'Alembert (1768b) p. 88 cette remarque: «Est-ce par la probabilité ou par une puissance de la probabilité (plus grande que l'unité) qu'il faut multiplier la somme espérée, pour avoir l'enjeu, sur-tout quand la probabilité est petite?...» D'Alembert [1768a] pp. 74-76 proposait déjà des fonctions de transformations des probabilités qu'on pourrait croire sorties de Kahneman-Tversky (1979). Ainsi p. 74: «Mais si au lieu de supposer la probabilité de gagner $=\frac{1}{2^n}$, on la supposoit, par exemple $\frac{1}{2^n(1+\beta n^n)}$, β étant un nombre constant pris à volonté…»; ou encore p. 75: «Veut-on une hypothèse encore plus simple? Il n'y a qu'à supposer que la probabilité au lieu d'être $\frac{1}{2^n}$ est $=\frac{1}{2^{n+\alpha_n}}$, α étant un nombre tel qu'on voudra»; ou enfin: «Si on vouloit exprimer la probabilité par une formule qui devînt = 0 quand n seroit = à un certain nombre, ou plus grand, il faudroit prendre, par exemple, au lieu de $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^{n\left(1+\frac{B}{\sqrt{K-n^q}}\right)}}$, q étant un nombre positif ou $\frac{1}{2^{n\left(1+\frac{B}{(K-n)^{\frac{q}{2}}}\right)}}$, q étant un nombre entier impair. Nous mettons le nombre pair au dénominateur de l'exposant, afin que quand on est arrivé au nombre n qui donne la probabilité égale à zéro, on ne trouve pas la probabilité négative, en faisant n plus grand que ce nombre, ce qui seroit choquant; car la probabilité ne seroit jamais être au-dessous de zéro. Il est vrai qu'en faisant n plus grand que ce nombre, elle devient imaginaire…» On peut observer ici l'étonnante écriture de l'auteur qui dévoile les coulisses de la création scientifique: il propose au fil de la plume ses conjectures, explique quelles hypothèses auxiliaires sont nécessaires; bref il montre un processus plutôt qu'un résultat.

«on confond l'*espérance* qui dépend uniquement de la probabilitié, avec la *somme espérée* qui est totalement indépendante de cette probabilitié, & qui rend à la vérité le gain plus grand mais non l'*espérance* plus grande» (D'ALEMBERT (1768d) p. 304).

Cette thématique est récurrente chez D'Alembert[4], elle participe de sa remise en cause radicale de tous les concepts probabilistes.

Si la créativité des auteurs n'est pas sans rappeler la production récente (depuis 1979) des théoriciens de la décision, il faut rappeler deux traits caractéristiques du XVIIIe siècle qui resteront vrais dans la suite: d'une part, les auteurs n'identifient pas les individus par leurs fonctions de décisions; d'autre part l'épistémologie des auteurs mérite d'être explicitée. Sur le premier point, on doit faire observer que tous les auteurs cherchent non pas *une* fonction de décision adaptée aux besoins de chacun mais *la* fonction de décision de tous les hommes raisonnables. Ce point a été évoqué par Jallais-Pradier-Teira (2003). Ces auteurs ont aussi montré comment fonctionne l'interface positif/normatif des auteurs ici présentés: pour eux, on infère de l'observation d'une population qualifiée (celle des individus réputés raisonnables) des règles de décision (la théorie est donc descriptive dans une certaine mesure) qui sont réputées valides pour l'ensemble de l'humanité (la théorie acquiert ainsi un statut normatif). Reste à voir précisément comment une telle épistémologie s'applique au concept de risque et à sa mesure.

Deuxième époque: la polémique sur l'inoculation

Sur ce sujet, on consultera avec profit Pradier (2003) dont je résume ici l'argument. Deux mots d'abord du contexte historique: avant l'invention de la vaccination par Jenner (1796), on a longtemps pratiqué l'inoculation. En 1718 Lady Montagu, qui séjourne alors en Turquie, fait inoculer (on dit aussi *varioliser*) son fils. Le problème de l'inoculation est que les risques de décès sont réels: la pratique permet simplement de choisir la date à laquelle on attrape la maladie, afin d'éviter que la variole ne s'ajoute à une autre maladie, à un affaiblissement des organismes causé par une mauvaise récolte, etc. Néanmoins la pratique, et avec elle la polémique, se

---

[4] Dès 1761, D'Alembert se propose de «… fixer enfin comment on doit estimer l'espérance de l'enjeu, selon que la probabilité est plus ou moins grande» ((1761a) p. 24). Dans les mémoires postérieurs, il insiste sur cette idée: «La difficulté vient, si je ne me trompe, de ce que l'idée d'*espérance* enferme deux choses; la somme qu'on espère, & la probabilité qu'on gagnera cette somme. Or il me semble que c'est *principalement la probabilité* qui doit régler l'espérance; & que la somme espérée ne doit y entrer, si je puis parler de la sorte, que d'une manière subordonnée au degré de probabilité: cependant on les fait entrer toutes deux également & de même manière dans le calcul» (1768b p. 82-83). Ou encore, p. 83: «Ce la ne prouve-t-il pas que c'est principalement la probabilité, bien plus que la somme espérée, qui constitue l'espérance?»

développent alors en Grande-Bretagne. En France, il faut attendre les mémoires de La Condamine en 1754 et 1758 puis Daniel Bernoulli (1760) pour que le sujet soit largement discuté.

Daniel Bernoulli ne parle pas explicitement de risque, car la décision n'est pour lui pas un problème individuel: comme l'a montré Le Bras (2000), le bâlois prend le point de vue de l'État. Il ne considère donc qu'un phénomène agrégé auquel il applique spontanément la loi des grands nombres, et il raisonne sur des espérances devenues certaines. A partir de la table de mortalité de Halley (1693), Daniel calcule le nombre de morts annuellement dû à la petite vérole. Il en déduit une table de mortalité de l'«état non-variolique» (qu'on aurait en généralisant l'inoculation). Il conclut de la comparaison de l'état «naturel et variolique» avec l'«état non-variolique» que:

> «à l'âge de 16 ans, la proportion est déjà pour les deux états comme 622 à 700; or c'est cet âge auquel on commence à devenir utile à l'État, tant par les services que l'on peut rendre à la société, que par la propagation du genre humain» ((1760) p. 254).

Autant dire que Daniel se fait le défenseur de l'inoculation. Le raisonnement en espérance est plus évident encore dans la suite:

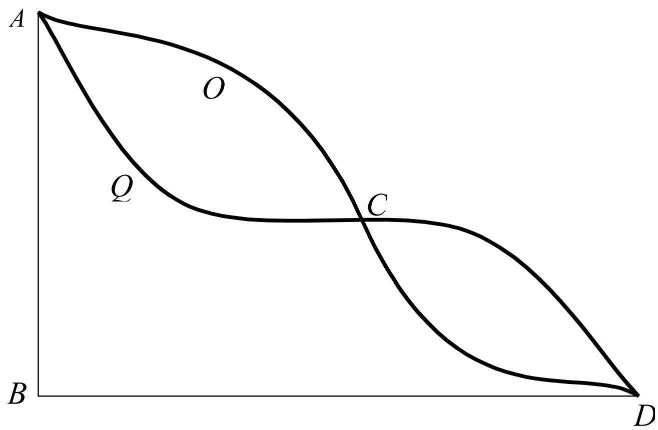
> «Examinons encore cette autre question, quel nombre il faudroit prendre pour *N*, pour que l'Inoculation ne fît sur la totalité ni bien ni mal, & que la vie moyenne demeurât la même qu'elle est dans l'état naturel? On résoudra cette question en faisant:
>
> $$\frac{38706}{34605} = \frac{N}{N-1}$$
>
> & cette équation donne à peu près $N = 9{,}43$» ((1760) p. 258-9)

Quelques lignes plus bas, il est bien évident que Daniel ne s'intéresse pas au point de vue des individus:

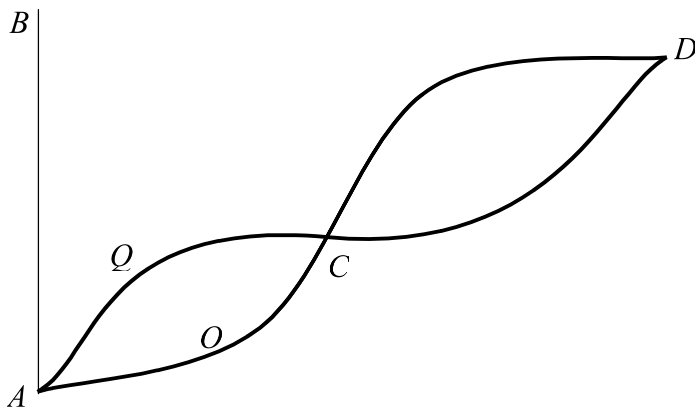
> «Si une génération de 1000 enfants avoit vingt mille ans devant elle à partager, vaudroit-il mieux pour l'État qu'ils arrivassent tous jusqu'à l'âge de vingt ans & qu'il mourussent tous à cet âge, ou bien que 500 mourussent au berceau, & que 500 arrivassent à l'âge de quarante ans?» ((1760) p. 259)

C'est contre ce point de vue que D'Alembert va prendre les armes pour une nouvelle bataille contre son ennemi de toujours. En adoptant, au rebours de Daniel, une optique individualiste, D'Alembert rend évident le *risque* par excellence: celui de périr ; le mémoire «sur la durée de la vie» est d'ailleurs le premier traité de théorie de la décision qui comporte ce substantif avec une telle insistance. Nous entrons dans le vif du sujet.

Que propose D'Alembert? Rien moins qu'une comparaison de variables aléatoires en fonction de leur risque propre. Et l'esprit dominant les mathématiques française offre deux interprétations différentes —mais convergentes— de la même notion de risque. Tout d'abord, il propose de considérer deux «courbes de mortalité» qui sont en fait des *courbes de survie*. On peut modifier la représentation de



l'auteur pour obtenir des fonctions de répartition en retournant l'axe des ordonnées (et en le normant); le graphe exprime alors la probabilité cumulative de mourir (et



non plus de survivre). C'est justement cette probabilité qui constitue le *risque*. Et D'Alembert s'intéresse à la concentration de ce risque:

> «… soient deux courbes de mortalité *AQCD*, *AOCD*, (Fig. 7) dont les aires soient égales, mais dont l'une converge d'abord vers son axe bien plus promptement que l'autre ; la vie moyenne est la même dans les deux cas; dira-t-on que l'espérance de vivre est la même? Dira-t-on, ce qui seroit une conséquence, que deux personnes, placées dans deux cas, pourraient indifféremment changer de

sort l'une avec l'autre? Il me semble au contraire que dans le cas où la courbe de mortalité est *AQCD*, *le sort est beaucoup moins favorable; par la raison qu'il y a beaucoup plus de risque de mourir dans les premières années* [n. i.], que lorsque la courbe de mortalité est *AOCD*» (D'ALEMBERT (1768c) p. 93-94).

Tous les théoriciens contemporains de la décision, et tous les lecteurs familiers de cette littérature, auront reconnu que AOCD domine stochastiquement au deuxième ordre AQCD[5]. Mais D'Alembert ne se contente pas de cette évocation de la dominance deuxième, il propose, comme Rothschild-Stiglitz (1970), une autre interprétation du même critère, fondée sur l'intuition de densités de probabilités et d'*écartements à moyenne constante*[6].

Cette nouvelle interprétation du critère de dominance deuxième est plus discutable, car D'Alembert commet une erreur; si l'on admet qu'elle est de pure inattention, comme le suggère la rédaction cursive et désinvolte des *Opuscules*, alors il faut reconnaître à cet auteur la priorité dans l'invention du concept d'accroissement de risque comme *ecartement à moyenne constante*. D'Alembert compare donc trois variables aléatoires :

- (une Dirac au point p) une variable certaine qui vaut p,
- une variable uniforme sur $(0, 2p)$,
- une variable qui donne 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et p avec probabilité $\frac{1}{2}$.

---

[5] On dit qu'une distribution f (représentée par sa fonction de répartition F) domine stochastiquement au second ordre g (représentée par sa fonction de répartition G) si et seulement si:

$$\forall x, \quad \int_{-\infty}^{x} F(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{x} G(t)\,dt$$

$$\exists x_0, \quad \int_{-\infty}^{x_0} F(t)\,dt < \int_{-\infty}^{x_0} G(t)\,dt$$

On peut interpréter cette condition intégrale en observant que l'aire sous la fonction de répartition F est plus faible que l'aire sous G en tout point de IR. Si les aires totales sous F et G sont identiques (si f et g ont même espérance), cela signifie qu'il reste une «masse» de probabilité plus importante sous G, donc que les masses de probabilité sont concentrées sur la fin de la distribution, sur les cas les plus favorables.

[6] Cette transformation consiste à combiner un abaissement de la (densité de) probabilité sur un intervalle et la restitution des masses prélevées à l'extérieur de l'intervalle sans modifier l'espérance de la variable aléatoire transformée. On diminue donc la probabilité des événements moyens pour augmenter celles des événements plus favorables *et* plus défavorables. La substitution d'issues extrêmes à des issues moyennes s'interprète comme une augmentation de la dispersion des résultats; donc comme un accroissement du risque. Le lecteur intéressé à plus de précisions pourra consulter Rothschild-Stiglitz (1970) pp. 227-229.

Le problème est, bien entendu, que l'espérance de cette dernière variable n'est que $\frac{p}{2}\cdot$ Dans la discussion, il revient sur la définition de cette 3ème variable, et on a le sentiment qu'il raisonne sur des *ecartement à moyenne constante* de la variable de départ. Si on accepte donc de remplacer cette troisième variable par une variable qui donne 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et $2p$ avec probabilité $\frac{1}{2}$, alors le propos de D'Alembert est lumineux:

> «Or pourquoi dans le (3ème) cas le *sort* est-il réellement plus désavantageux que dans le (2ème), qui est l'état ordinaire… C'est que dans le (2ème) cas le risque de mourir est réparti sur un long espace de temps, & qu'il est assez léger à chaque petite partie de ce long temps; au lieu que dans le (3ème) cas, ce risque se trouve tout d'un coup 1/2 dans un temps très-court; considération qui doit entrer dans le calcul, que tout homme même y fera entrer implicitement, & que néanmoins tous les calculateurs ont négligée» ((1768c), p. 97).

D'Alembert définit clairement ici l'accroissement du risque comme une concentration de la masse de probabilité du phénomène indésirable (la mort), ou un étalement de la masse de probabilité du phénomène désirable (la survie; on a déjà souligné la relation entre les deux courbes complémentaires).

Le plus amusant dans cette affaire est évidemment que D'Alembert a généralisé le critère de choix qui présidait à l'article de Daniel Bernoulli (1731): il a ainsi mis Bernoulli en contradiction avec lui-même. Si Le Bras (2000) a raison de signaler que la contradiction vient du changement de point de vue; il n'en reste pas moins que la mise en perspective des deux groupes de contributions (le Problème de Pétersbourg et la polémique sur l'Inoculation) permet de constater une avancée considérable de la théorie de la décision en général et de la notion de risque en particulier. Bien sûr, on peut adopter une attitude sceptique: Daniel Bernoulli se contredit lui-même, et les erreurs de D'Alembert témoigneraient de sa présomption en la matière. Il nous semble au contraire que, dans le domaine de la théorie de la décision en général, la succession de ces deux polémiques montre: que les points de vue individuel et collectif sur la décision ne sont pas forcément compatibles; que le critère de décision de Bernoulli est susceptible d'une formulation plus générale que «l'hypothèse» de l'article de 1731 —en effet, la définition du risque comme *ecartement à moyenne constante* est compatible avec toute fonction d'utilité concave, ce qu'ont montré (entre autres) Rothschild-Stiglitz (1970). Enfin, dans le domaine précis de la définition et de la mesure du risque, D'Alembert a montré que l'on pouvait définir un accroissement de risque comme une transformation (ou une suite de transformations) d'une variable aléatoire.

A cause de leur diffusion confidentielle, de leur caractère polémique et inachevé, ces acquis des années 1760 vont sombrer dans un oubli rapide. En revanche, l'attaque tous azimuts de D'Alembert contre les fondements de la théorie probabiliste va conditionner chez ses élèves la nécessité d'éclaircir les hypothèses, de se montrer plus explicite pour être plus convaincant (RIEUCAU (1998)). C'est ici que Condorcet et Laplace entrent en scène.

Troisième époque: les années 1780

La filiation entre D'Alembert et Condorcet a été étudiée par Rieucau (1998); nous passerons donc brièvement sur le cas du marquis, par ailleurs étudié par Crépel (1988) pour nous concentrer sur Laplace et surtout sur Tetens.

a. Messieurs les Français tirèrent les premiers

Rappelons schématiquement dans quels termes Condorcet prend acte des doléances de D'Alembert à Daniel Bernoulli:

> «parce que ce principe est hypotétique en lui-même une somme quelconque a nécessairement une valeur plus grande pour un homme qui a un moindre bien, mais il nous paraît arbitraire de prendre soit la loi proposée par M. Daniel Bernoulli, soit une autre loi qui remplirait les mêmes conditions» («Notes sur la thèse de Nicolas Bernoulli», in CONDORCET 1994, p. 584)

Pour Condorcet, il est donc inutile de chercher à raffiner la solution de Bernoulli au Problème de Pétersbourg, il faut partir sur des bases neuves, indiscutables et, faut-il le dire, qui ménagent une place explicite au *risque*:

> «Un homme raisonnable ne doit se livrer au commerce que dans le cas où il trouve une probabilité assez grande qu'il retirera ses fonds, avec l'intérêt commun & le prix de son travail.
>
> Il lui faudroit sans doute une probabilité à peine différente de la certitude de ne pas perdre la totalité de ses fonds, & même d'en conserver la partie qui est nécessaire à sa subsistance & à celle de sa famille; & une probabilité encore très grande de ne pas les diminuer jusqu'à un certain point» (CONDORCET 1784, p. 486).

Comme chez Caramuel ou D'Alembert, les événements «perdre la totalité de ses fonds» ou de «les diminuer jusqu'à un certain point» —les *risques* contre lesquels l'assurance se propose de garantir le négociant— sont l'objet du discours autant que, par métonymie, leurs probabilités respectives. Le problème considéré par Condorcet est celui de la détermination du taux de chargement optimal de l'assureur, et du taux de profit optimal pour le négociant, sachant que ces deux décideurs désirent une quasi-certitude de n'être pas ruinés.

La modélisation de la situation s'appuie sur une variable binomiale dont l'issue peut être alternativement un échec (investissement perdu) ou un succès (auquel cas, le négociant récupère sa mise plus la marge que le modèle vise à déterminer). On pourrait résumer le modèle par les quelques lignes clés de l'auteur:

> «Supposons maintenant qu'un négociant risque, dans différentes entreprises, une somme *a*, en sorte que sa mise dans *n* entreprises soit *na*; supposons que l'espérance de réussir dans chaque entreprise soit *g*, que la probabilité qu'il perdra ses fonds soit *p*, & qu'on ait $g + p = 1$. Les termes de la série
>
> $$g^n + ng^{n-1}p + \left(\frac{n}{2}\right) g^{n} - 2p^{2} + \left(\frac{n}{3}\right) g^{n} - 3p^{3} + \cdots + \left(\frac{n}{m}\right) g^{n-m} p^{m} + \cdots + p^{n} = (g+p)^{n};$$
>
> $$\left(\frac{n}{m}\right) \text{ étant } \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1,2,\ldots,n}$$
>
> exprimeront les probabilités de réussir dans n, $n-1$, …, m, …, 1, 0 entreprises, & de perdre dans 0, 1, …, m, …, $n-1$, n autres entreprises.
>
> Soit maintenant *b* la somme qu'il gagnera dans chaque entreprise heureuse, et qui est ici la seule partie du profit, destinée à compenser le risque, il est clair $\left(\frac{n}{m}\right) g^{n-m} p^{m}$, que, pour le terme il perdra *ma*, & gagnera (*n*-*m*)*b*» (Condorcet [1784] p. 486)

Si on désigne par *X* le résultat des *n* tirages binomiaux, la difficulté du problème vient de ce qu'on veut la fonction de répartition de *X*. Or, la fonction de répartition d'une binomiale est certes donnée par:

$$P(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Mais cette égalité n'est quasiment d'aucun secours, puisqu'il faut recalculer la fonction de répartition à la main dès qu'on change un des paramètres du problème; de plus ce calcul est d'autant plus fastidieux que *n* est grand. Condorcet manque donc d'un outil mathématique adapté pour mener à bien l'étude complète du problème qu'il s'était proposé.

On cherche donc à déterminer comment le résultat de *n* «entreprises» (représentées par des variables de Bernoulli) s'écarte de la moyenne: pour le lecteur moderne, il s'agit de problèmes de *dispersion*. Quand on s'intéresse à la dispersion d'une somme de variables aléatoires de même loi (de Bernoulli, en plus), on pense évidemment au Théorème Central-Limite. Sachant que Laplace a démontré le TCL en 1810, on a le sentiment que l'histoire est déjà écrite. Une telle présentation des événements écrase rétrospectivement la difficulté d'abstraire. Laplace n'a pas procédé selon une analogie conceptuelle (la reconnaissance d'un problème de dispersion d'une somme de variables aléatoires conduisant à utiliser le théorème central-limite) mais suivant une analogie mathématique (en utilisant d'ailleurs non pas le théorème central-limite mais la *méthode de Laplace*).

Le problème posé par Condorcet ne trouve sa solution que dans la *Théorie analytique*, en 1812, alors que des problèmes d'estimation, qui reposent sur le même formalisme, ont été réglés 25 ans plus tôt. Cela prouve bien que l'analogie n'était pas *conceptuelle* chez l'auteur. Cela prouve également, contrairement au point de vue d'Israel (1996), que l'on peut rencontrer une analogie mathématique avant le XXe siècle. Mais plutôt que de polémiquer, revenons à Laplace.

Le cas des estimations laplaciennes de population a déjà été traité par Bru (1988), dont je me contente de résumer les grandes lignes. C'est l'article de 1786 qui permet à Laplace d'exposer la méthode décrite en 1785. Le problème est le suivant: pour estimer la population de la France, on peut recenser, mais c'est coûteux. On peut aussi utiliser les statistiques des naissances (qui sont fiables) et estimer le multiplicateur de naissances sur un échantillon de la population totale. Quelle est la probabilité de se tromper alors? Laplace propose de considérer que dans un échantillon de la population, il y a les nés de l'année et les non-nés. On observe donc une variable binomiale. L'idée de Laplace est assez curieuse: on imagine une urne contenant une infinité de boules blanches et noires dans un rapport inconnu. On fait un premier tirage, de y boules dont x blanches. Puis un deuxième tirage où l'on ignore le nombre Y de boules totales, mais on sait avoir tiré X blanches. La métaphore est transparente. Les calculs ne le sont pas (voir Bru (1988)); ils permettent néanmoins au *Prince de l'analyse* de montrer que si on établit le multiplicateur sur 750.000 observations, on connaîtra la population à 500.000 près (avec un risque d'erreur inférieur à un pour mille).

Voilà donc cerné le risque de se tromper. Quant à la fin de la rédaction de la *Théorie analytique*, Laplace revient sur le problème du risque de l'assureur (comme le fait opportunément remarquer Crépel (1988), le point de vue du négociant a disparu du des préoccupations savantes), il cherche à approcher la quantité:

$$P(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Avec la méthode de Laplace, on peut écrire :

$$P(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m-np}{\sqrt{2npq}}} \exp(-v^2)\, dv.$$

et utiliser une table de loi de Laplace, comme celle de Kramp (1799) pour approcher la valeur de l'intégrale. On peut donc calculer rapidement le taux de marge nécessaire au commerçant pour s'auto-assurer, ou le taux de chargement de l'assureur pour un seuil de sécurité donné. Laplace envisage de généraliser le modèle de Condorcet à des contrats d'assurance plus complexes (multinomiaux), comme les rentes viagères (y compris les rentes sur plusieurs têtes —ceci dit il simplifie les tables avec l'hypothèse de Moivre). Dans tous les cas, on peut obtenir simplement un majorant du risque de faillite (*i. e.* de la probabilité d'un niveau quelconque du bilan de l'assureur).

Les travaux de Laplace apparaissent donc clairement dans la lignée de ceux de Condorcet puisque le prince de l'analyse donne une solution explicite au modèle de son aîné. On doit aussi concéder que l'auteur utilise la même *méthode de Laplace* pour majorer le risque d'erreur et le risque de l'assureur; les risques statistique et économique sont donc définis par analogie. La même analogie est à l'œuvre chez un auteur danois fort méconnu.

b. Monsieur Tetens fut un homme-orchestre

Borch ((1967) p. 412) attribue à Johann Nicolaï Tetens l'invention de la première mesure de dispersion dans l'histoire des statistiques, information qu'il tient probablement de Bohlmann-Poterin du Motel (1911), p. 577 n. 179 (à moins que ce ne soit de G. Hardy, qui aurait évoqué Tetens dans son cours à l'institut des actuaires, mais faute de trouver ledit cours, nous n'avons pas pu vérifier cette information). Tetens est un esprit curieux. Il naît en 1736 à Tetenbüll, dans le Holstein, et obtient à 24 ans un poste d'enseignant en *philosophie naturelle* à l'Académie de Bützow dans le Mecklembourg. En 1776, il devient professeur de philosophie à l'Université de Kiel (Kant lui devrait le concept de philosophie *transcendentale*). Il s'intéresse alors aux mathématiques: apparenté à l'école combinatoire allemande, il produit en particulier en 1785-6 son ouvrage sur les rentes viagères, et, en 1796, *Der Polynomische Lehrsatz, das wichstigste Theorem der ganzen Analysis ... neu bearbeitet... von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg. Zum Drück befordert und mit Anmerkungen... versehen von C. F. H.* (qui contient une « démonstration » du théorème fondamental de l'algèbre). Dès cette époque pourtant, il a déjà entamé une carrière de haut fonctionnaire: membre du *Finanzcollegium* de Copenhague (1789), conseiller d'Etat (1791), co-directeur de la banque d'Etat et directeur des caisses pour les veuves (1803).

Malgré cette activité profuse et polygraphique, Tetens trouve le temps de consacrer dans son ouvrage de 1785 des développements sur le *Risico*. Cet indicateur n'est, contrairement à ce que prétendent les commentateurs, ni l'erreur moyenne[7] (BORCH (1969), p. 1), ni le risque moyen linéaire[8] (Bohlmann-Poterin du Motel

[7] Soit une variable X d'espérance $\overline{x}$ présentant n issues x_i, $i \in [1,n]$ rangées par ordre croissant, dont les probas respectives sont p_i, il existe alors un plus grand n_0 tel que $\forall i \leq n_0,\ x_i \leq \overline{x} = 0$. L'erreur moyenne (écart moyen absolu des anglo-saxons) vaut $\sum_{i=1}^{n} p_i \left|\overline{x} - x_i\right|$.

[8] En reprenant les mêmes notations, le risque moyen linéaire s'écrit $-\sum_{i \leq n_0} p_i x_i$.

CAPITULO-07.qxd 30/04/04 13:45 PÆgina 135

[1911], p. 577), mais l'*espérance des écarts pour les issues inférieures à la moyenne*[9] (en fait c'est la généralisation aux VAR discrètes d'une mesure que de Moivre[10]). Pour des loteries symétriques (d'espérance non-nulle): erreur moyenne (divisée par deux) et indicateur de risque sont évidemment égaux, mais pas le risque moyen linéaire. Si l'on considère la loterie moins son espérance, alors les 3 mesures sont identiques (voir PRADIER (1998) p. 119-120).

A la lecture de Tetens, on se demande à quoi sert sa théorie du risque. Pas à établir le niveau du chargement, comme chez Laplace ou Condorcet, puisque, l'auteur n'envisage que des primes *actuarielles*. Le principal «résultat» de Tetens est d' indiquer comment il faut proportionner les provisions au nombre de contrats. Apparemment, on discutait pour savoir si le risque augmentait ou non avec le nombre de contrats. Tetens montre que le risque agrégé augmente (n fois plus de contrats, c'est $\sqrt{n}$ fois plus de risque) mais le risque inhérent à chaque contrat diminue. Ce qui est bizarre (et hypothétique), c'est la combinaison de l'absence de chargement et de la recherche d'une niveau «optimal» de réserves d'assurance. Cela est-il à mettre en relation avec le fait que les caisses d'assurance-vie étaient considérées par les Allemands (et les Danois) comme des institutions de bienfaisance (au contraires des sociétés anglaises, commerciales)? Et comment se satisfaire d'un tel bricolage? D'autant que la prise en compte des contrats est fortement simplifiée: les rentes sont réduites à deux issues (paiement d'une seule annuité ou paiement intégral), au contraire des calculs laplaciens qui, grâce à l'hypothèse de Moivre, prennent en compte tout la distribution des issues possibles du contrat.

Tetens ne s'arrête pas là. Conscient de l'analogie conceptuelle, cette fois, entre les problèmes de dispersion, il attaque la question du risque d'estimation sur le modèle de celle du risque de la caisse… De fastidieux calculs (dont on trouvera la trame dans Pradier (1998) p. 121-126) mettent en scène la formule de Stirling version Moivre (1730); ils permettent d'approcher les résultats que l'auteur recherche on ne sait trop où… Il conclut qu'il faut environ 1.000 observations pour qu'une table de mortalité soit fidèle à une demie-année près. Compte tenu de sa méthode, il n'y a pas de seuil de confiance associé à l'intervalle de confiance. Si on la calcule *a posteriori* (en remarquant que $\mathcal{R}$= 0,8.ó), on obtient 0,576! Le seuil de

---

9 Le risque de Tetens vaut donc $\mathbb{R} = \sum_{i \leq n_0} p_i \left| \overline{x} - x_i \right|$.

10 Au § 6 de la *Doctrine of chances*, Moivre (1756) écrit: «le risque de perdre une somme est l'inverse de l'espérance. Sa vraie mesure est le produit de la somme aventurée par la probabilité de la perte». Au paragraphe suivant, il ajoute que «l'avantage ou le désavantage d'un jeu résulte de la combinaison des espérances et des risques respectifs des différents joueurs». Cependant, Moivre n'use plus dans la suite de sa *Doctrine* du concept de risque, qu'il ne développe que pour des jeux présentant des issues binaires (gain ou perte). Sa mesure est reprise par J. M. Keynes (1921), qui se contente, là encore, de définir. Il est également à noter que Moivre (1711) ne parle pas de risque dans *De mensura sortis*, contrairement à ce qu'écrit Bernstein (1996) p. 126.

confiance ridicule est bien évidemment à mettre en relation avec le faible nombre d'observations nécessaires! Bref, tout cela paraît bizarre. Mais au moins, Tetens a conscience de l'analogie entre des situations dont Laplace ne découvre les similarités qu'à travers le prisme de sa méthode.

*

* *

On serait bien embarrassé de conclure un pareil catalogue. Il apparaît manifestement que les auteurs du XVIIIe siècle ont su donner des caractérisations variées de la notion de risque: en général, celles-ci font appel à des concepts mathématiques de pointe à l'époque, qui sont plutôt ébauchés que rigoureusement définis. De manière générale, il y a peu de continuité d'un auteur à l'autre dans les détails techniques (si l'on excepte le lien entre les travaux de Condorcet et ceux de Laplace, qui définissent le cadre de la *théorie mathématique du risque* telle qu'elle sera pratiquée par les actuaires). Si bien que l'on peut comprendre pourquoi ces idées exquises ne se sont pas transmises: Laplace mis à part, toutes ces considérations sur le risque sont «en avance» si l'on veut de plus d'un siècle, elles ne répondent pas à des questions centrales du temps, mais constituent pour leurs auteurs, des récréations, des recherches aussi fondamentales que gratuites… dans la mesure où elles n'ont peut-être pas pour but d'aboutir.

BIBLIOGRAPHIE

BERNOULLI, D. (1731): «Specimen theoriae novae de mensura sortis», rééd. *in Die Werke von Daniel Bernoulli*, t. II, Basel, Birkäuser Verlag; trad. angl. «Exposition of a new theory on the measurement of risk» *in Econometrica* XXI, pp. 223 sqq., 1954: trad. fr. par Charreton R., notes de Bru B., «Esquisse d'une théorie nouvelle théorie de mesure du sort», *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, VI, pp. 61-77.

BERNOULLI, D. (1760): «Essay d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir», *Histoire de l'Académie royale des sciences*, Paris, 1766, rééd. *in* Die Werke von Daniel Bernoulli, t. II, Basel, Birkäuser Verlag.

BERNOULLI, D.; BERNOULLI, N.; CRAMER, G.; MONTMORT, P. RÉMOND DE (1713-1732): Correspondance, rééd. *in* Die Werke von Jakob Bernoulli, t. III, pp. 557-567, Basel, Birkäuser Verlag, 1975.

BERNSTEIN, P. L. (1996): *Against the Gods: the Remarkable Story of Risk*, New York, Wiley.

BORCH, K. H. (1967): «The Theory of Risk», *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, pp. 432-467.

BORCH, K. H. (1969): «A Note on Uncertainty and Indifference Curves», *Review of Economic Studies* XXXVI, n° 1, 1-4.

BRU, B. (1988): «Estimations laplaciennes», *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1988, pp. 6-45.

CARAMUEL, J. (1670): «Kybeia», *in Mathesis Biceps —mathesis nova*, Lyon, Laurent Anisson.

CONDORCET, J. A. N. CARITAT DE (1784): «Assurances (maritimes)», *in Arithmétique politique — textes rares ou inédits* (1767-1789), Paris, INED, 1994, pp. 485-494.

CONDORCET, J. A. N. CARITAT DE (1994): *Arithmétique politique —textes rares ou inédits* (1767-1789), B. Bru et P. Crépel, éds., Paris, INED, 1994.

COUMET, E. (1970): «La théorie du hasard est-elle née par hasard?», *Annales E. S. C.*, XXV, pp. 574-598.

CRÉPEL, P. (1988): «Condorcet, la théorie des probabilités et les calculs financiers», *in* R. Rashed (1988), pp. 267-325.

D'ALEMBERT, J. LE ROND (1761a): «Dixième mémoire: réflexion sur le calcul des probabilités», *in Opuscules mathématiques*, vol. II, pp. 1-25, Paris, David.

D'ALEMBERT, J. LE ROND (1761b): «Onzième mémoire: sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite Vérole», *in Opuscules mathématiques*, vol. II, pp. 26-46, Paris, David.

D'ALEMBERT, J. LE ROND (1767): «Réflexions sur l'inoculation», réed. in *Oeuvres complètes*, t. 1, Paris, Belin, 1821, pp. 463-514.

D'ALEMBERT, J. LE ROND (1768a): «Sur le calcul des probabilités», in *Opuscules mathématiques*, vol. IV, pp. 74-79, Paris, David.

D'ALEMBERT, J. LE ROND (1768b): «Sur l'analyse des jeux», in *Opuscules mathématiques*, vol. IV, pp. 80-92, Paris, David.

D'ALEMBERT, J. LE ROND (1768c): «Sur la durée de la vie», in *Opuscules mathématiques*, vol. IV, pp. 92-98, Paris, David.

D'ALEMBERT, J. LE ROND (1768d): «Réflexions philosophiques et mathématiques sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole», in *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, vol. 5, Chatelain, Amsterdam, pp. 305-430.

DE SOTO, D. (1556): *De Iustitia et Iure*. *De la Justicia y el Derecho*; réed et trad. Madrid, Instituto de Estudios Políticos, 1968.

HALLEY, EDMUND (1693): «An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives. By M. E. Halley F. R. S.», in *Philosophical Transactions* For the Month of January, Numb. 196, pp. 596-610.

ISRAEL, G. (1996): *La mathématisation du réel*, Paris, Le Seuil.

JALLAIS, S., PRADIER, P. C., TEIRA-SERRANO, D. (2003): «Experimental Definitions of Rationality in Decision Theory since the Eighteenth Century», communication au colloque TRUCMUCHE, Oviedo.

KAHNEMAN, D. ET TVERSKY, A. (1979): «Prospect Theory: an Analysis of Decision under Risk», *Econometrica* XLVII, n° 2 (mars), pp. 263 sqq.

KEYNES, J. M. (1921): *A treatise on Probability*, London, MacMillan; réed. in *The Collected Writings of J. M. Keynes*, vol. VIII, London, MacMillan.

KRAMP, C. (1799): *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, Strasbourg, Dannbach.

LA CONDAMINE, C. DE (1754), (1758): «Mémoires sur l'inoculation de la petite vérole», *MARS* pour 1754 (1759), pp. 615-670; *MARS* pour 1758 (1763), pp. 439-482.

LAPLACE, P. S. (1785): «Mémoire sur les approximations des formules qui sont des fonctions de très grands nombres», *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* (pour l'année 1782); rééd. *in* Laplace P. S. [1878-1912], vol. X, pp. 209-291.

LAPLACE, P. S. (1786): «Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'étendue de la France pendant les années 1781 et 1782», *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* (pour l'année 1783), pp. 693-702 ; réed. in Laplace P. S. [1878-1912], vol. IX, pp. 35-46.

LAPLACE, P. S. (1810): «Mémoire sur les approximations des formules qui sont des fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités», *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* (pour l'année 1809); réed. in Laplace P. S. (1878-1912), vol. XII, pp. 301-353.

LAPLACE, P. S. (1812): *Théorie analytique des probabilités*, Paris, Courcier; réed. in Laplace P. S. (1878-1912), vol. VII, 1886; réimp. Paris, Jacques Gabay, 1993.

LAPLACE, P. S. (1878-1912): *Œuvres complètes*, Paris, Gauthier-Villars.

LE BRAS, H. (2000): Naissance de la mortalité —L'origine politique de la statistique et de la démographie, Paris, Gallimard-Le Seuil, 2000.

MARTIN, T. (1999): «Certitude et probabilité selon Buffon», in *Revue de l'enseignement philosophique*, 49e année, numéro 3, janvier-février 1999, pp. 5-18.

MOIVRE, A. DE (1711): «De mensura sortis», *Philosophical transactions*, jan. fév., pp. 206-264; réed. New York, Johnson & Kraus, 1963.

MOIVRE, A. DE (1730): *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, London, Tonson and Watts.

MOIVRE, A. DE (1756): *Doctrine of chances*, 3rd ed., London, A. Millar; réed. New York, Chelsea, 1967.

PRADIER, P. C. (1998): *Concepts et mesures du risque en théorie économique — essai historique et critique*, Thèse ENS-Cachan.

PRADIER, P. C. (2003): «D'Alembert, l'hypothèse de Bernoulli et la mesure du risque: à propos de quelques lignes des *Opuscules*», *in* Thierry Martin, éd., *L'arithmétique politique française*, INED, 2003.

RIEUCAU, J. N. (1998): «*Les entreprises ou les hommes s'exposent à une perte, dans la vue d'un profit* —Condorcet et l'héritage de D'Alembert», *Revue économique*, XLIX, n°5, pp. 1365-1405.

ROTHSCHILD, M., STIGLITZ, J. E. (1970): «Increasing risk: I. A definition», *Journal of Economic Theory* II, pp. 225-243.

TETENS (1786): *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, zweyter Teil*, Lepizig, Weidmanns Erben und Reich.

CAPÍTULO 8

Evolución histórica de los métodos de decisión a partir de Laplace

Gregoria Mateos-Aparicio Morales
Universidad Complutense de Madrid

Esta ponencia pretende explicar la evolución histórica de los métodos de decisión a partir de Laplace, ensamblándola con la ponencia, presentada en las Primeras Jornadas de la Historia de la Estadística y de la Probabilidad, sobre La evolución de la Teoría de la Decisión, y que versaba precisamente sobre La historia de la Probabilidad hasta Laplace. En esta última se establecían las aportaciones de los distintos científicos que, al mismo tiempo que investigaron sobre el cálculo de probabilidades, dejaron su huella en el desarrollo de la Teoría de la Decisión. Por tanto, ahora exponemos una especie de segunda parte de aquel trabajo.

Este nuevo recorrido histórico lo iniciamos con:

La evolución de la Teoría de la Decisión unicriterio a partir de Laplace

A comienzos del siglo XIX, Laplace plantea cuestiones en las que subyacen los elementos básicos de un problema de decisión. A partir de este autor, en la primera mitad del siglo XIX, Gauss propuso y resolvió problemas relacionados con astronomía y decisión, pero las contribuciones más importantes de este científico, en el campo de la estadística, se concretan en la Teoría de la Estimación, para la que desarrolla su Teoría de los Mínimos Cuadrados, pues «Aunque fue Legendre quien inventó el Método de los Mínimos Cuadrados, todavía hoy una de las herramientas más utilizadas para estimar modelos estadísticos, Gauss demostró su optimalidad cuando los errores de medida siguen una distribución normal»[1].

Gauss[2] demostró, en 1821, que la media de una distribución minimiza el error cuadrático esperado y que «tanto la decisión de Laplace como la suya son casos particulares de una función de pérdida más general»[3]. Tanto Laplace como Gauss resolvieron problemas relacionados con la decisión, pero, aunque a mediados del siglo XIX ya existen las herramientas básicas para desarrollar la estadística actual, las aplicaciones se encauzan en otros campos. De hecho, el progreso de la ciencia estadística en esta época se centra en la resolución de problemas de inferencia experimental en agricultura, física, medicina, biología, astronomía, etcétera, y no en los campos a los que estaba destinada esta herramienta, que son, básicamente, el análisis cuantitativo de datos demográficos, sociales y económicos.

Entre las aportaciones más importantes de mediados del siglo XIX destacan las de Dupuit, que en 1844 formula los primeros conceptos sobre la Teoría de la Utilidad Marginal cuando intenta construir una teoría de precios que maximice la utilidad, establece los conceptos de utilidad marginal y utilidad total, y define el concepto de «exceso de consumidores» como diferencia entre la utilidad total y la marginal.

A finales del siglo XIX la utilidad empieza a ganar terreno en el campo de la economía, siendo las aportaciones más destacadas las de Menger, Walras, Jevons y Marshall. Como recoge Infante: «Menger representa las utilidades marginales por números y emplea como criterio, para la asignación óptima de un bien, la igualdad de utilidades marginales. Sin embargo, Walras supone la existencia de una medida de la intensidad de la utilidad y, en consecuencia, habla de la utilidad como una magnitud absoluta. Jevons y Marshall afirman que la utilidad de un conjunto de bienes puede expresarse como la suma de las utilidades pertenecientes a cada bien individualmente»[4].

---

1 PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA, D. (1995): *Estadística. Modelos y métodos. Vol 1 Fundamentos*. Alianza Editorial. Madrid, pág. 37.

2 Carl Friedrich Gauss nació el 30 de abril de 1777 en Bruswick (Alemania) y murió el 23 de febrero de 1855 en Göttingen. Destacan sus contribuciones a la estadística, matemática, física y astronomía.

3 RÍOS, S. y RÍOS-INSÚA, S. (1998): *La Teoría de la Decisión de Pascal a Von Neumann.* Conferencias sobre Historia de la Matemática en el siglo XX, febrero-marzo de 1996. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, pág. 19.

4 INFANTE MACÍAS, R. (1997): *Teoría de la Decisión*. Unidades Didácticas, Tomo 1. UNED. Madrid, pág. 45.

Hay que destacar también los trabajos pioneros de Ramsey[5] y De Finetti, que prepararon el camino para que Savage construyera su axiomática conjunta de la probabilidad subjetiva y de la utilidad. Esto es debido a que Ramsey desarrolló fundamentos de probabilidad basados en conceptos de esperanza matemática y aplicó términos como «riesgo» y «utilidad», a los que proporciona un carácter personalista o subjetivo, volviendo a plantear y renovar en su trabajo *Truth and Probability*[6] la idea de utilidad de Daniel Bernoulli.

El otro pionero, antecedente fundamental para los trabajos de Savage, Bruno De Finetti[7], contribuyó al desarrollo de la inferencia bayesiana, la Teoría de la Probabilidad, Pedagogía, Justicia Social y Economía. Su mayor contribución en el campo de la estadística fue su punto de vista subjetivo de la probabilidad. Una de sus frases preferidas era «la probabilidad no existe», con la que él quería decir que la probabilidad no tiene una existencia, como la longitud de una mesa, sin la consideración del observador. Y añadía: «tampoco es una propiedad del observador, sino que más bien expresa una relación entre el observador y el mundo externo».

Esta concepción subjetiva de la probabilidad es un elemento básico de la metodología bayesiana en la Teoría de la Decisión, puesto que sirve como instrumento para asignar probabilidades *a priori* a los estados de la naturaleza en los procesos de decisión en ambiente de incertidumbre, que luego serán rectificadas, *a posteriori* de una información muestral, con dicha metodología bayesiana.

De Finetti creía en un sistema económico basado en las ideas de Pareto de optimalidad y equidad. En su opinión, esto produciría un sistema social mejor que la ambición que producía el capitalismo. Pero de Pareto hablaremos más adelante, al analizar la evolución de la decisión con criterios múltiples.

Podemos decir que, en general, los grandes avances teóricos se han producido por la necesidad de resolver importantes problemas prácticos. Así, los problemas de las nuevas tecnologías, surgidas para estudiar aspectos económicos de control de calidad, inspección por muestreo, codificación de señales, etcétera, en la II Guerra Mundial, hacen necesario los modelos de decisión en incertidumbre introducidos por Wald.

Abraham Wald[8] contribuyó sobre todo a la Teoría de la Decisión, el análisis secuencial y la econometría. Los primeros artículos de Wald en estadística fueron

---

5 Frank Plumpton Ramsey nació el 22 de febrero de 1903 en Cambridge (Inglaterra) y murió el 19 de enero de 1930 en la misma ciudad.

6 En *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*. Kegan Paul, London, y Harcourt, Brace and Co., New York, 1931, págs. 156-198.

7 Bruno De Finetti nació el 13 de junio de 1906 en Innsbruck (Austria) y murió el 20 de julio de 1985 en Roma.

8 Abraham Wald nació el 31 de octubre de 1902 en Cluj, Hungría (en la actualidad este territorio pertenece a Rumanía). Y murió en Travancore (India) el 13 de diciembre de 1950.

publicados en 1939, sobre estimación y contrastes de hipótesis, que fueron una de sus más importantes contribuciones a la Teoría Estadística. En su trabajo de 1939 *Contributions to the Theory of Statistical Estimation and Testing Hypotheses*[9] aparecen los elementos básicos de un problema de decisión: el espacio de acciones, espacio de estados y espacio de consecuencias y el experimento que proporcionan las observaciones muestrales, cuya distribución depende del verdadero estado de la naturaleza.

Wald introduce el concepto de «función de decisión» como la regla de decisión que permite decidir en función de cada valor observado x. Así, la consecuencia asociada para cada regla de decisión particular con cada estado es una pérdida, y se trata de hacer mínima esa pérdida eligiendo de manera adecuada la decisión, una vez observado el elemento muestral[10].

Finalmente, Wald resume su obra en su famosa monografía *Statistical Decision Function*[11], en la que demuestra que las únicas soluciones admisibles son esencialmente las de Bayes, que forman una clase mínima completa.

A partir de 1950 trabajan un gran número de importantes estadísticos para establecer nuevos resultados en la teoría, a la vez que en el perfeccionamiento matemático de la misma. Entre ellos, Kiefert, Sobel, Weiss, Wolfowitz, Stein, Blackwell, Le Cam, etcétera. Con sus trabajos se extienden las posibilidades de aplicación a capítulos clásicos de la estadística, como el diseño de experimentos, muestreo, métodos no paramétricos, así como puntos de vista nuevos, como el análisis secuencial, introducido por el propio Wald para extender el espacio de decisiones, incluyendo decisiones intermedias que permitan buscar más datos, si el coste de los mismos lo permite, y decisiones terminales.

Hay que señalar como laguna importante de la metodología «waldiana» el no implicar la incertidumbre en la valoración de la función de pérdida, sobre todo cuando se había publicado la Teoría de la Utilidad en Riesgo en el libro de Von Neumann (1944).

Posteriormente, John Von Neumann y Oscar Morgenstern desarrollan la moderna Teoría Probabilística de la Utilidad en su obra *Theory of Games and Economic Behavior* (1944), que constituye un tratamiento axiomático conjunto para la probabilidad y la utilidad. Los autores demuestran que bajo ciertas condiciones con los axiomas propuestos existe una función que llaman «utilidad» que es lineal, conserva el orden y es única, salvo transformaciones lineales positivas.

---

9 WALD, A.: *Annals of Mathematical Statistics*, 10, págs. 299-326.

10 Véase anexo al final de este texto.

11 Ed. Wiley, New York, 1950.

La aplicación de la Teoría de la Utilidad Esperada de Von Neumann y Morgenstern a la Teoría de los Juegos de Estrategia ha tenido gran repercusión tanto en su aplicación al análisis económico, como desde el punto de vista metodológico. En efecto, como señala Sixto Ríos: «Las dos realidades que parecen necesarias para la aparición del nuevo paradigma de la *utilidad esperada*, a saber, la progresiva axiomatización de la matemática (Hilbert, Kolmogoroff,...) y las fuertes necesidades de las aplicaciones económicas y militares, consecuencia de la II Guerra Mundial, se dan cuando Von Neumann-Morgenstern se interesan por tal problema, secularmente importante, y consiguen su solución (1944). Solución que no habían logrado ni Laplace ni Gauss, a pesar de que a comienzos del siglo XIX estaban en posesión de esquemas y recursos fundamentales como la fórmula de Bayes, la tabla de decisión de Pascal, la función de pérdida, etcétera.

Las características que introduce el nuevo enfoque sobre la decisión son: 1.º El concepto de preferencia se extiende no sólo al dinero, sino a objetos (automóviles, enfermedades, días de curación, etcétera); 2.º La utilidad se asocia al concepto de probabilidad, lo que nos permite comparar situaciones aleatorias simples para pasar a construir situaciones complejas, mediante axiomas de racionalidad sencillos que conducen a la regla de la «máxima utilidad esperada»[12].

Con los trabajos de Wald, Ramsey y De Finetti, pero sobre todo con el de Von Neumann y Morgenstern, la Teoría de la Utilidad recibe un gran impulso que propicia el que Savage[13] construya una axiomática conjunta de la probabilidad subjetiva y la utilidad. Axiomática que generaliza el principio de «máxima utilidad esperada» para pasar al principio de «máxima utilidad subjetiva esperada», en el que las probabilidades se determinan subjetivamente.

Las aportaciones más destacadas de Savage se producen en los campos de la Teoría de la Probabilidad, fundamentos de estadística y estadística bayesiana, siendo este último campo el que vamos a resaltar. De hecho, la axiomática de Savage, publicada en su obra *Foundations of Statistics*[14], es el punto de partida de la metodología bayesiana de la decisión. Lo que presupone un proceso de decisión en ambiente de incertidumbre, en el que se introducen los conceptos de utilidad y probabilidad subjetiva con el empleo del Teorema de Bayes.

Tal y como lo recoge Sixto Ríos: «A partir de la axiomática de Savage, el problema central de la decisión estadística en ambiente de incertidumbre se plantea

---

[12] RÍOS, S. y RÍOS-INSÚA, S. (1998): *La Teoría de la Decisión de Pascal a Von Neumann*. Conferencias sobre Historia de la Matemática en el siglo XX, febrero-marzo de 1996. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, pág. 22.

[13] Leonard Jimmie Savage nació el 20 de noviembre de 1917 en Detroit (Michigan) y murió el 1 de noviembre de 1971 en New Haven (Connecticut).

[14] Ed. Wiley, New York, 1954.

así: un decisor debe elegir una decisión a de un conjunto A. La consecuencia $c(a,\theta) \in C$ depende no sólo de a sino de $\theta \in \Phi$ (conjunto de estados de la naturaleza). El decisor puede observar el resultado $x \in X$ de un experimento cuya distribución es $P_X(x/\theta)$. El objetivo del decisor es hacer máxima su utilidad $u(c(a,\theta))$ eligiendo $a(x)$ adecuadamente. A través de los desarrollos que permite la axiomática de Savage, se llega a la solución de Bayes $a(x)$, que es la que maximiza la utilidad esperada:

$$\int_{\Phi} u(c(a,\theta))\, dP(\theta/x)$$

o lo que es lo mismo, introduciendo la pérdida $d(c(a,\theta)) = -u(c(a,\theta))$, hace mínima la pérdida esperada. La regla de decisión de Bayes se puede obtener eligiendo para cada x la decisión $a(x)$ que hace mínimo el riesgo respecto a la distribución *a posteriori* $P(\theta/x)$».[15]

Este tratamiento de un problema de decisión se fundamenta en la Teoría de Von Neumann y Morgenstern donde la representación de los juegos se realiza en forma de tabla o matriz de decisión con los elementos: decisiones o alternativas posibles, estados de la naturaleza y consecuencias.

Una alternativa a este tratamiento lo constituye el enfoque en el que todos los distintos cursos posibles del proceso de decisión se representan en un árbol de decisión. Este enfoque seguido por Raïffa[16] considera, en primer lugar, el tratamiento de los aspectos no numéricos para facilitar la comprensión de los decisores. Posteriormente se procede, en una segunda etapa, a los aspectos cuantitativos del problema.

El modelo, por tanto, será una combinación del aspecto intuitivo del decisor y el operativo del analista. Así se construye un grafo con forma de árbol, en el que partiendo de una situación inicial se van sucediendo arcos o ramas que representan las distintas alternativas del decisor y los nudos, en los que interviene el azar, que producen los sucesos posibles con incertidumbre, que conducirán al decisor a los resultados posibles, como consecuencia de que tome cada alternativa con cada uno de esos sucesos.

El tratamiento cuantitativo del problema consistirá en la asignación de las probabilidades *a posteriori* de los sucesos (estados) y la asignación de las utilidades correspondientes a los resultados posibles.

Con esta reseña histórica, que no pretende ser exhaustiva, dada la extensión limitada de esta ponencia sobre la evolución de la Teoría de la Decisión en incerti-

[15] RÍOS, S. y RÍOS-INSÚA, S.: Op. Cit., pág. 26.

[16] RAÏFFA, H. (1968): *Decision Analysis.* Addison Wesley, Reading Mass.

dumbre para procesos unicriterio, veamos a continuación dónde están los orígenes y cuál ha sido la evolución de los procesos de decisión multicriterio.

Orígenes y evolución de la Teoría de la Decisión multicriterio

Es difícil saber, como ocurre con cualquier área de conocimiento, cuál es la fecha de aparición de los primeros conceptos de decisión multicriterio, ya que su aparición es consecuencia de un proceso en el tiempo. Puede decirse, sin embargo, que es en la década de los años sesenta del siglo XX cuando empiezan a aparecer los trabajos sobre modelos multiobjetivo, aunque no es hasta los años setenta cuando se produce el gran impulso y la más importante proliferación de publicaciones. Es entonces cuando se acepta definitivamente el nuevo paradigma por la comunidad científica.

Si nos remitimos a los antecedentes de esta historia, como señala Sixto Ríos: «Parece que el primer problema de decisión multicriterio, del que se conserva un recuerdo histórico, fue propuesto por el químico inglés J. Priestly a B. Flanklin. Este último indicó en una carta de 1772 al primero una ingeniosa metodología que él llamaba "álgebra moral o prudencial", y que viene a ser una asignación de pesos subjetivos a los diferentes criterios que permiten una comparación de los resultados previsibles de dos decisiones. Podría considerarse, por tanto, como el antecedente más remoto de los métodos que ahora se llaman compensatorios. Pero el mayor impulso al planteamiento correcto de los problemas de decisión multicriterio vino de la Teoría Económica tradicional, concretamente de la economía del bienestar y la Teoría de la Utilidad»[17].

Precisamente, las investigaciones económicas de finales del siglo XIX y principios del XX son las que contribuyeron al desarrollo de esta teoría. Los economistas de la época analizan el comportamiento de los agentes económicos, y formulan que este comportamiento se basa en maximizar sus funciones de utilidad. Dado que los diversos agentes económicos tienen intereses contrapuestos, la maximización de las utilidades, de manera global, equivaldría a maximizar una utilidad global con criterios distintos.

Entre los trabajos que contribuyeron a este desarrollo, por su utilización de la Teoría de la Utilidad en la economía, destacan los de Menger[18] (1871), Walras[19] (1874-77) y Jevons[20] (1911). Pero la mayoría de los autores están de acuerdo en que

[17] RÍOS, S. y RÍOS-INSÚA, S. (1998): *La Teoría de la Decisión de Pascal a Von Neumann.* Conferencias sobre Historia de la Matemática en el siglo XX, febrero-marzo de 1996. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, pág. 28.

[18] *Grundsätze der Volkswirtschaftslehre.* Braumüller, Wien.

[19] *Elements D'economic Politique Pure,* L. Corbaz and Companie, Laussanne.

[20] *Theory of Political Economy.* MacMillan, London.

desde un punto de vista conceptual, el primer tratamiento matemático del problema se debe al economista Edgeworth[21], aunque es Pareto quien generaliza este tratamiento matemático y propone condiciones de existencia de óptimo para los agentes económicos que intervienen en el proceso. Una situación en la que los individuos de una colectividad no pueden mejorar su satisfacción todos a la vez se denomina Óptimo de Pareto. Esta aportación de Pareto fue propuesta en 1896 como una parte de la Teoría del Bienestar y publicada en su famoso *Manuale di Economia Politica* en 1906. Los individuos de una colectividad, a los que se refiere el Óptimo de Pareto, con gustos diferentes se comportan como un único individuo que tiene que basar su elección en distintos criterios.

Hasta 50 años después, los economistas de la época no conocen las herramientas matemáticas necesarias para un progreso rápido de sus trabajos. Estos trabajos de matemáticos que harían progresar sus teorías son las de Cantor (1895) y Hausdorff (1906). Ambos proporcionan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de funciones de utilidad, el primero con un orden débil estricto y el segundo proporcionando un orden completo para el que existe una función de utilidad que lo represente.

Hasta 1951 el concepto de Óptimo de Pareto no empieza a aplicarse dentro de la investigación operativa, a través de un trabajo de Koopmans (1951), relacionado con las actividades de producción y distribución empresarial para una asignación eficiente de recursos, en el que propone la noción de «vector eficiente».

En el mismo año 1951, Kuhn y Tucker proporcionan un resultado teórico de maximización de un vector de funciones objetivo. Este trabajo puede considerarse fundamental ya que proporcionó la base para posteriores desarrollos de la programación matemática multiobjetivo.

Los Teoremas de Debreu (1954) sobre la existencia de la función de valor dieron lugar a los trabajos de Raïffa y Fishburn que construyeron las Teorías de las Funciones de Valor multiatributo y las Funciones de Utilidad multiatributo.

Otro trabajo fundamental para la Teoría de la Decisión multicriterio es el de Charnes, Cooper y Ferguson (1955) donde se exponen las ideas básicas de la programación por metas que después desarrollan Charnes y Cooper (1961) en su obra M*anagement Models and Industrial Applications of Linear Programming.*

En la década de los sesenta la Teoría de la Decisión multicriterio adquiere su propia identidad y desarrolla su propia terminología. En esta década las aportaciones más destacadas son la ya citada de Charnes y Cooper (1961) sobre programación por metas, que proporcionan una solución a los problemas multicriterio

[21] Francis Ysidro Edgeworth nació el 8 de febrero de 1845 en County Lonford (Irlanda) y murió el 13 de febrero de 1926 en Londres.

mediante técnicas de programación lineal. En estos años surge el equipo de investigadores franceses en problemas multicriterio acogidos por la dirección científica de la SEMA, empresa consultora francesa en el campo de las matemáticas aplicadas. En este grupo nace el concepto de «relación de superación» o «sobreclasificación» y el método ELECTRE de decisión multicriterio discreta asociado a esta relación.

Con este grupo de investigadores, dirigido por el profesor Bernard Roy, aparece un nuevo enfoque en la toma de decisiones, el que se ha dado en llamar ayuda multicriterio a la decisión. Este nuevo enfoque, extendido en Europa, es la esencia de la Escuela Europea de Ayuda Multicriterio a la Decisión frente a la Escuela Americana de los seguidores de Saaty y su Proceso Analítico Jerárquico (AHP).

En 1969, Benayoun y Tergny proponen el POP, más tarde llamado STEP o STEM, que es un método interactivo para la programación lineal multiobjetivo. Y ya en el último año de la década de los sesenta del siglo XX tuvo lugar en La Haya (Holanda) en el VII Congreso de Programación Matemática, la primera reunión científica sobre el análisis multicriterio. Allí se presentaron los trabajos de Roy y los dos primeros métodos interactivos, el de Benayoun y Tergny (publicado en 1971) y el de Geoffrion (publicado en 1972).

Pero el verdadero despegue para la Teoría de la Decisión multicriterio tuvo lugar en la I Conferencia Internacional sobre la Toma de Decisiones Multicriterio celebrada los días 26 y 27 de octubre de 1972 en la Universidad de Columbia en Carolina del Sur. Las ponencias presentadas en este encuentro son publicadas en un libro editado por Cochrane y Zeleny en 1973 (es importante señalar que Zeleny había empezado a trabajar en el análisis multicriterio con los franceses en la SEMA). A partir de este momento las reuniones internacionales se multiplican y paralelamente lo hacen los trabajos y publicaciones, hasta la actualidad.

Entre los métodos multicriterio más conocidos de tipo discreto hay que señalar los ya mencionados métodos de agregación ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la RÉalité), que son procesos de decisión multicriterio discreta basados en el uso de relaciones binarias llamadas de superación o sobreclasificación y en los conceptos de concordancia y discordancia con una hipótesis de sobreclasificación dada.

El ELECTRE fue inicialmente sugerido por Benayoun, Roy y Sussman (1966) y posteriormente mejorado por Roy (1971). Desde entonces, tanto las aplicaciones como los desarrollos teóricos de este método han sido muy intensos.

El ELECTRE I es el primer método de sobreclasificación o superación publicado. Posteriormente surgieron otros métodos para resolver las dificultades de cada uno de los anteriores, entre ellos, ELECTRE II (Roy y Bertier, 1973) que permite la construcción de una ordenación completa.

En la segunda mitad de los años setenta del siglo XX, se desarrolla el ELECTRE III (ROY, 1978) que trata de resolver las dificultades de los anteriores, que producían valoraciones imprecisas, introduciendo dos nuevas características: 1) holguras en la relación de preferencia-indiferencia, y 2) la relación de sobreclasificación la basa en conjuntos borrosos, esto es, la relación es una relación difusa.

Después en 1982, debido a Roy y Hugonnard, nace el ELECTRE IV que no utiliza ponderaciones para los criterios. Y finalmente, el ELECTRE IS (ROY y SKALKA, 1985) que es una adaptación de ELECTRE I a la lógica difusa, y el ELECTRE TRI (ROY, BOUYSSOU y YU, 1991) que asigna cada acción a una categoría predefinida.

Dentro del grupo de los métodos basados en relaciones de sobreclasificacón o superación debemos citar también el método PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations), uno de los más recientes, que como señala Barba-Romero y Pomerol «tiene su referencia más pionera en Brans *et al.* (1984), aunque hay aplicaciones anteriores allí citadas, pero referencias más completas y didácticas son Brans y Vincke (1985) y Brans *et al.* (1986)»[22].

También hay que señalar, especialmente, la Escuela Americana ya referida anteriormente, que está inspirada por los trabajos de Keeney y Raïffa (1976) sobre funciones multiatributo y Teoría de la Utilidad multiatributo. Un método popular dentro de este marco es el Proceso Analítico Jerárquico de Saaty (AHP), que está basado en el cálculo de las ponderaciones para los distintos criterios, mediante las comparaciones subjetivas por parejas que el decisor tiene sobre esos criterios, con el objeto de establecer una prioridad entre ellos.

Finalmente, en esta revisión histórica que no pretende ser exhaustiva, queremos añadir dos aspectos importantes. Por un lado, a partir de 1985, los métodos multicriterio conocen una importante difusión mundial y que, por otro, el elemento más relevante de los años ochenta es el de la introducción de la informática en la reflexión sobre la decisión multicriterio. Hoy en día, la decisión multicriterio puede ser considerada como una actividad en la que la aplicabilidad práctica y las herramientas informáticas tienen un papel fundamental.

Apuntes históricos sobre las decisiones colectivas

El primer antecedente sobre procesos de elección colectiva lo encontramos en la segunda mitad del siglo XVIII, en el académico francés Jean Charles de Borda, Caballero de Borda (1733-1799), que publicó en 1781 su trabajo *Memoria sobre las elecciones en escrutinio*. Borda expone que una votación simple puede seleccionar

[22] BARBA-ROMERO, S. y POMEROL, J-CH. (1997): *Decisiones multicriterio.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares, pág. 223.

el candidato equivocado. Es decir, que si los votantes eligen sólo a un candidato, independientemente de sus preferencias individuales, la elección puede ser irracional. Por ello, este autor argumentó el hecho de que la elección social requiere que los votantes establezcan una ordenación de sus candidatos. El método propuesto por Borda fue adoptado por la Academia de Ciencias Francesa para la elección de sus miembros.

Un segundo antecedente importante lo encontramos en Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marqués de Condorcet (1743-1794), también académico francés, que en 1785 publicó su *Essai sur l'Application de l'Analyse à la Probabilité des Decisions Rendues à la Pluralité des Voix* (Ensayo sobre la aplicación del análisis a la probabilidad de las decisiones debidas a la pluralidad de las voces), entendiendo por voces las que tenían voto en la asamblea francesa. Es famosa la aportación de este autor sobre la paradoja del voto o efecto Condorcet en el que expone la no transitividad de las decisiones colectivas, tomadas con la democrática regla de la mayoría.

Un tercer antecedente histórico lo encontramos en Pierre Simon Laplace (1749-1827), que en 1812 publicó sus *Lecciones de matemáticas en la Escuela Normal en 1795* en el periódico de la Escuela Politécnica de París. Laplace consideró una votación simple en la que un votante tiene que elegir entre cuatro elecciones diferentes, cada una con tres candidatos. Este problema intentó resolverlo reduciéndolo a un problema de probabilidades, calculando las intensidades de preferencia por término medio de las tres alternativas. Finalmente, el candidato o alternativa elegido sería aquél al que los votantes le atribuyeran una mayor intensidad de preferencia.

Por orden cronológico, haremos referencia al reverendo C. L. Dodgson[23] (1832-1898), que escribió tres ensayos sobre este tema: 1) una discusión de varios métodos sobre el procedimiento en la realización de las elecciones (1873); 2) sugerencias para el mejor método de agregar los votos, cuando van a ser votados más de dos resultados (1874); y 3) un método de agregar votos en el caso de más de dos resultados (1876). En el primer ensayo, Dodgson considera los distintos métodos de elección, incluyendo la votación simple y el método de marcas de Borda y Laplace, mostrando sus deficiencias.

EL último antecedente histórico de las decisiones colectivas que vamos a considerar es el de E. J. Nanson (1850-1936), profesor de matemáticas de Melbourne, con su trabajo sobre *Métodos de elección,* publicado en 1907. Nanson, usando el criterio de ordenación de Borda y las ideas de Condorcet, empieza clasificando por rangos a los candidatos y elimina a los que han obtenido menos votos que la media,

[23] Literato, matemático y sacerdote protestante inglés, conocido con el seudónimo de Lewis Carrol.

supuesto que cuenta con las ordenaciones que los votantes hacen de los citados candidatos. Se repite el proceso con los restantes candidatos, es decir, los ordena por rangos, y así hasta que queda un solo candidato, que será el seleccionado.

En el último cuarto del siglo XIX, Wilfredo Pareto (1848-1923) estableció las bases de lo que hoy conocemos como Teoría de la Elección Social. Pareto en su *Manual de economía política* (1906) establece la idea de óptimo. Una elección colectiva es paretiana si no existe otra que sea tan aceptable para todos los individuos del grupo, y al mismo tiempo sea estrictamente preferida por al menos un individuo del grupo. Pareto establece que no todos los individuos pueden obtener su satisfacción máxima al mismo tiempo, es decir, que lo que gana uno es en detrimento de otro.

Es importante resaltar, como señala Barba-Romero que «es preciso esperar a los albores de la II Guerra Mundial para que las corrientes económica y política converjan en las modernas Teorías de la Elección Social, del Voto y del Análisis Multicriterio, cuyos elementos básicos son comunes. Esta síntesis de las dos corrientes se efectuará inicialmente en el marco general de la microeconomía, bajo el impulso de numerosos economistas como Hicks, Bergson y Samuelson, fundadores de "la nueva economía del bienestar". En 1944, el libro de Von Neumann y Morgenstern hace una alusión directa al problema, sin profundizar en él. En 1951, Koopmans introduce la noción de vector eficiente que es una nueva versión del Óptimo de Pareto. El problema de criterios múltiples en programación lineal es abordado también por Khun y Tucker (1951) y después por diversos especialistas de la investigación operativa como Hitch (1953), Klahr (1958) y otros»[24].

Son precisamente los trabajos de Bergson y Samuelson los que constituyen un eslabón importante para el paso de la primitiva economía del bienestar a la que hoy conocemos como Teoría de la Elección Social, teniendo esta última entidad propia, incluso desligada parcialmente de la economía. Este cambio se produce sobre todo a partir del trabajo de Kenneth J. Arrow.

K. J. Arrow, excelente economista, Premio Nobel de 1972, empieza donde Bergson y Samuelson terminaron. Su punto de partida es la «investigación de la generación de las preferencias sociales». Para Arrow, la función de bienestar social asigna a cada sistema de preferencias individuales, sobre las alternativas abiertas a la sociedad, unas preferencias sociales sobre las mismas. Arrow afirma que se necesita un juicio de valor concreto para hacer compatibles en el mismo plano las utilidades de los diferentes individuos, y otro juicio de valor más para hacer la agregación en cualquier fórmula matemática (crítica abierta a los teóricos de la economía

[24] BARBA-ROMERO, S. y POMEROL, J-CH. (1997): *Decisiones multicriterio.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares, pág. 8.

del bienestar). Arrow formuló en 1951 su Teorema de Imposibilidad de Existencia de Función de Bienestar social bajo cinco condiciones.

Finalmente, añadir que Harsanyi (1955) investigó condiciones de consistencia de la función de utilidad de grupo, con los axiomas de Von Neumann, y estableció condiciones necesarias y suficientes para que una función de utilidad de grupo *u* sea de la forma:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k(x)$$

con λ_k constantes positivas, es decir, para que *u* sea un promedio ponderado de las funciones de utilidad de los individuos.

Cronología de las principales aportaciones al desarrollo de la Teoría de la Decisión

Para terminar esta evolución histórica proponemos a continuación, a modo de resumen, una tabla inspirada en otra de Sixto Ríos[25], con las contribuciones más importantes tanto de la Teoría de la Decisión unicriterio en incertidumbre, como de la Decisión multicriterio y las Decisiones colectivas. La tabla que aquí exponemos corrige y aumenta la referida.

[25] RÍOS, S. y RÍOS-INSÚA, S. (1998): *La Teoría de la Decisión de Pascal a Von Neumann*. Conferencias sobre Historia de la Matemática en el siglo XX, febrero-marzo de 1996. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, pág. 39.

Decisión multicriterio		D. unicriterio en incertidumbre		Decisiones colectivas	
1991	Roy, Bouysson y Yu				
1985	Roy y Skalka				
1985	Vincke y Brans				
1984	Brans, J. P.				
1982	Roy y Hugonnard				
1980	Saaty, T. L.				
1978	Roy, B.				
1973	Roy y Bertier				
1972	I Conferencia Internacional U. Columbia (Carolina del Sur)				
1971	Roy, B.				
1970	Fishburn, P. C.				
1968	Raïffa, H.	1968	Raïffa, H		
1961	Charnes y Cooper				
				1955	Harsanyi
1954	Debreu, G.	1954	Savage, L. J.		
1951	Kuhn-Tucker				
1951	Koopmans, T. C.			1951	Arrow, K. J.
		1944	Von Neumann		
		1939	Wald, A.		
		1937	De Finetti		
		1931	Ramsey, F. P.		
1911	Jevons				
				1907	Nanson, E. J.
1906	Haussdorf, F.				
1906	Pareto, W.			1906	Pareto, W.
1881	Edgeworth, F.Y.				
1874	Walras			1873	Dodgson, C. L.
1871	Menger, K.				
		1821	Gauss, C. F.		
				1785	Condorcet
				1781	Borda
		1774	Laplace, P. S.		
1772	Franklin, B.				
		1763	Bayes, T.		
		1738	Bernoulli, Daniel		
		1662	Pascal, B.		
		1657	Huygens, C.		

ANEXO

Si X es el conjunto de observaciones y D el conjunto de decisiones posibles, la función de decisión $\delta(x)$ será una función definida de X en D:

$$\delta(x): X \rightarrow D$$

Ahora bien, si llamamos Δ al conjunto de todas las funciones de decisión:

$$\Delta = \{\delta(x)\}$$

la consecuencia asociada a cada regla de decisión con cada estado θ es una pérdida que la representamos por:

$$L(\delta(x),\theta)$$

y se trata de hacer mínima la pérdida eligiendo de manera adecuada $\delta(x)$, una vez observado x.

Pero, para el caso en que el estado θ y el elemento x son desconocidos Wald propone la función de riesgo como un valor probable de la función de pérdida, correspondiente a la función de decisión con un estado de la naturaleza, esto es, una pérdida media. Considerando x aleatorio, sería:

$$R(\delta(x),\theta) = \int_X L(\delta(x),\theta)\, f(x/\theta)\, dx$$

siendo $f(x/\theta)$ la función de densidad condicionada de la variable x, cuyos valores son proporcionados por el experimento con el objeto de minimizar la pérdida del decisor. Esta función de riesgo nos servirá para comparar decisiones y establecer los conceptos de decisión dominada, admisible, etcétera.

La función de riesgo R es una función de θ para una función de decisión fijada $\delta(x)$. Considerando entonces θ aleatorio, perteneciente a un espacio de estados finito Φ, y suponiendo que hemos establecido unos coeficientes de ponderación w_i convexos para esos estados, que equivaldrían a una distribución de probabilidad *a priori* sobre los estados de la naturaleza, el riesgo medio que obtenemos al recorrer los valores de θ es el riesgo de Bayes, que sería:

$$\overline{R}(\delta(x)) = \sum_{i=1}^{n} w_i R(\delta(x),\theta_i)$$

siendo $\delta(x)$ una función de decisión cualquiera y $R(\delta(x),\theta_i)$ la función de riesgo correspondiente a esa regla de decisión con cada uno de los estados de la naturaleza. Por esto la regla de Bayes $\delta_0(x)$ sería la que hace mínimo el riesgo medio.

Si el espacio de estados es continuo, el riesgo de Bayes sería:

$$\overline{R}(\delta(x)) = \int_{\Phi} R(\delta(x),\theta)\, w(\theta)\, d\theta$$

siendo $w(\theta)$ la función de ponderaciones asociadas al parámetro θ continuo.

BIBLIOGRAFÍA

ARROW, K. J. y RAYNAUD, H. (1989): *Opciones sociales y toma de decisiones mediante criterios múltiples.* Alianza Editorial, Madrid.

BARBA-ROMERO, S. (1987): «Panorámica actual de la decisión multicriterio discreta». Investigaciones Económicas. Vol. 11, nº 2, págs. 279-308.

BARBA-ROMERO, S. y POMEROL, J. Ch. (1997): *Decisiones multicriterio. Fundamentos teóricos y utilización práctica.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alcalá, Alcalá de Henares.

BRANS, J. P.; MARESCHAL, B. y VINCKE, PH. (1984): «PROMETHEE: a new Family of Outranking Methods in Multicriteria Analysis». Operational Research'84, Brans, J. P. Ed., North Holland, págs. 408-421.

BRANS, J .P., VINCKE, PH. (1985): «A Preference Ranking Organization Method, the PROMETHEE Method», Management Science, vol. 31, págs. 647-656.

BRANS, J. P.; VINCKE, PH. y MARESCHAL, B. (1986): «How to Select and How to Rank Projects: The PROMETHEE Method», *European Journal of Operational Research*, vol. 24, págs. 228-238.

COCHRAN, J. L. y ZELENY, M. Eds. (1973): «Múltiple Criteria Decision Making» en Proceedings South Carolina (1972) University of South Carolina Press, Columbia (USA).

FISHBURN, P. C. (1973): *The Theory of Social Choice*. Princeton University Press, USA.

JOHNSON, N. L. y KOTZ, S. (1997): *Leading Personalities in Statistical Sciences from the Seventeenth Century to the Present.* Ed. John Wiley, New York.

NEUMANN, J. VON y MORGENSTERN, O. (1947): *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press. 2ª edic.

PEARSON, E. S. y KENDALL, M. (1970): *Studies in the History of Statistics and Probability*. Vol. I. Ed. Charles Griffin, Londres.

RÍOS, S.; RÍOS-INSÚA, M. J. y RÍOS-INSÚA, S. (1989): *Procesos de decisión multicriterio.* EUDEMA. Madrid.

RÍOS, S. y RÍOS-INSÚA, S. (1998): «La Teoría de la Decisión de Pascal a Von Neumann». Conferencias sobre Historia de la Matemática en el siglo XX (febrero-marzo 1996), Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, págs. 11-42.

ROMERO, C. (1993): *Teoría de la Decisión multicriterio: conceptos, técnicas y aplicaciones.* Alianza Universidad Textos. Madrid.

ROY, B. (1968): «Classement et choix en présence de points de vue multiples, la méthode ELECTRE», R.I.R.O., vol. 2, nº 8, págs. 57-75.

ROY, B.; BERTIER, P. (1973): «La méthode ELECTRE II. Une application au media-planning», en Operations Research'72, Dublín, 1972, Ross, M. Ed., 1973, North Holland, págs. 291-302.

ROY, B. (1978): «ELECTRE III: Un algorithme de rangement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples», Cahiers du Centre d'études de recherche operationnell, vol. 20, págs. 3-24.

ROY, B. (1985): *Méthodologie Multicritère d'Aide à la Décision*, Economica Paris.

ROY, B.; SKALKA, J. M. (1985): «ELECTRE IS, Aspects méthodologiques et guide d'utilisation». Cahier du LAMSADE, nº 30, Université de Paris-Dauphine, Paris.

ROY, B. (1990): «The Outranking Approach and the Foundations of ELECTRE Methods», en Readings in Multiple Criteria Decision Making, Bana e Costa, C.A., Ed., 1990, Springer, págs. 155-183.

SAATY, T. L. (1980): *The Analytic Hierarchy Process,* McGraw-Hill, New York.

SAATY, T. L. (1995): *Decisions Making for Leaders*: *The Analytic Hierarchy Process for Decisions in a Complex World,* RWS Publications, 3rd edition, Pittsburg, USA.

SAVAGE, L. J. (1951): «The Theory Statistical Decision». *Journal of the American Statistical Association*, vol. 46, págs. 55-67.

SAVAGE, L. J. (1954): *The Foundations of Statistics,* Dover, New York.

SKALKA, J. M., BOUYSOU, D., VALLÉE, D. (1992): «ELECTRE III et IV, aspects méthodologiques et guide d'utilisation», Cahiers du LAMSADE, nº 25, 4ª edition, Universtité de Paris-Dauphine, Paris.

STIGLER, S. M. (1986): *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900*. Ed. Belknap Harvard.

VICENTE Y OLIVA, M. A. de (1999): *Ayuda multicriterio a la decisión: problemática de los criterios en los métodos de sobreclasificación.* Dykinson, Madrid.

CAPÍTULO 9

Una fórmula casi mágica en la resolución de Pascal del Problema de los Puntos

JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
FRANCISCO JAVIER ORTEGA IRIZO
MARÍA DOLORES PÉREZ HIDALGO
Universidad de Sevilla

Introducción

Es conocido que en la correspondencia entre Pascal y Fermat, desarrollada durante el verano y el otoño de 1654, comienzan a resolverse de manera correcta los casos más sencillos del Problema de los Puntos, o sea, comienza a aplicarse adecuadamente la «regla de los repartos para juegos inacabados», y además se fijan las bases para la resolución general del problema (ABOUT, P. J. y BOY, M., 1983, DAVID, F. N., 1962, DE MORA CHARLES, M. S., 1989, HALD, A., 1990, TODHUNTER, I., 1865). Uno de los puntos de partida de Blaise Pascal (1623-1662) a la hora de abordar el problema es el de la «valoración» de cada partida ganada por un jugador. Entiende Pascal que cada una de esas partidas supone una ganancia sobre el dinero apostado por el contrario (inicialmente los dos apuestan lo mismo), y dicha ganancia es descrita por una fracción (como si el dinero apostado por ambos fuese la unidad). Uno de los casos particulares que plantea este autor se refiere al «valor de la primera partida» que, en pocas palabras, consiste en resolver el problema siguiente. Los dos jugadores inician el juego necesitando ganar ambos el mismo número de puntos, o de partidas, estando en igualdad de condiciones en lo que se refiere a ganar cada partida, ambos tiene igual probabilidad de ganar cada una de ellas. Se inicia el juego y el primer jugador gana la primera partida. En ese instante el juego es interrumpido, por lo que el primer jugador, además de retirar su parte de la apuesta, ha de recibir una cantidad de la apuesta del segundo en compensación por su ventaja sobre él. Pues bien, dicha cantidad, expresada como proporción de la apuesta del segundo, es lo que Pascal llama el «valor de la primera partida».

En la carta que Pascal dirigió a Fermat el 29 de julio de 1654 (extensa, intensa, y hermosa carta), encontramos el párrafo donde nuestro autor manifiesta la forma en que lleva a cabo su valoración:

> *Pero la proporción de la primera partida no es fácil de encontrar: es así, pues no quiero ocultar nada, y he aquí el problema al que yo le prestaba tanta atención, porque en efecto me agrada mucho:*
>
> *Dado el número de partidas que se quiera, encontrar el valor de la primera.*
>
> *Sea el número dado de partidas, por ejemplo, 8. Tomad los ocho primeros números pares y los ocho primeros números impares, a saber: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, y 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.*
>
> *Multiplicad los números pares de esta forma: el primero por el segundo, el producto por el tercero, el producto por el cuarto, el producto por el quinto, etcétera; multiplicad los números impares de la misma forma: el primero por el segundo, el producto por el tercero, etcétera.*
>
> *El último producto de pares es el denominador y el último producto de impares es el numerador de la fracción que expresa el valor de la primera partida de ocho: es decir, que si juega cada uno el número de doblones expresado por el producto de los pares, le pertenecerá sobre el dinero del otro el número expresado por el producto de los impares.*
>
> *Lo que se demuestra, pero con mucho trabajo, por las combinaciones, tal como lo habéis imaginado, y no he podido demostrarlo por esa otra vía que acabo de contaros, sino solamente por aquélla de las combinaciones,...*

Hemos de reconocer le estupefacción que nos produjo la lectura de este párrafo la primera vez. ¡Pascal ha encontrado una proporción mágica para valorar la primera partida: producto de pares dividido por producto de impares!

Nuestro objetivo aquí es describir, según nuestro punto de vista, cómo Pascal encontró esta proporción. Usamos para ello notación e interpretación actual. Antes de proceder hemos de puntualizar dos hechos:

1. El número 8 que Pascal usa en el párrafo, es el número de partidas que le falta al primer jugador el cual ha ganado la primera partida. O sea, el juego ha sido interrumpido cuando al primer jugador le faltan 8 partidas por ganar y al segundo 9. Decimos que el juego se encuentra en la situación (8,9).
2. Cuando Pascal dice que «no he podido demostrarlo por esa otra vía» se refiere a que no ha podido aplicar su «método universal» que más tarde, para

Huygens será la «esperanza», y que nuestro autor ha relatado previamente en la misma carta.

El triángulo aritmético como potente instrumento de cálculo

Aunque se publicó como obra póstuma en 1665 (Pascal falleció en 1662) el *Tratado del Triángulo Aritmético* ya estaba redactado (quizás en una versión algo distinta a la que finalmente se publicó) y además impreso, aunque no publicado, en 1654 (Kyriacopoulos, 2000, habla de una versión en latín de 1653). En este año, Pascal ya había dedicado un tiempo a su tratado y algunas de las copias impresas las había distribuido entre sus amigos. Sabemos que Fermat recibió una de esas copias en el transcurso de la correspondencia entre ambos autores. No sabemos en qué momento exacto recibió la misma (aunque fue antes de septiembre) y sí sabemos que no se han conservado cartas importantes de la serie que se intercambiaron los dos «geómetras» a lo largo del año 1654.

Para Pascal, el triángulo aritmético es un ente en sí mismo y también un instrumento de cálculo. La propia configuración de la publicación definitiva nos lo muestra así: la primera parte está dedicada a la descripción del mismo y a la demostración de diecinueve propiedades (o consecuencias, como las llamaba él), y en la segunda nos enseña a usar el triángulo aritmético para resolver diversos problemas (entre ellos, el Problema de los Puntos). Aunque Pascal no sea el creador del triángulo aritmético, siendo casi el último de una larga lista de «descubridores», su nombre estará por siempre ligado al mismo porque fue el primero en llevar a cabo un estudio sistemático de las relaciones que en él aparecen. Los méritos del trabajo de Pascal en ese aspecto son, pues, suficientes como para justificar el uso de su nombre.

Particularmente interesante es la demostración de la Consecuencia XII de este tratado, pues en ella se implica la formulación del procedimiento de demostración conocido como «inducción completa» (técnica de demostración rigurosa de algo que ya ha sido descubierto). Aunque Pascal da una explicación eminentemente satisfactoria de la inducción matemática (BURTON, D. M., 1999), el origen de la idea del «razonamiento por recurrencia» se encuentra en una época anterior, en el trabajo de Francesco Maurolico[1] (1494-1575). Ahora bien, Pascal fue el primero[2] en reco-

---

1 El primer resultado que fue probado por inducción matemática en la historia de esta ciencia fue el de que «la suma de los n primeros enteros impares es igual al n-ésimo entero al cuadrado», y fue probado por Maurolico y publicado en su *Arithmeticorum libri duo*, en 1575.

2 Pascal fue, que se sepa, la siguiente persona en usar la inducción matemática, y lo hace repetidamente en el *Triangle Arithmetique* a partir de la consecuencia 12. La prueba de inducción de Maurolico está presentada con un estilo algo incompleto, pero Pascal sigue unas líneas casi actuales. Aunque en ninguna parte del tratado se menciona el nombre de Maurolico, está claro que Pascal estaba familiarizado con aquella parte del *Arithmeticorum* en la que Maurolico usa el nuevo proceso lógico.

nocer el valor de este proceso lógico y, a través de su triángulo aritmético, entra en el campo habitual del trabajo matemático.

Nuestro objetivo en este apartado es proporcionar las definiciones básicas del triángulo y explicar la Consecuencia o Propiedad 19 que es la que nos interesa en el caso particular que nos ocupa.

El triángulo de Pascal es una matriz de números, cuya representación de las primeras filas y columnas es la que sigue:

Representamos las filas por la letra k (k = 0, 1, 2, ...) y las columnas mediante l (l = 1, 2, 3, ...), y el número situado en la celda (k,l) lo representaremos por $f(k,l)$ (utilizamos notación actual, parecida a la que usa Edwards, 1987).

Pues bien, los números del triángulo están definidos por:

$$f(k, l) = f(k, l-1) + f(k-1, l),$$

k \ l	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495
5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870

Dice Pascal: «el número de cada celda es igual a aquél de la celda que le precede en su rango perpendicular más aquél de la celda que le precede en su rango paralelo».

Pascal denominaba «rango perpendicular» a lo que nosotros entendemos como columna de una matriz, mientras que el «rango paralelo» es la fila de la misma.

Para el caso de $k = 0$ tendríamos $f(0,l) = f(0,l - 1) + f(-1,l)$ y para $l = 1$, $f(k,1) = f(k,0) + f(k - 1,1)$. Pues bien, suponemos que fuera del triángulo hay una fila y una columna de ceros, o sea, $f(-1,l) = 0$ y $f(k,0) = 0$, con lo que evitamos la posible indefinición de algunas celdas del triángulo.

Al número situado en la primera celda le llamó «número generador» y en su definición de triángulo aritmético señaló que éste es un número arbitrario, aunque en el *Traité* utilizó la unidad como tal. A lo que entendemos como diagonal principal de una matriz, Pascal la llamó «dividente». Lo que sería la segunda diagonal de la matriz va a ser la «base» del triángulo aritmético correspondiente. Así introducimos la idea de triángulo utilizada por Pascal. Si en cada cuadrado con vértice el número generador trazamos la segunda diagonal (diagonal en sentido matricial) se obtienen sucesivos triángulos numéricos cuyas bases estarán formadas por los números de esa segunda diagonal. Identificaremos esos triángulos por el número correspondiente a la fila desde la cual comienza a trazarse dicha diagonal. A dicho número, incrementado en una unidad (pues él comienza a enumerar las bases desde 1, no desde 0), Pascal le llama «exponente». Así, el triángulo de base n (de exponente $n + 1$, $n = 0, 1, 2, ...$) tendrá en la base los números:

$$\{f(r, n - r + 1),\ r = 0, 1, 2, ..., n\}$$

o sea, la base del triángulo n-ésimo está formada por $n + 1$ números. Para los primeros triángulos, las bases serían:

- Para $n = 0$, $f(0,1) = 1$.
- Para $n = 1$, $f(0,2) = 1$, $f(1,1) = 1$.
- Para $n = 2$, $f(0,3) = 1$, $f(1,2) = 2$, $f(3,1) = 1$.

Además, una celda cualquiera (k,l) pertenece a la base del triángulo $n = k + l - 1$, y este número es el que se usa como identificador del triángulo al que pertenece la celda. Así, los números de la base 8 son: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1. En total nueve números. Nos fijamos también en los primeros números de la dividente: 1, 2, 6, 20, 70,... dado el interés que tienen esos números para la solución de nuestro problema.

De lo expuesto anteriormente vemos que Pascal define los números del triángulo de forma recurrente o, dicho de otra forma, mediante una ecuación en diferencias parciales. Dio los números del triángulo hasta $k = 8$ y $l = 9$. Para sus demostraciones etiquetó las celdas con diferentes letras latinas y griegas, lo cual puede producir la sensación de incomodidad en las argumentaciones, aunque si se leen con detenimiento dicha sensación desaparece.

De todas las consecuencias del triángulo nos interesa la última, que pasamos a describir.

Consecuencia última (*decimonovena*). Dadas dos celdas consecutivas de la diagonal principal (de la dividente), por ejemplo, $f(k,k+1)$ y $f(k-1,k)$, esta consecuencia establece la relación existente entre ambas:

$$f(k,k+1) = 4 \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot f(k-1,k)$$

O, como Pascal escribe:

En todo Triángulo Aritmético dos celdas contiguas que están en la dividente, la inferior es a la superior tomada cuatro veces, como el exponente de la base de esta superior es a un número una unidad mayor (a dicho exponente).

Pascal usa sus Consecuencias 11 y 14, que ya había presentado y demostrado en el tratado, para comprobar esa igualdad.

Pues bien, podemos escribir la Consecuencia 19 de la forma:

$$f(k,k+1) = 2^2 \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot f(k-1,k)$$

y, efectuando sustituciones sucesivas, desplazándonos a lo largo de la dividente hacia arriba, como se indica en el gráfico, tenemos:

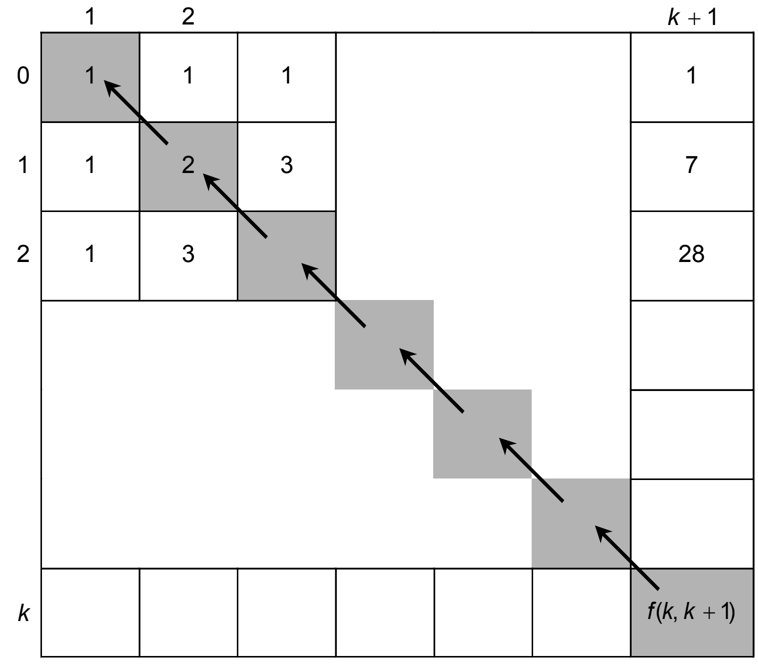
$$f(k,k+1) = \left[2^2 \cdot \frac{2k-1}{2k}\right] \cdot \left[2^2 \cdot \frac{2(k-1)-1}{2k}\right] \cdot \left[2^2 \cdot \frac{2(k-2)-1}{2k}\right] \cdots$$
$$\cdots \left[2^2 \cdot \frac{2[k-(k-1)]-1}{2[k-(k-1)]}\right] \cdot f(0,1).$$

Teniendo en cuenta que $f(0,1) = 1$ y simplificando, nos queda:

$$f(k,k+1) = 2^{2k} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} .$$

Vemos que en el numerador de la fracción del segundo miembro aparece el producto de los k primeros números impares, mientras que en el denominador está el producto de los k primeros números pares.

Curiosamente, esta fórmula no está recogida en el *Traité* de Pascal, pero es claro que él la conocía, según se desprende del párrafo de la carta que hemos introducido.



Solución al Problema de los Puntos mediante el Triángulo Aritmético

La segunda parte del *Traité du Triangle Arithmetique* lleva por título *Divers usages du Triangle arithmetique* y está dividida en tres secciones. La tercera sección es la que Pascal dedica a resolver el Problema de los Puntos. La sección está dividida a su vez en dos subapartados: el primero, donde Pascal introduce el Método del Valor Esperado para resolver dicho problema (BASULTO, J. y otros, 2002) y el segundo, donde nuestro autor resuelve el mismo usando el triángulo aritmético. Aunque se había desarrollado previamente el método de las combinaciones, tanto por Fermat como por Pascal, para la resolución del Problema de los Puntos, y éste fue el método analizado en la primera parte de la correspondencia del verano de 1654, Pascal en la carta ya citada de 29 de julio presentó un método alternativo, que es el que aparece después desarrollado en el *Traité*. Lo que movió a Pascal a buscar una solución alternativa a la de las combinaciones fue quizás el tedio de la enumeración de todas las posibilidades. Desde luego, debía tener desarrollado «su método» antes del 29 de julio de 1654, fecha en la que escribe esta carta como respuesta a una anterior de Fermat desaparecida.

Usando términos actuales, su solución implica el análisis de un árbol de posibles resultados hacia atrás hasta el inicio, utilizando de forma recurrente la idea de que, si un jugador en una determinada partida puede ganar X o Y unidades monetarias con igual probabilidad, entonces su «ganancia esperada» es $\frac{1}{2}(X+Y)$. Esa cantidad sería la que recibiría el jugador si la partida no se jugase. De esta forma, se efectúa el reparto de la apuesta si el juego es interrumpido. Así se valora un juego a través de su esperanza.

En el desarrollo de su *Tratado* no da una solución general al Problema de los Puntos con su Método de la Esperanza. Resuelve una generalización parcial, la de $a = 1$ y b cualquiera, o sea, cuando al primer jugador le falta una partida y al segundo varias. Señalemos que, en este caso, para que el jugador B gane el juego, necesita ganar las siguientes b partidas, lo cual ocurrirá con una probabilidad $\frac{1}{2^b}$, siendo ésta, por tanto, la proporción de la apuesta total que recibiría este jugador, en compensación por la interrupción del juego en la situación $(1,b)$.

Pascal finaliza esta parte con la siguiente conclusión:

Por este método se harán los repartos en toda clase de situaciones, tomando siempre lo que le pertenece en caso de ganar y lo que le pertenece en caso de perder, y asignando para el caso del reparto la mitad de estas dos sumas.

He aquí una de las maneras de hacer el reparto.

Hay otras dos, una por medio del Triángulo Aritmético, y la otra por las combinaciones.

El segundo subapartado es el que está dedicado a resolver el problema usando el triángulo aritmético como instrumento de cálculo. El título del mismo no deja dudas: *Método para hacer el reparto entre dos jugadores que juegan a varias partidas por medio del Triángulo Aritmético*. El lema que abre este apartado dice:

LEMA

Si dos jugadores juegan a un juego de puro azar, con la condición de que, si el primero gana, a él le pertenecerá una porción cualquiera de la suma que ellos juegan, expresada por una fracción, y que, si pierde, le pertenecerá una menor porción de la misma suma, expresada por otra fracción: si ellos quieren separarse sin jugar, la condición de reparto se encontrará de esta forma. Sean reducidas las dos fracciones al mismo denominador, si ellas no están; tómese una fracción donde el numerador sea la suma de los dos numeradores, y el denominador doble de los precedentes: esta fracción expresa la porción que pertenece al primero sobre la suma que está en juego.

Este lema resume el Método del Valor Esperado que ha introducido Pascal en el apartado anterior. Ahora bien, Pascal modifica el valor esperado de un juego (a,b) donde al primer jugador le faltan a partidas y al segundo b partidas, por la proporción $\frac{E[(a,b)]}{2K}$, es decir, divide el valor de lo que espera ganar el primer jugador por el total de lo que han apostado entre ambos jugadores. En lenguaje actual, esta proporción es la probabilidad de que el primer jugador gane el juego, es decir, consiga los a puntos que le faltan antes de que el otro jugador logre los b que le faltan a él. Si $P[(a,b)]$ es la probabilidad de que gane el primer jugador, y si $P[(a-1,b)]$ y $P[(a,b-1)]$ son las probabilidades que tiene el primer jugador de ganar en los juegos $(a-1,b)$ y $(a,b-1)$, respectivamente, entonces debe verificarse la siguiente relación:

$$P[(a,b)] = 0,5 \cdot P[(a-1,b)] + 0,5 \cdot P[(a,b-1)] = \frac{P[(a-1,b)] + P[(a,b-1)]}{2}.$$

A partir de aquí, Pascal decide aplicar el Triángulo Aritmético para obtener la expresión de $P[(a,b)]$. El primer problema, que él lo presenta también como proposición, es el siguiente:

PROBLEMA I – PROPOSICIÓN I

Dados dos jugadores, a cada uno de los cuales le falta cierto número de partidas para terminar, encontrar por el triángulo aritmético el reparto que habría que hacer (si quieren separarse sin jugar), teniendo en consideración las partidas que le faltan a cada uno de ellos.

Pascal da su solución a este problema por medio de ejemplos. A partir de los mismos se obtiene una regla general, que es la que vamos a proporcionar nosotros.

Si el juego es (a,b) con $a > 0$ y $b > 0$, es decir, al primer jugador le faltan a partidas y al otro b partidas, la solución que propone Pascal es:

1. Tomar la base $n = a + b - 1$ del triángulo aritmético de Pascal.
2. Sumar los valores de las b primeras celdas situadas en la base $n = a + b - 1$. Es decir, calcular:
   a. $B(n,b-1) = \sum_{r=0}^{b-1} f(r, n-r+1),$
   b. siendo $f(\cdot,\cdot)$ el valor de la correspondiente celda del triángulo aritmético.
3. La probabilidad de que gane el primer jugador es
   a. $P[(a,b)] = \frac{B(n,b-1)}{2^n},$
   b. donde el denominador 2^n es el valor de la suma de todas las celdas situadas en la base $n = a + b - 1$ (Consecuencia octava del Triángulo).

Para demostrar la igualdad anterior, donde se calcula la probabilidad de ganar el primer jugador en cada situación, Pascal utiliza el Método de Inducción Completa ya que el número de posibilidades es infinito. Para ello considera los dos siguientes lemas.

Lema primero.- Hemos de probar que la igualdad es cierta para $n = 1$ (Pascal comienza en $n = 2$ por enumerar sus filas desde la unidad).

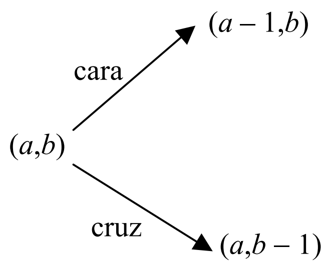
Lema segundo.- Suponiendo que la igualdad es cierta para todos los juegos (a',b') con $a'+b'-1=n-1$, hemos de probar que es cierta para todos los juegos (a,b) con $a + b - 1 = n$.

La prueba del primer lema es inmediata, puesto que los juegos (a,b) con $n = a + b - 1 = 1$, se reducen al único juego (1,1) en el que sabemos que la probabilidad asociada al mismo es 0,5. Aplicando la igualdad que queremos demostrar a este juego tenemos la siguiente probabilidad:

$$P[(1,1)] = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$

que coincide con el valor del juego (1,1) calculado con el Método de la Esperanza Matemática.

Para la demostración del segundo lema, Pascal utiliza la esperanza matemática introducida en el apartado anterior, procediendo como sigue. Parte de un juego (a,b) con $n = a + b - 1$, observando que si el primer jugador ganase la partida que va a continuación, entonces pasaría al juego $(a - 1,b)$, mientras que si la perdiese pasaría a la situación $(a,b - 1)$. Esta doble posibilidad la presentamos mediante la siguiente lotería:



Entonces, según el lema inicial de este apartado

$$P[(a,b)] = \frac{P[(a-1,b)] + P[(a,b-1)]}{2},$$

donde es claro que los juegos $(a - 1,b)$ y $(a,b - 1)$ están en la base $n - 1$, por lo que las probabilidades de ganar el primer jugador en estos juegos se conocen por hipótesis. Entonces la probabilidad de que el primer jugador gane el juego (a,b) es:

$$P[(a,b)] = \left(\frac{B(n-1,b-1)}{2^{n-1}} + \frac{B(n-1,b-2)}{2^{n-1}} \right) \Big/ 2 = \frac{B(n-1,b-1) + B(n-1,b-2)}{2^n}.$$

La Consecuencia décima del *Traité* demuestra que $B(n-1,b-1) + B(n-1,$ $b-2) = B(n,b-1)$. Por tanto, la probabilidad buscada es $= P[(a,b)] = \dfrac{B(n,b-1)}{2^n}$, o sea, lo que se quería demostrar.

A partir de aquí Pascal simplifica la fórmula considerando juegos del tipo (a,b) con $b > a$, es decir, juegos donde al primer jugador le faltan menos partidas que al segundo. Esto no limita su solución, pues el caso $a > b$ se obtiene cambiando los nombres de los jugadores, y para el caso (c,c) la solución es siempre 0,5 como probabilidad de ganar el primer jugador.

Si $b > a$, está claro que si lo apostado es $2K$ (pues cada uno apuesta K) entonces lo que espera ganar el primer jugador será de la forma $E[(a,b)] = K + \beta \cdot K$, es decir, lo apostado por él, K, más una parte de lo apostado por el otro jugador βK, siendo β la proporción de lo apostado por el segundo jugador que se llevaría el primero. Aquí Pascal presupone que si $b > a$, entonces $P[(a,b)] > 0{,}5$ para que dicho valor esperado sea superior a K. De todas formas, a partir del Triángulo se puede demostrar que ese resultado es cierto.

Dado que $E[(a,b)] = 2K \cdot P[(a,b)] = K + \beta \cdot K$ y como $K > 0$, simplificando obtenemos $2P[(a,b)] = 1 + \beta$. Por tanto, $\beta = 2P[(a,b)] - 1$, igualdad que escribimos en la forma:

$$\beta[(a,b)] = 2P[(a,b)] - 1, \text{ con } b > a.$$

Entonces $\beta[(a,b)]$ nos mide, para cualquier juego (a,b) con $b > a$, la proporción que se lleva el primer jugador de lo apostado por el segundo.

Por último, Pascal ordena todos los juegos del tipo $(0,b)$, $(1,b)$, $(2,b)$, ... $(b-2,b)$ y $(b-1,b)$ para considerar la siguiente función diferencia:

$$W[(r,b)] = \beta[(b-r,b)] - \beta[(b-r+1,b)],$$

para $r = 1, 2, ..., b-1,b$ y donde $\beta[(0,b)] = 1$, ya que si al primer jugador no le falta ninguna partida, entonces debe llevarse todo lo apostado, y, en particular, todo lo apostado por el segundo jugador.

Esta función, W, valora lo que le aporta cada una de las partidas ganadas por el primero, en forma de proporción sobre lo apostado por el segundo jugador. Por ejemplo, $W[(2,b)]$ es la diferencia entre la proporción que el primer jugador se lleva del otro al haber alcanzado el juego $(b-2,b)$, y esta misma cuando llegó al juego $(b-1,b)$. En este caso, usando el lenguaje de Pascal, se dice que mide el valor de la segunda partida. Igualmente, $W[(1,b)]$ es el valor de la primera partida, es decir, compara el juego $(b-1,b)$ con el juego (b,b). Por último, $W(b,b)$ valora lo aportado por la última partida, es decir, la proporción que obtendría el primer jugador de la apuesta del segundo por pasar del juego $(1,b)$ al juego $(0,b)$.

Hemos deducido el siguiente lema que resume la expresión dada arriba para $W[(r,b)]$.

LEMA.

Se verifica: $W[(r,b)] = \dfrac{f(b-r,b)}{2^{2b-r-1}}$, para $r = 1, 2, ..., b-1, b$.

En efecto:

podemos escribir

$$W[(r,b)] = \beta[(b-r,b)] - \beta[(b-r+1,b)] = \\ = 2(P[(b-r,b)] - P[(b-r+1,b)]).$$

Teniendo en cuenta que $P[(a,b)] = \dfrac{B(n,b-1)}{2^n}$, y sustituyendo:

$$W[(r,b)] = 2\left(\frac{B(b-r-b-1,b-1)}{2^{2b-r-1}} - \frac{B(b-r+b,b-1)}{2^{2b-r}}\right) = \\ = 2\left(\frac{2B(2b-r-1,b-1) - B(2b-r,b-1)}{2^{2b-r}}\right) = \\ = \frac{2B(2b-r-1,b-1) - B(2b-r,b-1)}{2^{2b-r-1}}.$$

Ahora bien, la Consecuencia décima del Triángulo demuestra que $B(2b-r,b-1) = B(2b-r-1,b-1) + B(2b-r-1,b-2)$, con lo que el numerador anterior se transforma en $B(2b-r-1,b-1) - B(2b-r-1,b-2)$, y esta diferencia coincide con $f(b-r,b)$ dada la simetría de la Función f.

A continuación, Pascal resuelve una serie de casos particulares (valoraciones de diferentes partidas) de los que nos interesa el que presenta como Problema III:

Dados dos jugadores que juegan cada uno una misma suma en cierto número dado de partidas, encontrar en el Triángulo Aritmético el valor de la primera partida sobre la apuesta del perdedor.

Según el lema, el valor de la primera partida es

$$W[(1,b)] = \frac{f(b-1,b)}{2^{2b-2}},$$

que es la fracción entre el valor de la celda del Triángulo $(b-1,b)$ y la suma de todas las celdas de la base $n = 2b-2$. Como numerador toma el valor de la celda que está en el centro de una base de orden par, y que, por tanto, tiene un número impar de celdas, y como denominador, la suma de los valores de todas las celdas de dicha base. Pascal obtiene el resultado en esta parte del tratado usando el ejemplo (3,4), un juego donde al primer jugador le faltan tres partidas y al otro cuatro (aunque en la carta del 29 de julio usa la situación (8,9)). El valor que él encuentra es $\frac{20}{64}$, valor que se obtiene tomando $r = 1$ y $b = 4$ en nuestro lema, pues $\frac{f(3,4)}{64} = \frac{20}{64}\cdot$ A continuación, Pascal resuelve el ejemplo (1,2) como un corolario de su Problema III. Con nuestra notación, este ejemplo se resuelve tomando $r = 1$ y $b = 2$, obteniéndose $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}\cdot$

Recordemos que se había obtenido, como un resultado de la Consecuencia última del Tratado, el valor de $f(b-1,b)$, dado por

$$f(b-1,b) = 2^{2(b-1)}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot[2(b-1)-1]}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot[2(b-1)]},$$

donde el numerador de la fracción es el producto de los $b - 1$ primeros números impares (siendo $b - 1$ el número de partidas que le falta ganar al primer jugador, el cual ya ha ganado una partida, mientras que el segundo no ha ganado ninguna) y el denominador es el producto de los $b - 1$ primeros números pares. A partir de esta última expresión obtenemos

$$W[(1,b)] = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot[2(b-1)-1]}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot[2(b-1)]},$$

que nos proporciona la casi «mágica» proporción entre producto de impares y producto de pares para valorar la primera partida.

BIBLIOGRAFÍA

ABOUT, P. J. y BOY, M. (1983): *La correspondance de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat. La géométrie du hasard ou le debut du calcul des probabilités*, Les cahiers de Fontenay, 32.

BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J. A. y DOMÍNGUEZ QUINTERO, A. M. (2002): *El método universal de Pascal como un equivalente cierto: el Problema de los Puntos*. Historia de la probabilidad y de la estadística, Editorial AC, Madrid, págs. 19-34.

BURTON, D. M. (1999): *The History of Mathematics: An Introduction*. Fourth Edition. McGraw-Hill, New York.

DAVID, F. N. (1962): *Games, Gods and Gambling*. Charles Griffin & Co. Ltd., London.

DE MORA CHARLES, M. S. (1989): *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.

EDWARDS, A. W. F. (1987): *Pascal's Arithmetical Triangle*. Griffin, London.

HALD, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*. John Wiley & Sons. New York.

KYRIACOPOULOS, L. (2000): *Peut-on tout de même parler d'un* «*triangle de Pascal*»? Revue d'histoire des mathématiques, 6, págs. 167-217.

PASCAL, B. (1963): *Oeuvres Complètes*. Edición de Lafuma, París.

TODHUNTER, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

CAPÍTULO 10
Histoire du risque

PIERRE-CHARLES PRADIER
Matisse, Université Paris-I

Comme l'écrivait le sociologue allemand Niklas Luhmann, «il n'existe pas d'étude compréhensive de l'étymologie et de l'histoire conceptuelle du terme (risque)» ((LUHMANN 1990) p. 9). A vrai dire, de tels travaux sont rares: pour être exhaustif, il faut considérer un corpus réduit (comme Piguet (1996a), (1996b)), à moins de s'adonner à une histoire culturelle plus orientée vers le grand public (REY (1989)). En matière de risque, l'immensité du corpus à mettre en jeu interdit la première approche. En revanche, la seconde semble déjà bien balisée: si l'on cherche dans des ouvrages savants une histoire du concept de risque, on trouvera en particulier deux éléments récurrents: une *thèse moderniste* et un *roman nautique* pour expliquer l'origine du mot. Pour séduisantes que soient ces histoires, ce ne sont que des fables, à moins que leur ressassement ne leur confère le statut de mythe (1.. Pour parvenir à une thèse plus solide, il faut mobiliser d'autres sources, plus systématiques. On peut alors proposer une histoire du mot qui sépare nettement son histoire italienne (2) de sa diffusion dans la reste de l'Europe (3).

Fables et mythes du risque

La thèse moderniste: une légende bourgeoise

Luhmann hérite de la tradition historique allemande de Marx, Sombart, Weber et tant d'autres. D'après lui, le concept de risque apparaît au début de l'époque moderne «pour indiquer une situation problématique qui ne peut être décrite avec une précision suffisante par le vocabulaire existant» ((LUHMANN 1990), p. 10). Cette période correspond donc à celle des grandes découvertes, de la réforme religieuse et de l'apparition du capitalisme. (WEBER 1908) défend l'idée d'une relation causale entre la réforme religieuse et le développement de l'*esprit du capitalisme*; cette théorie a suscité une abondante controverse (voir (BESNARD 1970)). La thèse moderniste constitue une illustration de cette séduisante construction intellectuelle: le développement du commerce, de l'assurance, des techniques financières modernes, coïnciderait avec la maturation de l'*esprit du capitalisme* à la suite de la réforme religieuse. La diffusion du mot risque serait une conséquence du développement du capitalisme.

Un autre aspect de cette doctrine consiste à lier le développement du capitalisme avec celui de la bourgeoisie: une classe sociale serait ainsi porteuse de pratiques nouvelles qui auraient bouleversé l'organisation sociale et politique. Marx s'est intéressé à la constitution de la bourgeoisie comme classe au sein du Tiers-État urbain à l'époque moderne, et ce serait une erreur de croire qu'il aurait été seul dans cette voie. Ainsi Robert Pirenne, un des grands médiévistes du premier XXe siècle, considère-t-il que la classe des marchands se constitue d'«aventuriers sans attache avec la terre» ou de la «masse de va-nu-pieds à travers le monde». (FOURQUET 1989) parle ainsi de *légende bourgeoise* pour qualifier le «scénario historique selon lequel le capitalisme marchand est un "corps étranger" à la société féodale (…); il aurait surgi de lui-même au sein de cette société». Même si la thèse moderniste est incompatible avec les travaux des philologues, ces derniers ont récupéré à leur compte la légende bourgeoise dans un roman nautique.

Le roman nautique d'une étymologie obscure

Les dictionnaires étymologiques présentent une grande variété d'hypothèses pour expliquer l'origine du mot *risque* ((PRADIER 1998), chapitre I). La plus en vogue à ce jour avait été proposée par (DIEZ 1853), elle est par exemple exposée par (REY 1992):

> «Certains rapprochent ce mot du latin *resecare* "enlever en coupant" (→ réséquer), par l'intermédiaire d'un latin populaire *resecum* "ce qui coupe" et, de là, "écueil", puis "risque que court une marchandise en mer".»

Cette évolution morphologique n'est que plausible en latin, même si on a observé le passage du verbe *couper* au substantif *écueil*, est repérée en suédois ; ou si la proximité sémantique de l'écueil et du danger est documentée en castillan. Cette histoire, même si elle n'est qu'une hypothèse, évoque le *duecento*, les marchands italiens, les débuts de l'assurance et les prohibitions ecclésiastiques: elle semble parfaitement en phase avec l'historiographie, de Renouard à Le Goff et à Braudel.

Mais pour ne contredire aucun fait, ce «roman nautique» ne constitue qu'une conjecture plausible, comme tant de théories possibles. La différence entre la science économique et l'histoire tient principalement aux critères respectifs d'acceptation des énoncés dans ces deux disciplines: pour la première, les théories doivent d'abord être convaincantes, pour la seconde il faut des preuves. Et, comme l'explique (GUIRAUD, 1982) p. 468: «il n'y a pas le moindre commencement de preuve à ce roman nautique». C'est-à-dire que personne n'a vraiment observé cette évolution des mots, du verbe *resecare* au déverbal *resecum*. Tout juste le de Goro d'Arezzo mentionne-t-il ce verbe «resicco, cas, per reseccare»; mais 1355 constitue une date beaucoup trop tardive pour notre objet, 150 ans après la première occurrence du mot *risque*.

Outre ce «roman nautique» compromis, il existe une foule d'étymologies possibles. Deux filiations peuvent retenir notre attention. La première est avancée par Guiraud, qui observe que *risque* prend la succession de *rixe*; mais ce glissement ne s'opère qu'en castillan et en langue d'Oc, et pas avant la fin du Moyen-Âge. Une seconde piste, ouverte par les grands philologues allemands Schmitt et Wartburg, nous conduit à Byzance, où l'on parlait de ριζιχον. Mais, si l'on excepte un hapax en 1156 (χαχοριζιχος) dont la traduction est par nature douteuse, ce mot n'apparaît qu'au XIII^{e} siècle; encore est-ce un italianisme notoire. On pourrait encore chercher ailleurs[1], aucune piste ne résiste à l'analyse. Le seul fait certain est que l'usage du mot risque est de loin antérieur à la fin du Moyen-Âge, ce qui contredit la *thèse moderniste*. En revanche, on ne peut parvenir à aucune certitude en matière d'étymologie. On s'intéressera donc à la *diffusion* du mot *risque*.

Autres sources, autre thèse

La nouveauté fondamentale de notre approche est de pouvoir compter sur un dénombrement quasi-exhaustif des occurrences du mot *risque* dans les langues

1 On peut en particulier citer l'étymologie proposée par Corominas-Pascual (1980), qui font dériver le *risque* (*riesgo* en castillan) du *rocher déchiqueté* homonyme. Malheureusement, leur «démonstration» se borne à une pétition de principe («L'apparition (du mot risque) chez des auteurs si nombreux et châtiés au siècle le plus pur de la langue, le seizième, fait déjà douter qu'il puisse s'agir d'un emprunt, par exemple à l'italien» p. 13). Ceci semble d'autant plus léger que *riesgo* n'est attesté dans le sens de *risque* qu'à partir de 1570, soit près de quatre siècles après la première trace dans la péninsule italique! et plus de 250 ans après l'emploi de *riesco* avec la signification considérée (p. 13)! Corominas et Pascual en sont donc réduits à supposer qu'il y a toujours eu «des pêcheurs et des marins de petit cabotage qui conservèrent cette création du latin vulgaire», malgré le caractère «nullement commerçant ni marin» des Castillans (p. 16)… Mais la Castille n'est manifestement pas le centre de la diffusion du vocable. Cet exemple, parmi d'autres, indique combien les philologues divaguent quant au risque, en l'absence de piste étymologique solide pour remonter au-delà du Moyen-Âge italien.

vernaculaires à l'aide des bases de données textuelles française (ARTFL/CNRS) et italienne (OVI/CNR). On peut donc obtenir une idée précise de la fréquence d'emploi du mot ; puis procéder par sondage pour identifier le contexte et donc saisir tout à la fois la signification, la désignation et les connotations d'un mot. Ces bases ne recensent pas les occurrences latines (signalons toutefois qu'elles sont rares), c'est évidemment un handicap que compensent partiellement (Du Cange 1678) et les dictionnaires étymologiques des langues européennes (voir la deuxième partie de la bibliographie). Au moins nos sources nous permettent-elles de décrire la diffusion du vocable et de saisir son sens primitif en italien avant de nous intéresser au reste de l'Europe (3).

L'Italie comme centre de diffusion

Il n'est pas possible, dans l'état actuel de nos connaissances de remonter avant 1193. Cette date marque la première occurrence du *risque* (dans un sens incontestable), dans la *Carta Picena* où il est question alors d'un *resicu* partagé pour moitié entre Iohannis et Plandideo. De là, on peut représenter la dissémination du mot en Europe. Un dépouillement assez ample des dictionnaires étymologiques ou historiques, de la base de données textuelle de l'*Opera del Vocabolario Italiano* et des ouvrages consacrés au sujet (comme par exemple (Boiteux 1968)) permet d'établir une carte de cette diffusion (document 1) dans les langues vernaculaires. Il apparaît alors évidemment que la Péninsule italienne constitue le centre du phénomène (voir la carte en annexe). En réponse aux certitudes exposées précédemment, deux questions se posent: est-il possible de préciser quelle région d'Italie paraît abriter la source du mot? Peut-on lier l'usage de ce vocable à une pratique ou à une classe sociale?

En ce qui concerne la première question, il faudrait se garder de conclure hâtivement d'après l'origine géographique de la *Carta Picena*: la région du *Picenum*, autour d'Ascoli-Piceno, est située dans les Marches. Peut-être *risque* apparaît-il par accident sur le littoral Adriatique au sud d'Ancône; car après tout il s'agit de la première occurrence *attestée*, et rien n'interdit de penser que les vénitiens parlaient de risque un siècle auparavant. D'autant que ces derniers, culturellement portés à l'apodisie —c'est-à-dire à la rédaction de contrats sous seing privé sans l'intervention d'un notaire— ont laissé peu de traces écrites de leur activité mercantile. On pourrait également évoquer Amalfi, dont la brillante activité économique est attestée depuis le X^{e} siècle; cependant les raids normands puis pisans, enfin le raz-de-marée de 1343, n'ont laissé aucune archive. Le problème de l'absence d'archives se retrouve malheureusement à Pise, en dépit de son développement précoce: seule Gênes offre des séries notariales depuis 1154 ((Melis 1975) p. 5), ce qui a conduit évidemment les historiens à s'intéresser en priorité à cette cité. Il est cependant possible de s'affranchir de ce biais de répartition des sources.

En effet, la carte proposée permet de suivre les itinéraires de la diffusion du mot —et donc d'en retrouver certainement le foyer, mais avec une précision assez faible. Ainsi Marseille, alors dans l'orbite économique et politique de Gênes, est-elle la première ville hors d'Italie à écrire *reizego*, puis vient le tour de la Catalogne, de la Provence, et à partir du XV^{e} siècle, de la Croatie. C'est seulement après cette époque que les Germains puis les Castillans et Français d'Oïl vont apprendre à dire *risque* à l'italienne, c'est-à-dire dans un sens qui reste à définir, mais autrement que comme un succédané de *rixe*. Il est donc manifeste que le mot s'est propagé au long des courants commerciaux, et plus précisément dans la Tyrrhénienne, soit au long des routes génoises et pisanes, avant de gagner l'Adriatique dominée par Venise.

On a donc identifié l'origine géographique du mot risque, tout au moins le centre le plus actif de sa diffusion sur le littoral tyrrhénien, dans les grands ports commerciaux que furent Gênes et Pise. Comme l'essaimage s'est fait au long des routes commerciales, on fait d'un pierre deux coups en répondant aussi à la seconde question: il pourrait sembler que le mot soit un mot des marchands. On en viendrait donc apparemment à confirmer le «roman nautique» présenté en début de chapitre. Mais ce serait oublier deux réserves très importantes: d'une part, si nous acceptons le roman c'est que faute de sources concluantes sur l'origine, on n'a saisi que le moment de la propagation du mot; d'autre part les sources tardives dont nous disposons nous permettent tout de même de nuancer la signification du *risque*, et de marquer ainsi un écart avec ce «roman nautique».

Usages dans l'Italie du *duecento*

Si l'on ne dispose quasiment d'aucune source au XIIe siècle (hormis la *Carta Picena*), le *duecento* nous offre une palette plus large de textes où le risque est mis en situation. Ce fonds groupe finalement assez peu de sources liées à l'activité économique, mais plutôt des textes politiques, juridiques et réglementaires, des œuvres littéraires. Tout ceci semble témoigner déjà d'une percolation du risque dans tous les domaines de la vie civile. Est-ce à dire alors que les sources écrites subsistantes sont trop tardives dans l'histoire du mot pour qu'on puisse en saisir les connotations originelles? Un peu d'attention au contexte précis où se manifeste le *risque* permet de deviner cette origine. La dimension judiciaire ou politique met en cause l'intégrité *physique* des individus menacée par la guerre[2] ou par une justice

[2] Ainsi, par exemple dans les Fiore di rettorica de Bono Giamboni (treizième siècle, OVI cote ATA): «Dunque, se per viva ragione e grandissimi essempli t'ò mostrato che per lo suo paese si dee l'uomo mettere ad ogni rischio, savi debbono essere tenuti coloro che, per far salva la città loro, non ischifano fatica né pericol veruno»; ou «Io la libertà che non avavate vi diedi: voi quella ch'avete non volete servare. Io, mettendomi ad ogni rischio, liberai il paese delle mani de' nimici: e voi liberi e sanza pericolo non curate di stare?».

mutilatrice dans ses châtiments[3]; la littérature, essentiellement d'inspiration courtoise, emploie également le mot *risque* pour indiquer la mise en danger volontaire du héros, amant éperdu ((MATTAINI, 2000)) ou chevalier combattant ((VÉRIN, 1982)). Tout ceci nous éloigne apparemment du «roman nautique», et pour cause. Le caractère *militaire* dominant de l'usage du mot *risque* doit se comprendre dans le cadre italien, à travers trois aspects du lien entre activité militaire et commerciale.

Le premier aspect tient à la perméabilité entre les classes sociales, aussi bien qu'à la complexité de leur définition. Bien des marchands italiens du XIe siècle sont d'abord des combattants, qui accompagnent leur marchandise et la défendent contre les pirates barbaresques ((WALEY, 1969) p. 16)… quand ils ne sont pas eux-mêmes des pillards, attirés par le prestige des reliques ((RENOUARD, 1968b) p. 33), le butin que promet la destruction d'un nid de pirates, ou la flibusterie la plus éhontée. Ainsi (RENOUARD, 1969) prend en exemple les pisans dont la fortune passe par la mise à sac d'Amalfi en 1135 puis 1137, après une série de raids contre les Sarrasins au début du siècle (pp. 167-9). Les chefs de ces expéditions aussi glorieuses que profitables sont qualifiés d'«entrepreneurs (*imprenditori*) maritimes», mais gare à l'anachronisme! Ces *entrepreneurs* sont du même métal que ceux que décrit (VÉRIN, 1982), qui se trouvent être chevaliers au royaume de France, et n'avoir cure des affaires de marchands Que signifie donc *entrepreneur*? Chez ces aristocrates en devenir, sur terre comme sur mer, «l'épreuve de la valeur individuelle dans la seule action» ((VÉRIN, 1982) p. 42) constitue l'entre*prise* (l'*impresa* italienne rappelle l'*emprise* de l'ancien français), qui s'exprime comme la capacité à *saisir* l'occasion, la *fortune*, l'*aventure*. Ces mots sont récurrents, tant dans le lexique du roman courtois que des marchands florentins (BEC, 1967). Il n'y aurait donc pas toujours une séparation nette entre marchands et guerriers dans l'Italie du XIe siècle, d'autant que les historiens insistent sur la pluri-activité des puissants ((RENOUARD, 1968b) p. 65).

Un autre aspect de la proximité entre les armes et la fortune tient à la figure du *condottiere*. On considère d'ordinaire que celui-ci n'apparaît vraiment qu'au XIVe siècle, à une époque trop tardive pour notre récit. Mais avant que l'Italie n'ait été parcourue de *compagnies d'aventure* emmenées par de véritables entrepreneurs de guerre, avant que les noms de Fra Moriale, Niccolò da Tolentino ou Giovanni Acuto ne s'illustrent dans l'histoire militaire, les villes eurent recours à des combattants mercenaires. Ainsi (WALEY, 1969, pp. 44-47) évoque-t-il la décision des consuls génois, en 1173, de «créer des chevaliers» pour éviter de payer les services de féodaux voisins. On est donc loin du cliché qui voudrait que les aristocrates ne se soucient que de leur honneur, quitte à se ruiner ou à perdre la vie. Si la noblesse française a hérité de la cavalerie franque un souverain mépris pour les affaires d'ar-

[3] Ainsi, par exemple dans les harangues de Matteo dei Libri (treizième siècle, OVI cote ZF): «E se legalmente in so officio non se porta, sotraçe al honore del so signori, vituperiase e pote commetere quello ke la soa persona sta a gran risego et a grave condicione».

gent, obsédée du seul prestige symbolique que confèrent la victoire militaire et les dignités politiques, la noblesse italienne est plus récente dans sa constitution, plus douteuse dans son origine… mais aussi plus pragmatique dans son approche des questions financières. Les chevaliers italiens sont donc *aussi* des marchands qui vivent du louage de leurs armes.

A partir du XIII^{e} siècle cependant, les classes sociales *semblent* se distinguer plus clairement. D'un côté, comme à Gênes on ne crée plus massivement de chevaliers après 1211, la caste aristocratique devient dans l'ensemble moins perméable. De l'autre, la carrière marchande s'est institutionnalisée: au XIV^{e} siècle, l'école «commerciale» (où l'on enseigne le calcul arithmétique à l'aide de l'abaque) s'est imposé comme une sorte de «second cycle» pour les enfants des marchands. Une fois leur éducation terminée, ceux-ci voyagent dans l'adolescence puis se sédentarisent ((MELIS, 1975) p. XIX). Pour preuve, toujours au XIV^{e} siècle, l'invention par les génois de l'assurance dite *à simple cédule*, matrice des contrats actuels, signifie que les marchands n'accompagnent plus systématiquement leur marchandise. La croissance économique rapide des XI^{e}-XIII^{e} siècles entraîne l'ascension des nouveaux riches qui suscite une certaine jalousie, l'évolution des mœurs et de la place des arts entraîne et révèle des tensions. Comme le fait observer (WALEY, 1969, p. 54): «L'idée que les nouvelles couches de la population étaient décadentes et indignes de l'ancienne noblesse jouissait d'un grand crédit.» Mais la littérature réunit encore ces deux classes sociales que l'analyse sépare. Celles-ci forment d'abord le public du roman courtois venue de France et de Provence, bientôt supplanté par une littérature indigène (DANTE, BOCCACE). On met en scène ces opposition sociales sur un mode plein de subtilité. On raille la décadence des mœurs, de l'autre on exalte la valeur des chevaliers qui *risquent* leur vie au combat et en amour…

Ces textes des XIII-XIV^{e} siècle présentent donc le *risque* sous un jour paradoxal pour le lecteur du «roman nautique»: alors qu'on avait affirmé le rôle des marchands dans la diffusion du mot, on constate ici que la capacité à affronter le risque est considérée comme un trait aristocratique. Les valeurs de cette classe dominante déteignent sur ceux qui prétendent à y entrer. Et le risque est donc peut-être un mot *adopté* par les marchands, soucieux d'insister sur le courage nécessaire à leurs expéditions. A partir du XIII^{e} siècle, alors que le mot se diffuse en Méditerranée avec les pratiques commerciales, il concerne déjà les marchandises elles-mêmes… Seule la littérature courtoise qui met en scène les chevaliers et le droit qui dit les châtiments garde encore le souvenir d'un risque qui menace l'intégrité physique de ses victimes. Avec l'essor des marchands, le mot *risque* désigne progressivement des dangers sans cesse plus nombreux car il est plus d'occasions d'exposer son argent que sa vie.

Cette première époque nous permet donc de révoquer en doute les mythes de l'histoire du risque. D'une part, le roman nautique est ramené à ce qu'il est: une histoire plaisante. La légende bourgeoise doit être infirmée: les marchands ne constituent pas une classe sociale distincte dès le XI^{e} siècle, il est bien possible que le mot *risque* soit un mot des guerriers. D'autre part, la thèse weberienne dite «moderniste» se trouve entièremet contredite, puisqu'on doit après Renouard, Le Goff et beaucoup d'autres, que l'esprit du capitalisme était bien vivant dans l'Italie du *trecento* (et cette dimension manque d'ailleurs dans l'ouvrage de (BESNARD, 1970)).

La diffusion en Europe

On peut distinguer deux périodes dans la propagation du mot risque: l'époque moderne où la désignation du mot s'étend rapidement; l'époque contemporaine où le mot est devenu principalement abstrait. La France servira d'exemple, puisque la base ARTFL permet une étude détaillée.

La France moderne: extension de la désignation

Au XVII^{e} siècle, le mot risque apparaît encore étroitement lié au vocabulaire naval: ainsi Nicot ne ménage pas d'entrée au mot *risc* dans son *Thrésor de la langue française* (1606), mais il l'emploie deux fois dans un contexte naval (Entrée *asseurer*: «Et asseurer un navire (…) (c'est) promettre à son risc, peril et fortune, qu'il ira sauvement de tel port jusques à tel»; entrée *fortunal*: «Est un subit et furieux orage sur la mer, dont les vaisseaux nageans et flottans en icelle estans surprins sont en risc et hazard de submersion»). De même, les ouvrages traitant spécifiquement des usages maritimes sont coutumiers de ce mot. L'*Ordonnance de la Marine* de Colbert (1681), dans son titre consacré aux assurances, fait la part belle au mot, ainsi que par exemple le livre de (MAGENS, 1753), véritable compilation du droit européen sur la question. Il convient d'ailleurs de préciser que le mot *risque* demeure spécifique aux assurances *maritimes*, à l'exclusion des assurances sur la vie ou contre les incendies, telles qu'elles se développent à partir des années 1670.

A côté de cet usage spécifique à la marine, on rencontre une acception économique générale : le mot *risque* apparaît dans une expression, une *façon de parler* comme on dit alors, fréquemment citée. «*Prendre une affaire à ses risques, perils & fortunes,* pour dire, Se charger de tout ce qui en peut arriver, se charger du bon & du mauvais succés», écrit le premier *Dictionnaire de l'Académie française*. On retrouve alors la formule consacrée, «à ses risque et fortune (RTF bookmark start:) risque_et_fortune (RTF bookmark end:) risque_et_fortune», copiée littéralement de l'italien. Cette signification économique du *risque* —qui menace les *avances* de l'*entrepreneur*— apparaît comme une généralisation de l'usage maritime. Elle constitue, dans la France du XVII^{e} siècle, le seul noyau sémantique stable autour duquel les diverses acceptions du mot gravitent. Plus encore, elle représente le seul cas où le substantif est utilisé seul, sans précisions additionnelles. Car, pour le reste, on ne rencontre que ces *façons de parler* (*courir risque*, *se mettre en risque*, là encore, copiées littéralement sur l'italien). *Risque* n'est donc pas un terme courant au XVII^{e} siècle, comme en témoigne sa fréquence relative encore très faible dans les textes littéraires (Tableau 1).

Tableau 1. Fréquence par million du mot risque aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles.

Année	1600-24	1625-49	1650-74	1675-99	1700-24	1725-49	1750-74	1775-99
Fréquence par million	2,68	3,34	10,82	9,52	19,38	34,29	29,67	26,91

Source: Base de données ARTFL.

Au vu de ce raisonnement, il semblerait donc que le concept de *risque* témoigne d'un jugement sur la nature de la chose menacée. On *hasarde* une mise, on *risque* un placement; la première décision est *hasardeuse*, la seconde, *risquée*. Une mise au jeu ou à la loterie, un bien assuré —sauf dans le cas des assurances maritimes— ne peuvent être regardées comme menacées par des *risques*: ce ne sont pas des investissements sérieux. S'il semble que la frontière entre *assurance* et *pari* soit rétrospectivement assez peu claire, comme le rappelle ((Boiteux, 1968) pp. 73-75) qui donne des exemples de pseudo-contrats d'assurance dissimulant une *gageure*, elle l'est pour les témoins du temps qui utilisent les mots selon leur sens[4]. Et le sens est inscrit dans les origines: le substantif *chance*, le verbe *hasarder* qui appartiennent au champ sémantique du jeu (*cadentia*, est la chute des dés ou le point, en latin, et *azar* désigne le point gagnant en arabe), où la témérité s'exprime en *jouant gros jeu*. Le terme *risque* a un aspect normatif: s'il justifie un profit, c'est en échange d'un travail, ou au moins dans le cadre d'une activité économique, fût-elle aventureuse ou même (au dix-huitième siècle) illégale. C'est seulement dans les années

[4] Les choses sont parfois très complexes. Ainsi, Teira-Serrano (1998) a montré que Soto opérait dès le XVI^{e} s. une métaphore entre les ordres économique et ludique. La question des fluctuations dans la doctrine reste ouverte, elle n'est pas entièrement réglée par Clavero (1991) et nous n'avons pas la prétention de l'avancer. Constatons simplement qu'il n'est pas question de *risque* chez les auteurs ecclésiastiques, en particulier pas chez Soto (1556) ni chez Caramuel (1670). De Soto (1556) pp. 521-525, après avoir présenté l'argument thomiste à propos du prêt à intérêt —il use alors du concept de *damnum emergens*— discute des questions relatives aux contrats de société et d'assurance. Le risque est alors designé par le substantif *periculum*. On considère d'habitude l'expression *periculum sortis* comme synonyme de *risque* ; mais il faut constater que De Soto emploie de façon générale le seul substantif *periculum*, et occasionnellement l'expression *periculum pecuniarum*. Chez Caramuel, le sens des mots a légérement évolué avec l'évolution des concepts probabilistes, puisqu'il semble d'après le contexte que le couple *spes / periculum* désigne plutôt les probabilités de gagner / perdre.

1780, sous la plume des mathématiciens comme Condorcet et Tetens que *risque* reçoit une désignation abstraite et générale (voir PRADIER (2003b)).

L'évolution ultérieure des mots montre que leur signification (le concept auxquels ils renvoient) est plus large que leur simple désignation (le référent réel). (BENVENISTE, 1969) qui a étudié l'articulation de ces notions (signification /désignation), considère généralement le devenir de vocables généraux qui s'enferment dans une désignation très particulière. Ce phénomène engendre des énigmes linguistiques. Ici au contraire on a affaire à un mot dont la désignation est temporairement bornée au regard de sa signification. Ceci est à mettre en relation avec le statut délicat, aux yeux de la morale et du droit, des contrats aléatoires: les frontières entre jeu de hasard et jeu de commerce, entre usure et profit légitime, restent longtemps problématiques. Les mots renvoyant à ces pratiques sont donc spécifiques. Entre le milieu du dix-septième siècle et le dernier tiers du siècle suivant, une évolution très nette des mentalités —comme en témoigne le contraste entre le rigorisme des canonistes décrits par (CLAVERO, 1991) et la souplesse des conceptions jusnaturalistes (par exemple chez (SMITH, 1776) qui considère la contrebande comme une activité économique parmi d'autres)— permet l'élargissement du champ de leur désignation.

Au XVIII^{e} siècle, une évolution linguistique accompagne les transformations sociales. Le mot est de plus en plus fréquemment utilisé, et cet engouement touche d'autres termes du même champ sémantique: *aventure*, qui signifie «ensemble d'événements qui arrivent à quelqu'un», mais aussi *danger* et *péril*, dont la connotation négative est évidente, et à l'inverse, *chance* ou *fortune*. Cette vogue du vocabulaire de l'aléatoire témoigne d'une ère aventurière, celle des grands coups de finance (avec le système et la banqueroute de Law, les Bubbles, les tulipes de Hollande), des grands voyages (COOK, LAPÉROUSE) et d'histoires personnelles qui sont d'abord des *aventures sociales* (le film *Barry Lyndon* de Stanley Kubrick illustrant les biographies réelles ou imaginaires de l'Abbé Prévost, Casanova, Da Ponte, Beaumarchais et tant d'autres). L'*aventure*, qui s'identifie à la destinée d'un individu dans laquelle entre de plus en plus évidemment un élément de volonté et d'habileté; quitte peu à peu le lexique de l'aléatoire, dans son sens neutre (ni bon, ni mauvais), il est remplacé par *hasard*.

Le jeu des métonymies à l'époque contemporaine

Avant d'envahir le XX^{e} siècle, *risque* connaît une éclipse très nette, comme en témoigne le tableau 2: la fréquence du mot dans la littérature a baissé de moitié depuis le milieu du siècle des Lumières. Est-ce à dire que le «siècle de la Science» ne supporte pas le doute? L'explication de ces tendances longues ne participe pas de notre objet. Remarquons simplement ce fléchissement, que suit une remontée décisive. Le tableau 3, qui est relatif aux familles de mots (c'est-à-dire qu'en plus du substantif *risque*, on compte les adjectifs *risqué*, *risqueur* et *risqueux* et le verbe *risquer* conjugué), présente bien l'irrésistible ascension du *risque*, qui s'octroie une partie de l'espace dévolu aux *dangers*, aux *périls*, peut-être même au *hasard*. L'écart entre les tableaux 2 et 3 montre que ce n'est pas seulement le substantif qui progresse au XIXe siècle mais encore l'adjectif et le verbe dérivés. Car contrairement à *chance*, *danger*, *fortune* et même *péril* (le verbe *périller* est nettement archaïque), *risque* est à la tête d'une famille de mots. C'est peut-être une des raisons de son usage sans cesse plus fréquent : il évite le recours aux périphrases (cette fois les façons de parler sont du côté de *danger* et *péril*) et simplifie donc l'élocution.

Tableau 2. Fréquence par million du mot risque aux XIX^{e} et XX^{e} siècles.

Année	1800-24	1825-49	1850-74	1875-99	1900-24	1925-49	1950-64
Fréquence par million	16,74	18,38	18,37	18,12	36,63	58,70	64,25

Source: Base de données ARTFL.

Tableau 3. Fréquence par million de familles de mots aux XIX^{e} et XX^{e} siècles.

Année / Fréquence par Million	1800-24	1825-49	1850-74	1875-99	1900-24	1925-49	1950-64
Aventure	44,58	80,23	86,14	94,89	93,73	109,58	106,88
Chance	31,91	42,10	55,73	76,87	66,02	115,96	155,30
Danger	199,42	145,48	135,45	111,75	139,54	137,28	124,24
Fortune	231,95	298,00	177,36	136,57	95,50	73,25	55,72
Hasard	133,10	165,88	161,94	138,35	124,36	138,68	113,58
Péril	43,69	26,71	37,77	44,33	37,45	43,69	26,71
Risque	37,38	44,53	56,71	66,09	87,55	148,99	151,34

Source: Base de données ARTFL.

A la lecture de ces tableaux, on pourrait se demander si l'émergence de la *société du risque* n'est pas en fin de compte un phénomène purement linguistique. D'autant qu'un autre aspect de l'engouement pour le mot risque tient à sa polysémie. Cette polysémie s'épanouit dans un jeu de métonymies. Ainsi le *risque* est un «danger probable», mais c'est aussi dans la langue des assureurs la probabilité que se manifeste ce danger (comme *periculum* désignait déjà sa probabilité chez Caramuel (1670))… ou l'espérance mathématique du sinistre encouru (comme Moivre (1711)

p. 215 écrivait déjà «*sors seu expectatio*»). On confond donc le risque avec sa mesure (métonymie) et avec ce qu'il menace: les assureurs caractérisent chacun de ses assurés comme des *risques*. Les bons conducteurs sont de bons risques, les chauffards, de mauvais risques. Ces métonymies qui vont de l'objet à sa représentation, ou de l'objet au sujet permettent évidemment une grande variété d'emplois du mot risque. Signalons enfin qu'il n'est plus de désignation spécifique pour le mot, qui ne connote plus aucune activité particulière.

*
* *

Pour conclure, rappelons d'abord nos résultats. En premier lieu, la thèse selon laquelle le substantif *risque* apparaît (ou se répand) à l'époque moderne, en relation avec l'essor de la classe mercantile constitue un mythe. L'histoire du mot *risque* est d'abord marquée par un élargissement progressif de sa désignation, alors que sa signification reste inchangée. On risque d'abord sa peau puis sa fortune, enfin à une époque où l'on croit investir en misant sur les valeurs mobilières d'une économie-casino, on risque aussi bien un euro sur une grille de Loto. Mais ce processus d'extension, rapide et précoce dans l'Italie du XIII^{e} s. (si bien qu'on ne peut discerner avec certitude la désignation ni la région originelles); est bien plus lent et plus tardif dans le reste de l'Europe. La légende moderniste et bourgeoise se nourrit de l'histoire de cette diffusion hors d'Italie; et la préhistoire italienne du risque la discrédite.

Notre enquête sur le risque ne nous a ouvert qu'une fenêtre minuscule sur cette «préhistoire» italienne du capitalisme, mais nous y avons découvert des thématiques éloignées des poncifs de l'histoire économique: d'abord on y voit une aristocratie simultanément guerrière et marchande, ensuite le développement des techniques financières y est précoce malgré le catholicisme et la thèse de Max Weber, enfin le retard de l'Italie au XVIII^{e} siècle pose avec insistance la question de la réversibilité du progrès et du développement économiques. Tout ceci nous entraîne à distance de notre sujet. Plus près de lui, une question reste ouverte: une étude *exhaustive* des textes italiens du XIII^{e} siècle permettrait-elle de serrer plus précisément l'origine (régionale ou contextuelle) du mot *risque*?

BIBLIOGRAPHIE

ANONYME (1976): «Carta picena», in *I più antichi testi italiani*, A. Castellani, éd., Pàtron, Bologna, pp. 202-03.

BEC, C. (1967): «Au début du XIVe s.: mentalité et vocabulaire des marchands florentins», *Annales ESC*, pp. 1.207-1.226.

BENVENISTE, E. (1969): *Le vocabulaire des institutions indo-européennes*, Paris, Minuit.

BESNARD, P. (1970): *Protestantisme et capitalisme*, Paris, Armand Colin.

BOITEUX, L. A. (1968): *La fortune de mer —le besoin de sécurité et les débuts de l'assurance maritime*, Paris, SEVPEN.

CARAMUEL, J. (1670): «Kybeia», *in Mathesis Biceps —mathesis nova*, Lyon, Laurent Anisson.

CLAVERO, B. (1991): *La grâce du don —anthropologie catholique de l'économie moderne*, trad. fr. Paris, Albin Michel, 1996.

COROMINAS, J. et PASCUAL, J. A. (1980): *Diccionario crítico etimológico castellano e hispánico*, Madrid, Gredos.

DE SOTO, D. (1556) (1968): *De Iustitia et Iure*. *De la Justicia y el Derecho*. 5 vols. Madrid: Instituto de Estudios Políticos.

DÍEZ, F. (1853): *Etymologische Wörterbuch der romanischen Sprachen*, Bonn, Adolph Marens.

DU CANGE, C. DUFRENE (1678): G*lossarium mediae et infimae latinitatis*; réed. Paris, Firmin-Didot, 1845.

FOURQUET, F. (1989): *Richesse et puissance —une généalogie de la valeur* (XVIe-XVIIIe siècles), Paris, La Découverte.

GUIRAUD, P. (1982): *Dictionnaire des étymologies obscures*, Paris, Payot; réed. anastatique 1994.

LUHMANN, N. (1990): *Soziologie des Risikos*, Berlin, de Gruyter; éd. angl. *Risk : a sociological theory*, New York, de Gruyter.

MELIS, F. (1975): *Origini e sviluppi delle assicurazioni in Italia (secoli XIV-XVI)*, Roma, INA.

MAGENS, N. (1753): *Versuch über Assecuranzen, Havereyen und Bodmereyen insgemein ; und über verschiedene hiebeygesügte wirckliche Vorfälle und deren Berechnungen insbesondere nebst einer Sammlung der vornehmsten alten un neun Verordnungen und von einem Kaufmanne in London*, Hamburg, Conrad König.

MATTAINI, A. (2000): «Andrea da Barberino», in Piccolo E., éd., *La crittica letteraria — il medioevo*, Dedalus – Loffredo, Napoli.

PIGUET, M. F. (1996a): *Classe — histoire du mot et genèse du concept des physiocrates aux historiens de la Restauration*, Lyon, Presses universitaires de Lyon.

PIGUET, M. F. (1996b): «L'émergence de la famille de *produire* dans les écrits des économistes du XVIIIè siècle», *Cahiers de lexicologie*, LXVIII, pp. 5-23.

PRADIER, P. C. (1998): *Concepts et mesures du risque en théorie économique*, Thèse ENS-Cachan, voir http://picha.fr.st.

PRADIER (2003): «La mesure du risque jusqu'à Laplace», colloque AHEPE 2003, Oviedo.

RENOUARD, Y. (1968): *Les hommes d'affaires italiens du Moyen-Âge*, Paris, Armand Colin.

RENOUARD, Y. (1969): *Les villes d'Italie de la fin du* Xe *au début du* XIVe siècle, Paris, SEDES.

REY, A. (1989): *Révolution: histoire d'un mot*, Paris, Fayard.

REY, A. *et al.* (1992): *Dictionnaire historique de la langue française*, Paris, Le Robert.

TEIRA-SERRANO (1998): «Theological and Economic Models of Rationality», Colloque Charles Gide, *modèles formels et théorie économique*.

VÉRIN, H. (1982): *Entrepreneurs, entreprise: histoire d'une idée*, Paris, PUF.

WALEY, D. (1969): *Les Républiques médiévales italiennes*, Paris, Hachette.

WEBER, M. (1908): *L'éthique protestante et l'esprit du capitalisme*, trad. fr. et rééd. Paris, Plon.

Autres sources– non citées directement, mais intégrés au corpus (et nécessaires, par exemple, à l'établissement de la carte)

ANONYME (1872): *Slovnik polsko-francuzki*, Berlin, Behra.

ACADÉMIE FRANÇAISE (1694): *Dictionnaire*, 1ère éd., édition électronique, Université de Chicago, http://humanities.uchicago.edu/ARTFL/ARTFL.html.

ACADÉMIE FRANÇAISE (1798): *Dictionnaire*, 5ème éd., édition électronique, Université de Chicago, http://humanities.uchicago.edu/ARTFL/ARTFL.html.

ALIBERT, L. (1977): *Dictionnaire français-occitan*, Toulouse, Institut d'études occitanes.

BARNHARD, R. K. éd. (1988): *The Barnhard Dictionary of Etymology*, New York, H. W. Wilson.

BATTAGLIA, S. (1992): *Grande dizionario della lingua italiana*, Torino, Unione tipografico-editrice torinese.

BLAISE, A. (1975): *Dictionnaire latin-français des auteurs du Moyen-Âge*, Turnhout, Brepols, rééd. anastatique 1992.

BLOCH, O. et WARTBURG, W V. (1932): *Dictionnaire étymologique de la langue française*, Paris 2è et 5è éd., Paris PUF, 1989.

BOSANAC et al. (1953): *Rjecnik hravotskoga ili srpskoga jezika*, Presses de l'Académie yougoslave (izdavacki zavod jugoslavke akademije), Zagreb, vol 12.

CNRS (1971-94): *Trésor de la langue française*, Paris, CNRS puis Gallimard.

DALIN, A. F. (1843): *Nytt fransyskt och svenskt lexikon*, Stockholm, Hjerta.

DAUZAT, A., DUBOIS, J. et MITTERAND, H. (1964): *Nouveau dictionnaire étymologique*, Paris, Larousse.

DEVIC, M. (1877): «Dictionnaire étymologique des mots d'orgine orientale», *in Supplément du Littré,* Paris Hachette, 1877.

FURETIÈRE, A. (1690): *Dictionnaire universel*, La Haye, Arnout & Reinier Leers; rééd. Paris, Le Robert, 1978.

GAFFIOT, F. (1934): *Dictionnaire latin-français*, Paris, Hachette.

GODEFROY, F. (1891): *Dictionnaire de l'ancienne langue française et de tous ses dialectes du IXè au XVè s.*; rééd. anastatique Genève, Slatkine, 1982

GONFROY, G. (1976): *Dictionnaire normatif limousin-français*, Tulle, Lemouzi.

GREIMAS, A. J. (1979): *Dictionnaire de l'ancien français*, Paris, Larousse, réed. 1992.

GREIMAS, A. J., KEANE, T. M. (1992): *Dictionnaire du moyen français*, Paris, Larousse.

HUGUET, E. (1965); *Dictionnaire de la langue française du seizième siècle*, Paris, Didier 1965.

KLUGE, F. (1975): *Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache*, 21è éd., Berlin, de Gruyter.

LHANDE, P. (1926): *Dictionnaire basque-français*, Paris, Beauchesne.

LITTRÉ, E. (1873): *Dictionnaire de la langue française*; réed. Chicago, Encyclopaedia Britannica.

MIKLOSSICH, F. (1861): *Lexicon palaeoslovenico-graeco-latinum*, Vindobonae (?), G. Braumüller, 2è éd. 1865.

NICOT, J. (1606): *Thrésor de la langue française*, édition électronique, Université de Chicago, http: //humanities.uchicago.edu/ARTFL/ARTFL.html.

NIERMEYER, J. F. (1976): *Mediae latinitatis lexicon minus*, Leyden, Brill.

PALAY, S. (1932): *Dictionnaire du béarnais et du gascon modernes*, 3è éd., Paris, CNRS éd, 1980.

PICOCHE, J. (1983): *Dictionnaire étymologique du français*, Paris, Robert.

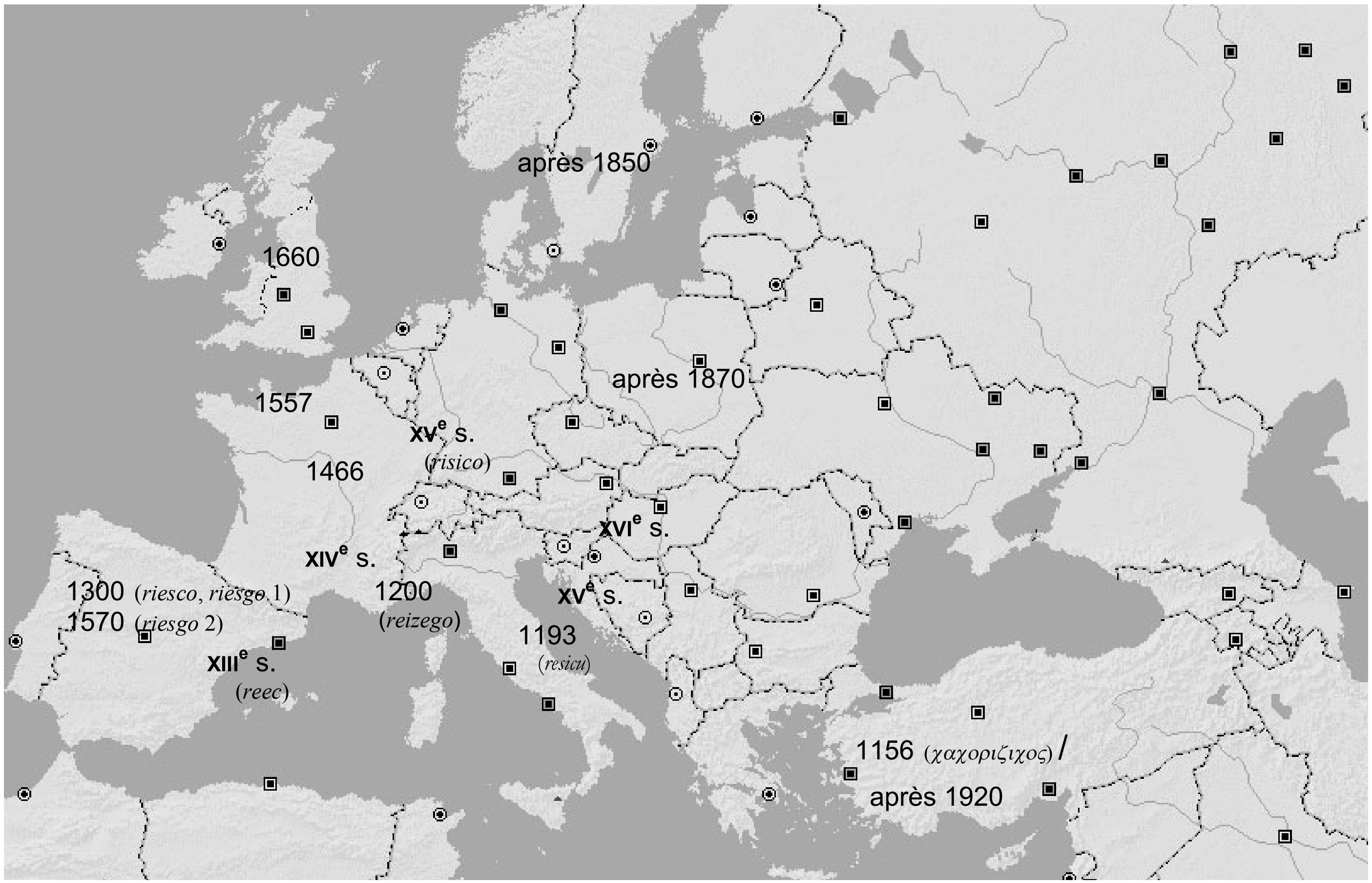
RICHELET, P. (1674): *Dictionnaire français tiré de l'usage et des meilleurs auteurs de la langue*, Genève, Widerhold.

SCHIANNINI, D. (1985): *Dizionario della lingua italiana*, Milano, Garzanti.

TOMMASEO, N., BELLINI, B. (1872): *Dizionario della lingua italiana*, Napoli.

WARTBURG, W. v. (1962): *Französisches etymologisches Wörterbuch*, Basel, R. G. Zbinden.

Annexe – L'Italie comme centre de diffusion du mot risque en Europe



CAPÍTULO 11

La theorie des chances n'est pas un jeu d'esprit: le statut de la probabilité mathématique selon Cournot

THIERRY MARTIN
Université de Besançon

Si l'apport d'Antoine-Augustin Cournot à l'économie mathématique est aujourd'hui bien connu, si, de même, son œuvre philosophique fut l'objet de nombreux commentaires[1], il faut reconnaître que son œuvre probabiliste a été moins systématiquement étudiée. Celle-ci, cependant, mérite d'être interrogée, ne serait-ce que par l'importance qu'il accorde au calcul des probabilités et à la statistique dans le champ de nos connaissances. Dès 1843, en effet, il affirme que la théorie des chances s'applique «aux faits de la nature vivante, à ceux du monde intellectuel et du monde moral, comme aux phénomènes produits par les mouvements de la matière inerte»[2]. En m'appuyant sur une étude développée antérieurement[3], je

1 Je me permets de renvoyer pour illustrer ces deux points à Th. Martin, *Bibliographie cournotienne,* Besançon, Annales Littéraires de l'Université de Franche-Comté, 1998 ; nouvelle édition sur le site : http://slhs.univ-fcomte.fr/rech/philolab/BibCournot.html.

2 A. A. COURNOT (1843): *Exposition de la théorie des chances et des probabilités,* Paris, Hachette, § 45 ; réédité par Bernard Bru, Paris, Vrin, 1984, p. 61. Voir également, s'agissant de la statistique, le § 105, p. 125.

3 TH. MARTIN (1996): *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*, Paris, Vrin.

m'efforcerai dans cet exposé d'estimer la nature et la portée de la contribution de Cournot à la construction du calcul des probabilités.

Il n'est pas si aisé d'assigner la place occupée par l'œuvre de Cournot dans l'histoire du calcul des probabilités et de la statistique. Celui-ci, en effet, n'a pas laissé de théorème fondamental ou de méthode novatrice auxquels attacher son nom et identifier sa contribution à l'élaboration du calcul. De fait, c'est moins sur ce plan qu'il faut s'installer si l'on veut comprendre le rôle qu'il a pu jouer, que sur celui de la philosophie des probabilités. Mais la tâche n'en est pas facilitée pour autant, car bien souvent les probabilistes qui ont contribué à l'édification de la théorie mathématique dans sa forme moderne omettent de s'y référer, alors même qu'ils l'ont lu. Ainsi en est-il par exemple de Paul Lévy[4] ou d'Émile Borel, lequel, curieusement, ne fait, à ma connaissance, aucune allusion à Cournot dans toute son œuvre, malgré l'indéniable proximité de leurs pensées. Mais l'autorité de statisticiens comme Louis-Adolphe Bertillon[5] ou Adolphe Quetelet[6], et de probabilistes comme John Maynard Keynes[7] ou Maurice Fréchet[8] attestent du fait que son œuvre a été lue, l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* ayant même été généralement considérée comme un modèle de rigueur et de clarté. Ainsi Emmanuel Carvallo, directeur des études à l'École Polytechnique, mit l'ouvrage de Cournot au programme du concours organisé en 1907 par la Statistique Générale de la France à raison « du bon équilibre de la composition de l'Ouvrage, du choix des matières, de la clarté d'exposition, de la discussion des principes et des applications »[9]. Par conséquent, même s'il contient un fond de vérité, il convient de ne pas prendre à la lettre le jugement de Fernand Faure selon lequel « trop philosophique pour les statisticiens, trop statistique pour les philosophes, l'œuvre de Cournot, dans la partie relative à la statistique, devait fatalement passer inaperçue »[10]. On doit plutôt admettre que, pour lente et souterraine qu'elle fut, l'œuvre de Cournot a exercé une

---

4 Maurice Fréchet précise que c'est Paul Lévy qui lui a signalé le texte de l'*Exposition* dans lequel Cournot soulève le problème de la valeur objective de la théorie des chances, cf. M. Fréchet, «Les origines des notions mathématiques», in *Les mathématiques et le concret*, Paris, P.U.F., 1955, p. 24.

5 Cf. L. A. BERTILLON (1876): «La théorie des moyennes en statistique», *Journal de la Société de Statistique de Paris*, oct., n° 10, pp. 265-271 et nov. 1876, n° 11, pp. 286-308.

6 A. Quetelet, *Lettres à S.A.R. le duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*, Bruxelles, M. Hazey, 1846, pp. 387-388.

7 J. M. KEYNES (1921): *A Treatise on Probability*, London, MacMillan, p. 166.

8 M. FRÉCHET (1949): «Rapport général sur les travaux de la section de calcul des probabilités», *XVIIIe Congrès International de Philosophie des Sciences*, Paris; in *Les mathématiques et le concret*, Paris, P.U.F., 1955, pp. 209-213 et 216-221.

9 E. CARVALLO (1912): *Le calcul des probabilités et ses applications*, Paris, Gauthier-Villars, p. V.

10 F. FAURE (1905): «Les idées de Cournot sur la statistique», *Revue de Métaphysique et de Morale*, mai, p. 396.

influence profonde sur l'édification de la théorie des probabilités et de l'analyse statistique par la clarification conceptuelle qu'elle a opérée et les réflexions épistémologiques qu'elle a développées, comme en témoigne l'analyse qu'en propose Loraine Daston aux pages 189-192 de son ouvrage *Classical probability in the enlightenment*, (Princeton, Princeton University Press, 1988).

De fait, le projet qui anime Cournot dans l'*Exposition* est autant philosophique que mathématique. «Je me suis proposé, écrit-il dans la préface, deux buts dans cet ouvrage: d'abord de mettre à la portée des personnes qui n'ont pas cultivé les hautes parties des mathématiques, les règles du calcul des probabilités…; en second lieu j'ai voulu rectifier des erreurs, lever des équivoques, dissiper des obscurités dont il m'a paru que les ouvrages des plus habiles géomètres, sur ce sujet délicat, n'étaient point exempts» (*Exposition*, préface, p. 3), obscurités dont il indique qu'elles «portent sur les principes du calcul bien plus que sur les déductions purement mathématiques» (*Ibid.*). Il s'agit donc pour lui de redéfinir les principes du calcul des probabilités afin d'en préciser le véritable sens, et ceci dans la mesure où c'est ce travail de réélaboration conceptuelle qui peut permettre de mesurer la fécondité et les limites des résultats auxquels conduit le calcul. Cournot l'indique à la page suivante: «La partie de mon travail à laquelle, je l'avoue, j'attache le plus de prix, est celle qui a pour objet de bien faire comprendre la valeur philosophique des idées de chance, de hasard, de probabilité, et le vrai sens dans lequel il faut entendre les résultats des calculs auxquels on est conduit par le développement de ces notions» (*Ibid*., p. 4). La question qui domine la réflexion de Cournot dans l'*Exposition* est donc celle des rapports de la théorie au réel, ou, comme il le dit, de sa valeur objective, question qui n'est par proprement mathématique, mais philosophique. S'agissant du calcul des probabilités, il s'agit «de savoir si toute cette théorie n'est qu'un jeu d'esprit, une spéculation curieuse, ou si elle a au contraire pour objet des lois très importantes et très générales, qui régissent le monde réel» (*Exposition*, § 38, p. 53).

Cette orientation épistémologique de la pensée probabiliste de Cournot est présente dès sa première contribution à la théorie des chances, à savoir l'article «De la théorie des probabilités considérée comme la matière d'un enseignement» (*Le Lycée*, tome II, 1828, pp. 243-254), dans lequel il entend affirmer l'autonomie de la théorie des probabilités à l'égard de la perspective sensualiste à l'intérieur de laquelle l'inscrit Lacroix dans son *Traité élémentaire du calcul des probabilités* (Paris, COURCIER, 1816; 2e éd. BACHELIER, 1822). Elle se retrouve dans l'«Addition sur la distribution des orbites cométaires», que Cournot adjoint à sa traduction du *Traité d'astronomie* de John Herschel (Paris, PAULIN, 1834), et dans le «Mémoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire», publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville en 1838 (t. III, pp. 257-334). Enfin, elle domine la réflexion probabiliste et statistique de Cournot dans l'*Exposition* et dans ses œuvres ultérieures.

Qu'une discussion portant sur la signification de la relation de la théorie mathématique au réel soit nécessaire, c'est ce que les applications des probabilités et des statistiques peuvent encore aujourd'hui suggérer quotidiennement. Mais elle l'est plus encore au moment où Cournot publie l'*Exposition*, tandis que le calcul des probabilités subit un ensemble d'attaques, parfois très vives, contestant d'un côté sa scientificité, de l'autre la légitimité de ses applications aux phénomènes sociaux. Invoquant la singularité radicale et l'originalité du comportement des individus, à raison de la conscience et de la liberté dont ils jouissent essentiellement, philosophes et savants ne manquent pas pour dénoncer l'usage des probabilités et de la statistique dans ce qu'on appelle à l'époque le domaine moral. C'est notamment le cas de Destutt de Tracy[11], ou encore de Royer-Collard qui tempère l'éloge qu'il prononce de Laplace dans son Discours de réception à l'Académie française en indiquant que la «science morale» a «d'autres principes, plus mystérieux et plus compliqués, devant lesquels la géométrie s'arrête»[12]. Plus incisif, au cours de la discussion qui suivit la présentation par Poisson de sa «Note sur le calcul des probabilités» devant l'Académie des Sciences, Louis Poinsot, après avoir reconnu que ce calcul est «aussi exact que l'arithmétique», estime que son application au domaine moral constitue «une sorte d'aberration de l'esprit, une fausse application de la science et qui ne serait propre qu'à la discréditer»[13]. Charles Gouraud, qui visiblement n'a pas lu Cournot, résumera ce sentiment en 1848 dans son *Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours* par ces mots: «L'application du Calcul des probabilités aux sciences morales, et notamment à la critique historique, à la jurisprudence, à la législation, à l'économie sociale, à la métaphysique, est une des plus grandes erreurs où soit tombé l'esprit humain»[14]. Plus gravement, c'est la théorie mathématique elle-même qui se trouve mise en cause par les critiques les plus virulentes. On connaît la violence avec laquelle Auguste Comte condamne la conception «radicalement fausse et susceptible de conduire aux plus absurdes conséquences» qui fonde le calcul des probabilités, jugeant «la notion fondamentale de la probabilité évaluée (…) directement irrationnelle et même sophistique»[15]. On peut également rappeler, par exemple, que s'opposant à l'intro-

---

[11] A. DESTUTT DE TRACY (1994): Supplément à la 1ère section des *Éléments d'Idéologie*, in *Traité de la volonté et de ses effets*, Paris, Courcier 1815; rééd. Paris, Fayard, coll. Corpus, p. 38.

[12] P. ROYER-COLLARD (1827): «Discours de réception à l'Académie française», *Institut Royal de France*, Paris, Firmin Didot, p. 10.

[13] *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 2, 1836, p. 399.

[14] CH. GOURAUD (1848): *Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours*, Paris, A. Durand, p. 147.

[15] A. COMTE (2003): *Cours de philosophie positive*, Bachelier, 1830-1842, 27e leçon; rééd. Paris, Hermann, 1975, t. I, p. 435. Sur cette critique comtienne, on pourra consulter Ernest Coumet, «Auguste Comte. Le calcul des chances, aberration radicale de l'esprit mathématique», *Mathématiques et sciences humaines*, n° 162, pp. 9-17.

duction des méthodes probabilistes et statistiques dans la pratique médicale, Risueño d'Amador prétend que «la théorie mathématique des probabilités, appliquée aux faits réels du monde physique et moral, devient ou inutile ou illusoire», cette théorie n'ayant pu, selon lui, «être encore complètement établie, même dans ses fondements purement abstraits et mathématiques»[16].

Il est donc plus que temps en 1843 de donner un sens clair aux concepts et principes du calcul des probabilités comme à ceux de la statistique, et d'en préciser les conditions d'application. Telle est la tâche qu'entreprend Cournot dans l'*Exposition*, tâche visant à fonder rationnellement la théorie des probabilités et à la définir comme instrument d'intelligibilité du réel. Il ne s'agit pas de savoir si le calcul des probabilités peut être appliqué au réel, la question n'ayant plus à être posée en 1843, mais de déterminer la signification et la portée de cette application, en prenant soin de distinguer le résultat mathématique lui-même des conditions d'application qui lui donnent sens. Plus précisément, fonder rationnellement le calcul des probabilités comme instrument d'intelligibilité du réel suppose pour Cournot une double opération consistant 1° à établir son statut de théorie mathématique pure et 2° à définir les conditions lui permettant de bénéficier d'une valeur objective.

I. Que le calcul des probabilités soit une théorie mathématique à la pureté rationnelle comparable à celle de l'algèbre ou de la théorie des nombres ne va, en effet, pas de soi. Soutenir une telle conception du calcul exige de l'extraire de la sphère des mathématiques mixtes dans laquelle le situait le XVIIIe siècle, et assumer ainsi le mouvement entrepris par Laplace dans sa *Théorie analytique des probabilités* (Paris, Courcier, 1812) consistant à l'adosser au calcul intégral. L'opération a également pour effet d'assurer l'autonomie mathématique de la théorie par rapport à toute orientation philosophique, et d'invalider par là les arguties de ceux qui, comme Auguste Comte, prétendent la réduire à une construction métaphysique infondée. Au contraire, pour Cournot, la théorie des chances et des probabilités s'appuie sur la combinatoire, définie comme «une science abstraite et purement rationnelle» (*Exposition*, § 1, p. 7), semblable en cela à l'arithmétique et à la géométrie; la combinatoire étant pensée par Cournot comme cette science générale de l'ordre et des combinaisons formant le socle sur lequel s'édifie tout le système des mathématiques.

Cette autonomie de la théorie mathématique est d'autre part renforcée par la distinction qu'institue Cournot entre les probabilités mathématiques et les probabilités philosophiques.

---

[16] Risueño d'Amador (1967): «Mémoire sur le calcul des probabiltiés appliqué à la médecine», Paris, *Académie royale de médecine*, tome I, n° 16, 25-4-1837, pp. 624-625. Cf. sur ce point Joseph Schiller, *Claude Bernard et les problèmes scientifiques de son temps*, Paris, Éditions du Cèdre, ch. X.

À la différence des probabilités mathématiques aptes à recevoir une mesure numérique précise, les probabilités que Cournot appelle philosophiques ne peuvent s'exprimer en nombres. Ces probabilités philosophiques concernent l'ensemble des jugements, particulièrement nombreux, qui ne résultent pas d'une démonstration en forme, donc qui ne jouissent pas d'une certitude apodictique, mais reposent sur un réseau d'inductions et d'analogies. Sans doute ces jugements bénéficient de probabilités variables, en fonction du nombre et de la solidarité des inductions et analogies qui les soutiennent, mais elles ne peuvent recevoir une expression numérique, car, indique Cournot, les critères autorisant à affirmer la conformité d'une représentation ou d'une hypothèse au réel, à savoir leur simplicité et leur fécondité explicative, ne sont pas susceptibles d'être estimés numériquement à l'aide d'une unité de mesure fiable.

La théorie mathématique étant autonomisée par rapport à ses applications, les résultats du calcul sont alors susceptibles de recevoir des significations différentes selon la nature des objets sur lesquels ils portent. Autrement dit, le contenu de la théorie ne préjuge en rien de la signification objective ou subjective de ses applications selon que celles-ci concernent les événements eux-mêmes ou les jugements que l'on prononce à leur sujet.

La réponse que propose Cournot à la question de savoir si le concept de probabilité possède une signification objective ou une signification subjective ne consiste donc pas, comme on l'a parfois avancé, à ne retenir qu'une interprétation, à la fois objectiviste et fréquentiste, de la probabilité, mais à établir ce qu'il appelle le «double sens» de la probabilité mathématique, non pas pour la condamner à une ambiguïté d'essence, mais au contraire afin de souligner la nécessité de déterminer rigoureusement les conditions grâce auxquelles son application peut bénéficier d'une signification objective, et celles qui ne peuvent lui assurer qu'une signification subjective. Toute la difficulté est alors de savoir comment cette possibilité de valeur objective peut être affirmée.

II. Pour reconnaître à la probabilité une valeur objective, il faut pouvoir établir une correspondance entre le plan du concept et celui du réel, de telle sorte qu'au concept de probabilité on puisse référer, dans le réel, un objet correspondant. La démarche mise en œuvre par Cournot consiste à établir cette correspondance en s'installant successivement sur les deux plans. Sur le plan du réel, Cournot montre que le hasard ne se réduit pas à une illusion subjective, fruit de notre ignorance des causes des phénomènes, mais constitue une situation empiriquement observable. Autrement dit, il élabore une théorie objectiviste du hasard permettant de laisser une place, à côté des événements nécessaires, soumis à un déterminisme strict, à des événements seulement possibles, *id est* dont la possibilité est susceptible de trouver dans la probabilité l'instrument de sa mesure. Sur le plan du concept, réciproquement, il montre, grâce au concept d'«impossibilité physique», que, sous certaines conditions, la probabilité peut mesurer la possibilité physique des événements.

Il établit ainsi d'un côté qu'il existe une classe d'événements dont la possibilité de réalisation est mesurable par la probabilité, à savoir celle des événements fortuits, de l'autre qu'il existe un concept de probabilité apte à mesurer la possibilité physique des événements appartenant à cette classe. Lorsque le calcul des probabilités peut être appliqué à ces événements, dont on sait qu'ils sont fortuits, pour en mesurer la possibilité de réalisation, il vise une réalité physique, et le calcul mesure alors, dit Cournot, la *chance* de l'événement. A défaut, c'est-à-dire lorsqu'on ne peut être assuré de la fortuité des événements considérés, il ne pourra se constituer en théorie des chances, et ne mesurera que la *probabilité* de vérité du jugement affirmant la réalisation future de l'événement.

L'argumentation de Cournot se déploie donc en deux moments successifs, le premier consacré à la mise en place de sa théorie objectiviste du hasard, le second à l'analyse des implications du concept d'impossibilité physique.

A. On a coutume de réduire la théorie cournotienne du hasard à l'affirmation de l'existence de séries causales indépendantes. Cournot écrit, en effet, que «les événements amenés par la combinaison ou la rencontre de phénomènes qui appartiennent à des séries indépendantes, dans l'ordre de la causalité, sont ce qu'on nomme des événements *fortuits* ou des résultats du *hasard*» (*Exposition*, § 40, p. 55). Il convient cependant de faire ici deux remarques:

1° La distribution des relations de causalité en séries linéaires n'est en fait qu'une représentation commode, destinée à faciliter la représentation des relations de dépendance entre les phénomènes. Cournot, en effet, parle à leurs propos des «faisceaux de lignes concurrentes par lesquels l'*imagination se représente* les liens qui enchaînent les phénomènes» (*Essai sur les fondements de nos connaissances*, 1851, § 29, p. 34).

2° L'indépendance des causes de l'événement, facteur de fortuité, n'exige pas une extériorité radicale des séries. Elle n'interdit pas la présence entre les séries de multiples relations, et même de relations causales. En effet, l'indépendance que considère Cournot est ce qu'on pourrait appeler une «indépendance rationnelle». De même que deux grandeurs sont solidaires, si la variation de l'une a sa raison dans la variation de l'autre, elles seront indépendantes si la variation de l'une n'a pas sa raison dans la variation de l'autre. L'indépendance des causes concourrant à la production de l'événement est de cet ordre. Un événement est fortuit, pour Cournot, si les causes qui l'engendrent ne sont pas liées entre elles par une relation nécessaire, autrement dit s'il n'est pas l'effet d'une loi. Le hasard tel que le conçoit Cournot est ainsi pleinement compatible avec le postulat du déterminisme, dès lors que celui-ci est pensé au niveau local. Cournot refuse, en revanche, le déterminisme universel de Laplace affirmant qu'une intelligence supérieure, parfaitement informée de l'état présent de l'univers dans l'ensemble de ses composants, pourrait exprimer cette connaissance en une seule formule dont elle serait à même de déduire la connaissance complète du passé comme celle du futur[17].

Il en résulte que:

– La fortuité ne suppose pas l'imprévisibilité. Dès lors que deux séries causales ne sont pas liées entre elles par une relation nécessaire, leur rencontre emporte avec elle une part de fortuité. Et le fait de connaître parfaitement les causes qui engendrent l'événement résultant de cette rencontre, donc de pouvoir en prévoir rigoureusement les conditions de réalisation, ne modifie en rien sa fortuité. Sa réalisation n'est pas pour autant nécessaire, puisque les deux séries ne sont pas interdépendantes, elle est seulement certaine pour celui qui, par avance, connaît parfaitement le contenu des séries.

– Elle n'implique pas davantage la rareté, car la réalité offre à chaque instant une multitude de situations où se croisent sans nécessité des séries de causes indépendantes. Les faits de hasard n'ont donc rien d'exceptionnels, mais ils nous semblent tels, lorsqu'ils présentent, *pour nous*, un caractère remarquable. On peut le montrer aisément sur un exemple développé par Cournot. Le fait que deux frères, servant dans deux armées différentes, meurent au combat le même jour, est, dit-il, un fait de hasard, car les causes amenant la mort de l'un sur un front et celles entraînant la mort de l'autre sur un autre front, liées à des circonstances locales, sont indépendantes les unes des autres. En revanche, s'ils servaient dans la même armée et mourraient dans la même bataille, on pourrait toujours supposer que, par exemple, le cadet s'est engagé pour suivre l'exemple de son aîné, et s'est ainsi exposé au même danger que lui en raison du lien familial qui les unit. Sa mort, en ce cas, ne serait pas indépendante de celle de son frère. Or, poursuit Cournot, «on remarquera le hasard qui a fait périr les deux frères le même jour, et l'on ne remarquera pas, ou l'on remarquera moins celui qui les a fait mourir à un mois, à trois mois, à six mois d'intervalle ; quoiqu'il n'y ait toujours aucune solidarité entre les causes qui ont amené tel jour la mort de l'aîné, et celles qui ont amené tel autre jour le mort du cadet, ni entre ces causes et leur qualité de frères» (*Exposition*, § 42, pp. 56-57).

3° Il semble tout d'abord que l'on puisse objecter à Cournot qu'en raison de la continuité de l'espace et du temps, l'indépendance rationnelle requise pour pouvoir parler de fortuité se réduise à une illusion subjective due à notre ignorance des multiples relations qui lient entre eux l'ensemble des phénomènes en un réseau où chaque événement interagit avec les autres au moins indirectement. Une telle objection est cependant invalide, car, selon Cournot, l'action d'une série causale sur une autre, bien qu'effective, peut être posée comme négligeable dès lors qu'elle n'engendre qu'une variation infinitésimale. Il illustre cette idée en considérant un aéro-

[17] PIERRE-SIMON DE LAPLACE (1986): *Essai philosophique sur les probabilités*, 1825; rééd. Paris, Ch. Bourgeois, p. 32.

lithe qui, pénétrant dans l'atmosphère terrestre, se trouve ralenti par les effets de frottement. Sa température alors s'élève, et cet accroissement de chaleur se disperse dans l'espace céleste. Mais, précise Cournot, en raison de la disproportion entre l'immensité de l'espace céleste et la faiblesse de l'échauffement de l'aérolithe, «le refroidissement de l'aérolithe ne peut communiquer aux espaces célestes qu'un accroissement de température *infiniment petit*, c'est-à-dire absolument insaisissable par l'observation ou physiquement nul» (*Matérialisme, vitalisme, rationalisme*, 1ère section, § 6, p. 39).

Se trouve ainsi affirmée la possibilité d'un hasard objectif comme rencontre de faits rationnellement indépendants. Mais, qu'il existe effectivement des situations de fortuité n'implique pas qu'on dispose d'une théorie mathématique permettant d'en fournir une mesure rationnelle. Cournot doit donc à présent s'installer sur le plan du concept, pour établir cette aptitude de la probabilité mathématique à décrire adéquatement les faits de hasard.

B. L'analyse cournotienne du concept d'impossibilité physique procède en deux temps. Dans un premier temps, elle construit un principe de validation de la théorie mathématique, en posant qu'un événement n'ayant pour lui qu'une chance favorable contre une infinité de chances contraires ne peut se réaliser physiquement en un nombre fini d'épreuves, donc dans les conditions qui sont celles de l'expérience. Ce principe, qui n'est pas le produit d'une observation, mais d'une élaboration purement conceptuelle, excède donc le champ de la théorie mathématique pour statuer sur une existence ou une non-existence physique. Et Cournot illustre ce principe par une série d'exemples d'événements physiquement impossibles, tels que l'équilibre d'un cône pesant sur sa pointe, l'application d'une force à une sphère qui s'applique strictement à son centre de sorte que son mouvement de translation ne s'accompagne pas d'un mouvement de rotation, etc. Il montre ainsi que la théorie mathématique des probabilités n'est pas une pure construction intellectuelle, mais qu'elle a par elle-même, dit-il, une «valeur objective et phénoménale» (*Exposition*, § 43, p. 58).

Cependant, si le calcul des probabilités reçoit ainsi une valeur objective, c'est seulement de manière indirecte et négative. En effet, la mise en œuvre du principe de l'impossibilité physique n'implique pas que le concept de probabilité mesure la possibilité physique de réalisation d'un événement, mais il signifie que l'événement de probabilité infiniment petite doit être posé comme physiquement impossible. Si la probabilité a ainsi une valeur objective, c'est seulement au sens où la probabilité infiniment petite implique la non-existence de l'événement. C'est pourquoi, dans un second temps, Cournot mobilise le théorème de Bernoulli, affirmant la convergence probable des fréquences et des probabilités pour un nombre indéfiniment croissant d'épreuves, et l'applique au principe de l'impossibilité physique. Il pose alors qu'à la limite, c'est-à-dire pour une infinité d'épreuves, c'est la probabilité d'un écart sensible entre fréquence et probabilité qui devient infiniment petite, grâce à quoi l'apparition d'un tel écart peut être considéré comme physiquement impossible. La probabilité étant ainsi définie comme limite de fréquences, il est possible d'avancer qu'elle est la mesure de la possibilité physique de l'événement.

En associant les deux moments de l'analyse de Cournot, on peut donc reconnaître à la probabilité mathématique une valeur objective, mais à la condition de pouvoir affirmer le caractère fortuit de l'événement, c'est-à-dire à la condition de connaître les causes productrices de l'événement et d'être assuré de leur indépendance, condition rarement remplie et exigeant le concours de l'analyse statistique. En ce cas, le calcul des probabilités se constitue en théorie des chances, mesurant la possibilité physique des événements. Lorsque cette condition ne peut être satisfaite, la probabilité ne porte pas sur la possibilité de l'événement elle-même, mais sur les hypothèses que nous formons à son sujet. Elle n'a alors qu'une valeur subjective.

Il est essentiel pour Cournot d'avoir constamment à l'esprit cette distinction et de connaître précisément les conditions d'application de la théorie mathématique, afin de déterminer la signification, objective ou subjective, des résultats du calcul, et ne pas risquer de leur attribuer une valeur illusoire, qui prêterait alors le flanc aux sarcasmes de ceux qui demeurent imperméables au raisonnement probabiliste.

En définitive, on peut affirmer que, par la réflexion épistémologique qu'il déploie, Cournot occupe dans l'histoire de la théorie des probabilités une position charnière entre ce que Lorraine Daston a appelé la période classique de constitution du calcul au siècle des Lumières et la période post-laplacienne de construction de la théorie axiomatique. Cette situation n'est pas fortuite. En affirmant la pureté de la théorie mathématique, indépendante de ses applications et en reconnaissant par là la pluralité de ses interprétations possibles, il prépare les débats contemporains en philosophie des probabilités sur la signification du concept de probabilité. Cela tient en grande partie à l'orientation de sa réflexion philosophique. Héritier de Kant plus par les questions que par les réponses, Cournot assigne à la philosophie la tâche de démêler, dans nos représentations, ce qui provient de l'objet lui-même ou ce qui résulte de l'intervention du sujet. Mais, disciple de Leibniz, il s'efforce de découvrir dans le réel l'ordre permettant de rendre raison des relations entre les phénomènes. La question centrale que doit affronter la «critique philosophique» est, en effet, celle de la possibilité pour nos représentations de recevoir une valeur objective.

BIBLIOGRAPHIE

D'AMADOR, R. (1837): «Mémoire sur le calcul des probabiltiés appliqué à la médecine», Paris, *Académie royale de médecine*, tome I, n° 16, 25-4, pp. 622-680.

BERTILLON, L. A. (1876): «La théorie des moyennes en statistique», *Journal de la Société de Statistique de Paris*, n° 10, oct., pp. 265-271 et, n° 11, nov. 1876, pp. 286-308.

CARVALLO, E. (1912): *Le calcul des probabilités et ses applications*, Paris, Gauthier-Villars.

COMTE, A. (1830-1842): *Cours de philosophie positive*, Paris, Bachelier; réed. Paris, Hermann, 1975.

COUMET, E. (2003): «Auguste Comte. Le calcul des chances, aberration radicale de l'esprit mathématique», *Mathématiques et sciences humaines*, n° 162, pp. 9-17.

COURNOT, A. A. (1828): «De la théorie des probabilités considérée comme la matière d'un enseignement», *Le Lycée*, tome II, pp. 243-254.

____________, (1834): «Addition sur la distribution des orbites cométaires dans l'espace», in J. Herschel, *Traité d'astronomie,* Paris, Paulin, pp. 499-530.

____________, (1838): «Mémoire sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire», *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. III, pp. 257-334.

____________, (1843): *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris, Hachette; réed. Paris, Vrin, 1984.

____________, (1851): *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique,* Paris, Hachette; réed. Paris, Vrin, 1975.

____________, (1875): *Matérialisme, vitalisme, rationalisme*. *Études sur l'emploi des données de la science en philosophie,* Paris, Hachette; réed. Paris, Vrin, 1979.

DASTON, LORRAINE J. (1988): *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton, Princeton University Press.

DESTUTT DE TRACY, A. (1815): *Traité de la volonté et de ses effets*, Paris, Courcier; réed. Paris, Fayard, coll. Corpus, 1994.

FAURE, F. (1905): «Les idées de Cournot sur la statistique», *Revue de Métaphysique et de Morale*, n° 3, mai, pp. 395-411.

FRÉCHET, M. (1955): *Les mathématiques et le concret*, Paris, P.U.F.

GOURAUD, Ch. (1848): *Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours*, Paris, A. Durand.

KEYNES, J. M. (1921): *A Treatise on Probability*, London, MacMillan.

LAPLACE, P. S. (1825): *Essai philosophique sur les probabilités*; réed. Paris, Ch. Bourgeois, 1986, p. 32.

MARTIN, Th. (1996): *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*, Paris, Vrin.

________, (1998): *Bibliographie cournotienne,* Besançon, Annales Littéraires de l'Université de Franche-Comté.

POISSON, S. D. (1836): «Note sur le calcul des probabilités», *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. 2, Paris, pp. 395-400.

QUETELET, A. (1846): *Lettres à S.A.R. le duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha sur la théorie des probabilités appliquée aux sciences morales et politiques*, Bruxelles, M. Hazey.

ROYER-COLLARD, P. (1827): «Discours de réception à l'Académie française», *Institut Royal de France*, Paris, Firmin Didot, pp. 1-11.

SCHILLER, J. (1967): *Claude Bernard et les problèmes scientifiques de son temps*, Paris, Éditions du Cèdre.

CAPÍTULO 12

Los aportes de los Bernoulli a la Teoría de Probabilidades

CONCEPCIÓN VALDÉS CASTRO
Universidad de La Habana

La familia Bernoulli y su época

La época en que surge la dinastía matemática de los Bernoulli, siglos XVII-XVIII, está impregnada de un pensamiento humanista y renovador, así como de un increíble despotismo y violencia. En el plano económico, la historia de Europa se caracteriza por la batalla decisiva para el establecimiento del modo capitalista de producción. El ritmo de desarrollo de la ciencia en esta época aumenta rápidamente. La naciente revolución industrial, la formación de un mercado mundial y el aumento de la población provocan que la solución de problemas científico-técnicos e incluso simplemente científicos se conviertan en un asunto de importancia estatal.

Para estimular el creciente impacto social de la ciencia, en las ciudades mayores de Europa se crearon instituciones especiales para las investigaciones científicas, las Academias de Ciencias, subsidiadas por el Estado. Estas academias organizaron concursos y editaron publicaciones periódicas que además de dar a conocer los logros de sus asociados, servían para estimular la resolución de problemas de actualidad e importancia económica. Los Bernoulli participaron activamente en los concursos y desafíos y fueron aceptados como miembros en varias de las primeras

Academias de Ciencias de Europa como la de Berlín, la de París y la de San Petersburgo.

Aunque las universidades no brindaban una formación científica acorde con los tiempos, en la sociedad europea nació una élite de «hombres de ciencias», entre ellos muchos interesados en desarrollar los métodos y medios de las ciencias matemáticas. En relación con esto ocurre un aumento de los profesionales de procedencia burguesa. Tal es el caso de los Bernoulli, familia de comerciantes y farmacéuticos sin título nobiliario ni posesiones de latifundios de tierras. Los Bernoulli trabajaron fundamentalmente en la Universidad de Basilea, donde por más de un siglo ocuparon la Cátedra de Matemáticas, pero también ganaron, en distintos períodos, las Cátedras de Física, Fisiología, Anatomía, Oratoria, Lógica y Derecho. La existencia de pocas cátedras y demasiados aspirantes llevó a los miembros de la familia a emigrar en diferentes momentos.

De los ocho integrantes de la familia Bernoulli, tres dejaron su huella en la primera parte del largo camino hacia la estructuración de la Teoría Matemática de las Probabilidades.

Con Jacob Bernoulli I. (1654-1705) se inicia la verdadera historia matemática del cálculo de probabilidades. Su obra *Ars conjectandi* comienza con el perfeccionamiento y la recapitulación de los métodos existentes para la resolución de problemas relacionados con el azar. Pero su aporte más significativo se encuentra en la cuarta parte de este trabajo, donde se coloca la primera piedra del futuro edificio de la Teoría de Probabilidades: la Ley de los Grandes Números en su forma más simple.

A Nicolaus Bernoulli I. (1687-1759), debemos una serie de problemas relacionados con el azar, novedosos y sumamente controvertidos. Además, Nicolaus I fue el inspirador de la famosa Paradoja de San Petersburgo.

Será Daniel Bernoulli I. (1700-1782) quien abrirá, en la ciencia del azar, la brecha por donde penetrarán los métodos del nuevo cálculo. El análisis infinitesimal transmitirá al arte de las conjeturas una fuerza insospechada que le permitirá enfrentar con ventaja los enigmas y paradojas más fascinantes de su época.

Los aportes de Jacob Bernoulli

Jacob es el primero de la familia Bernoulli en estudiar en una universidad, el primero en investigar en las ciencias matemáticas y el primero en recibir un título de doctor. A los 22 años recibió el título de Doctor en Teología y dominaba varios idiomas, sin embargo su verdadera pasión eran las matemáticas. Se preparó en esta disciplina de forma autodidacta y fue catedrático de Matemáticas en la Universidad de Basilea desde 1686 hasta su muerte. Según consta en su diario, mantuvo un serio interés por las probabilidades durante los 20 últimos años de su vida.

Los primeros problemas que hoy asociaríamos al cálculo de probabilidades son bastante antiguos. Uno que data al menos del siglo XV, cuando aparece en la obra de Lucas Pacioli, y que va a jugar un papel decisivo, es el problema conocido como «de la repartición equitativa de la apuesta»: se realiza un cierto juego hasta 60 puntos y se hace una apuesta de 22 ducados. En razón de ciertas circunstancias, el juego no puede ser terminado y la apuesta debe ser repartida. En el momento de la suspensión, uno de los jugadores ha alcanzado la cifra de 50 puntos y el otro la de 30. ¿Qué parte de la apuesta debe recibir cada contrincante? Se dieron muchas «soluciones» todas puramente aritméticas y que, en su momento, fueron duramente criticadas.

La primera solución correcta a éste y a otros problemas relacionados con el concepto de probabilidad va a aparecer en el conocido intercambio epistolar entre Pascal y Fermat, en el cual muchos sitúan el origen de la ciencia de la probabilidad. Sin embargo, ambos correspondientes sólo se limitaron a calcular el número de casos posibles y favorables al suceso en cuestión; éste es, indudablemente, un paso importante para la aparición del concepto de probabilidad, pero aún no constituye ciencia.

En 1655 el holandés Christiaan Huygens conoció en París los problemas sobre los que trataba la correspondencia entre Pascal y Fermat y se propuso resolverlos por sí mismo. Como resultado de su esfuerzo, surgió el trabajo *De ratiociniis in ludo aleae* (De los razonamientos en los juegos de azar), publicado en 1657. Fue la primera obra escrita relacionada con el cálculo de probabilidades y va a ejercer una influencia decisiva en las inquietudes probabilísticas de Jacob Bernoulli.

Hasta la aparición del libro de Bernoulli, esta obra de Huygens era la única guía sobre el tema y tuvo amplia difusión e influencia en sus contemporáneos. En ella Huygens de hecho introduce el concepto de «esperanza matemática» como una generalización de la media aritmética. En esta época, la media aritmética era muy utilizada en el comercio y la industria para el cálculo de los precios medios, las ganancias medias, etcétera. Para Huygens la esperanza matemática no era una abstracción, sino una suma de dinero concreta: el precio medio de la oportunidad de ganar. Sin embargo, Huygens proféticamente observó que el estudio de los juegos de azar son el «fundamento de una especulación fuertemente interesante y profunda».

Jacob Bernoulli, después de investigar los problemas relacionados con la probabilidad durante los últimos 20 años de su vida, se trazó dos objetivos: escribir un tratado que sirviera de manual sobre esta nueva rama de las matemáticas y encontrar aplicaciones más sustanciosas que los juegos de azar. Sin embargo, Bernoulli murió antes de poder concretar la segunda parte, de modo que su obra más importante, *Ars conjectandi*, estaba incompleta. Se publicará de forma inacabada en 1713, 8 años después de la muerte de su autor, por su sobrino Nicolaus I. Bernoulli quien se encargará de la edición.

A pesar de estar inconclusa, el *Ars conjectandi* es considerada una obra significativa en Teoría de Probabilidades. Las tres primeras partes pueden ser vistas como la culminación de una primera etapa «prehistórica» en el desarrollo de la ciencia del azar. En la cuarta parte de su obra, Bernoulli rompe radicalmente con la metodología tradicional y realiza consideraciones «infinitesimales» en el cálculo de probabilidades cuando enuncia y demuestra el Teorema Límite.

La primera parte del *Ars conjectandi* se titula *Apuntes sobre los posibles cálculos en los juegos de azar de Christiaan Huygens con notas de Jacob Bernoulli*. Aquí Bernoulli reproduce el tratado de Huygens al que añade sustanciosos comentarios, ya que estima que la comprensión adecuada de estas primeras proposiciones resulta esencial para entender toda la obra.

La primera proposición es: «Si tengo iguales posibilidades de obtener a y b, entonces esto me vale $(a + b)/2$» a la cual añade el ejemplo ilustrativo:

> *Supongamos que alguien oculta en una mano 3 monedas y en la otra 7. Dos personas indican cada una a diferentes manos y obtienen las monedas correspondientes a la mano señalada. Ambos obtendrán conjuntamente 10 monedas. Cada uno tuvo idéntico derecho al señalar las manos, así que la esperanza conjunta debe ser dividida a la mitad, es decir, que la esperanza de cada uno es obtener 5 monedas.*

Considera también la situación más general:

> *Si el número de casos en los cuales se obtiene la suma* a *es igual a* p *y el número en los que ocurre la suma* b *es* q *y todos los casos pueden producirse igualmente, entonces el valor de la esperanza es* $\dfrac{pa + qb}{p + q}$.

Para justificar esta proposición Bernoulli considera que se tienen $p + q$ urnas y un número igual de jugadores. En una cantidad p de urnas se coloca la suma a y en cada una de las restantes q la suma b. Cada jugador obtiene una de las urnas. Todos en conjunto obtendrán todas las urnas, esto es, un total de $pa + qb$. Como los jugadores están en igualdad de condiciones, la esperanza de todos será la misma, y se obtiene la expresión de Huygens.

Bernoulli tiene razón cuando adjudica a estas proposiciones una importancia capital, ya que señalan el comienzo de la elaboración de los primeros métodos específicos relacionados con la ciencia probabilística: el Método de la Esperanza Matemática.

A continuación comienza el análisis de los problemas relacionados con la repartición equitativa de las apuestas. Bernoulli llama la atención acerca de que, en tales problemas, es necesario tener en cuenta, para los cálculos, sólo las partidas que están obligados a ganar cada uno de los jugadores para poder ganar el juego, y no tienen ninguna influencia el resultado de las partidas que ya transcurrieron. Después de un análisis detallado, concluye que cuando se tiene una apuesta de a unidades y al primer jugador le falta 1 partida y al segundo 2, la repartición equitativa (es decir, tomando en cuenta los posibles resultados si el juego hubiera continuado) es en la proporción 3:1, esto es, $3a/4$ para el primero y $a/4$ para el segundo. Si al primero le falta 1 y al segundo 3 partidas, entonces el primero debe recibir $7a/8$ y el segundo $a/8$; si fueran 4 las partidas necesarias al segundo, entonces el primero deberá recibir $15a/16$ y así sucesivamente. De donde obtiene la conclusión general: «si a mí me falta 1 partida y a mi oponente le faltan n, entonces mi parte de la apuesta y la de él deben relacionarse en la proporción de $(2^n - 1):1$».

Señalemos la forma tan original que Bernoulli propone para aclarar la imposibilidad de aplicar el Teorema de la Suma de Probabilidades cuando los sucesos son compatibles. Para ello pone el ejemplo:

> *Si a dos individuos que merecen la pena de muerte se les indica que tiren los dados, con la condición de que aquél que obtenga menos puntos mantiene la pena y el otro, que obtuvo más puntos, conserva su vida y ambos conservan la vida, si obtienen el mismo número de puntos, entonces encontramos para la esperanza de uno 7/12..., pero de esto no debe concluirse que la esperanza del otro sea 5/12, ya que evidentemente ambas son iguales, luego el otro también debe esperar 7/12 de vida, lo que da para los dos 7/6 de vida, o sea más de una vida. La causa radica en que no hay ningún caso en que los dos deban morir y sí hay varios casos en que ambos pueden quedar vivos*.

En una nota, Bernoulli generaliza el problema de la repartición de las apuestas al caso en que los dos jugadores no tienen iguales posibilidades de ganar. Así llega a lo que se conoce como Fórmula de Bernoulli o también Distribución Binomial: Si en una serie de $a + b$ pruebas independientes las posibilidades de éxito son a mientras que las de fallo son b, entonces la probabilidad de r éxitos en n de las pruebas es el cociente de $\binom{n}{n-r} a^r b^{n-r}$ sobre $(a + b)^n$.

En toda esta etapa inicial del desarrollo del análisis de problemas relacionados con los fenómenos aleatorios resultaba indispensable el uso de los cálculos combinatorios, lo que tuvo como consecuencia el desarrollo del arte de la combinatoria, como lo llamó Leibniz. Más aún, la creciente potencialidad de los cálculos combinatorios ejerció influencia en la formación del concepto de probabilidad, pues el disponer de métodos combinatorios sutiles permitió un análisis de problemas más interesantes relacionados con el azar.

Las tres primeras partes del *Ars conjectandi* están dedicadas a exponer los principios para el análisis de los fenómenos donde interviene el azar y en él se resuelven de forma novedosa una serie de problemas «estándar» para la Teoría de

Probabilidades. Estas partes constituyen un aporte esencial no sólo a esta teoría sino a la matemática en general. Sin embargo, la parte fundamental del *Ars conjectandi* es la cuarta y última que Bernoulli titula *Applicationes doctrinae in civilibus, moralibus et oeconomicis* (Aplicación de la doctrina a cuestiones civiles, morales y económicas). El objetivo de esta parte es resolver problemas no vinculados con los juegos de azar, más concretamente, a problemas de tipo económico y social. Es ampliamente reconocida la gran cantidad de aplicaciones que ha encontrado en nuestros días la Teoría de Probabilidades, tanto en las ciencias naturales y sociales como en la tecnología. Sin embargo, en el siglo XVIII resultaba difícil hacer un uso efectivo de las probabilidades en áreas de la actividad humana que no estuvieran relacionadas con los juegos de azar. La mayoría de las aplicaciones de los cálculos con probabilidades que se realizan actualmente están relacionados con la definición estadística de probabilidad. Esta noción aparece en forma embrionaria en esta parte del *Ars conjectandi* y está sustentada por la conocida como Ley de los Grandes Números (así sería llamada posteriormente por Poisson).

Esta cuarta parte la comienza Bernoulli con algunas consideraciones, de tipo filosófico, relacionadas con el azar. Su punto de vista era el denominado determinista y que más tarde se daría en llamar laplaciano (asociándolo así a la figura de Laplace):

> *Es totalmente indudable que dada una posición de los dados, la velocidad y la distancia a la mesa en el momento en que se lanzan, éstos no pueden caer de otra forma que en la que en efecto lo hacen*. (citado en [7])

Más adelante define lo que entiende por el arte de las conjeturas y lo relaciona con la probabilidad:

> Ars conjectandi *se define como el arte de medir lo más exacto posible la probabilidad de las cosas, para que en nuestros juicios o acciones podamos siempre elegir o seguir lo que será encontrado como lo mejor, más satisfactorio, moderado y razonable. En esta unidad se resume toda la sabiduría del filósofo y la prudencia del político.* (véase [7])

A continuación Bernoulli explica por qué es difícil aplicar los cálculos con probabilidades a fenómenos que sean diferentes de los juegos de azar. Comenta que, cuando pueden contarse el número de casos y la frecuencia con que éstos aparecen en las pruebas, entonces es posible calcular la «fuerza demostrativa» de estas pruebas y la probabilidad correspondiente. Pero aparecen nuevas dificultades y aclara muy acertadamente:

> *Aquí encontramos un obstáculo, ya que sólo excepcionalmente es posible hacer esto y casi nunca se logra, excepto en los juegos que dependen del azar, los cuales, desde un inicio, los inventores se esforzaron por hacerlos equitativos, ellos fueron construidos de modo tal que es totalmente conocido el número de*

casos que conducen a ganar o a perder y ambos tipos de situaciones pueden encontrarse igual de fácil. En la mayoría de los fenómenos, que dependen o bien de la acción de las fuerzas naturales o bien de la voluntad libre de las personas no tiene lugar ni lo uno ni lo otro... (citado en [7])

Bernoulli comenta que «en estos casos tenemos otro camino, y aquello que no es posible obtener *a priori* puede, al menos, obtenerse *a posteriori*, esto es, por múltiples observaciones de los resultados en ejemplos semejantes... Para tales razonamientos se necesita gran cantidad de observaciones... Aunque esto, naturalmente, es conocido de todos, la demostración construida sobre fundamentos científicos, en general, no es tan frecuente, por esto necesitamos exponerla. Precisamente se trata de investigar si, ante tal aumento del número de las observaciones, la probabilidad alcanzará realmente la relación entre el número de los casos bajo los cuales un cierto suceso puede ocurrir o no ocurrir..., es decir, si el problema tiene su asintótica...»

En el párrafo anterior podemos reconocer la definición de probabilidad a través de las observaciones estadísticas, la que actualmente se conoce como «definición estadística de probabilidad».

Supongamos que se observa repetidamente una cierta experiencia, en cada repetición, el suceso de nuestro interés tiene una probabilidad p (desconocida) de ocurrir. Se quiere estimar p a partir de las observaciones. Enunciemos el Teorema de Bernoulli con una forma más contemporánea, pero tratando de conservar la esencia dada por su autor:

Sea X el número de éxitos en N observaciones, ε y C números positivos, entonces puede encontrarse un valor de N (posiblemente muy grande) que depende de C, tal que

$$P\left(\left|\frac{X}{N}-p\right|\le\varepsilon\right)>C\cdot P\left(\left|\frac{X}{N}-p\right|>\varepsilon\right).$$

De la desigualdad anterior podemos fácilmente concluir que

$$\text{lím}\, P\left(\left|\frac{X}{N}-p\right|>\varepsilon\right)=0.$$

Bernoulli realiza su demostración usando el desarrollo de la potencia de un binomio en forma totalmente correcta, aunque sumamente enrevesada. Además encontró un estimado del valor de N que es necesario tomar para satisfacer la desigualdad del teorema. Este estimado era bastante burdo y por ello las comprobaciones prácticas que realizó lo llevaron a notar que el número real de experimentos necesarios era mucho menor que el proporcionado por su estimado. Tal vez esto hizo que no confiara demasiado en el resultado obtenido y fuera una de las razones por las que nunca se decidió a publicar sus investigaciones.

Su sobrino Nicolaus I. mejoró la estimación, pero el primer resultado realmente importante en esta dirección es el que obtuvo en 1733 Abraham De Moivre. De Moivre evaluó cuidadosamente el número de pruebas necesarias mediante un desarrollo en serie de la integral de la función que actualmente se conoce como «densidad normal». Actualmente este resultado se interpreta en términos de aproximación de la distribución binomial por la distribución normal, sin embargo el objetivo perseguido por De Moivre fue simplemente mejorar la forma en que Bernoulli estimó el número de ensayos necesarios para asegurar que la frecuencia observada se aproxime a la probabilidad buscada.

Posteriormente durante todo el siglo XVIII y parte del XIX se realizaron numerosos ensayos para verificar experimentalmente el Teorema de Bernoulli, en especial con el lanzamiento de una moneda. Por ejemplo, en 1777 el naturalista francés G. L. Buffon realizó un experimento con el lanzamiento de una moneda. De un total de 4.040 tiradas, escudo salió en 2.048 ocasiones y cara en 1.992. De modo que obtuvo una frecuencia de 0,507 para escudo y 0,493 para cara, las cuales están suficientemente próxima a 0,5.

El trabajo de Jacob Bernoulli abrió para la Teoría de Probabilidades un nuevo camino de desarrollo y la convirtió en una disciplina científica que utilizaba profusamente los métodos matemáticos, con una temática relacionada con aquellos fenómenos que dependen de la influencia de factores casuales y cuyas leyes pueden ser detectadas a través de observaciones reiteradas.

B. V. Gnedenko y A. N. Kolmogórov en su obra [4] sobre los teoremas límites destacaron el papel decisivo que éstos representan para la Teoría de Probabilidades:

> *En una construcción formal de un curso de Teoría de Probabilidades, los teoremas límites se presentan como una clase de superestructura sobre los capítulos elementales, en los cuales todos los problemas tienen un carácter finito, puramente aritmético. Sin embargo, ...sin los teoremas límites es imposible comprender el contenido real del concepto primario de nuestra ciencia, el concepto de probabilidad. En efecto, todo el valor epistemológico de la Teoría de Probabilidades está basado sobre esto: que los fenómenos aleatorios masivos en su acción colectiva crean una regularidad estrictamente no aleatoria.*

Éste es un argumento convincente a favor de la afirmación de que la verdadera historia de la Teoría de Probabilidades comienza con el primer teorema límite aparecido en el *Ars conjectandi* de Jacob Bernoulli.

Los aportes de Nicolaus I. Bernoulli

Nicolaus I. Bernoulli estudió matemáticas bajo la supervisión directa de su tío Jacob. No sólo se ocupó de editar la obra cumbre de su tío, sino que personalmente trabajó seriamente en el cálculo de probabilidades. En 1709 defendió su tesis para la obtención del grado de Licenciado en Derecho con el título *Sobre la aplicación del arte de la conjetura a problemas del Derecho*.

Un problema interesante que Nicolaus I. trata en su tesis es cuándo puede darse legalmente por muerto a un individuo que se ausenta largo tiempo de su ciudad natal. Nicolaus I. escribe que debe considerarse al ausente muerto cuando la probabilidad de que haya fallecido sea el doble de la probabilidad de que aún esté vivo. Además añade que esto ocurrirá cuando hayan transcurrido tantos años como para que, del número de personas de la misma edad que el ausente, la cantidad de los muertos supere en el doble a la cantidad de las personas que quedan vivas. Y propone un ejemplo concreto:

> *Un joven de 20 años abandona el país sin tenerse noticia alguna de él. Según las tablas de mortalidad encontramos que sólo 1/3 de los individuos de 20 años alcanzan los 58 años y 2/3 mueren antes de esa edad, entonces después de 38 años de su partida a este individuo puede considerársele muerto*.

Nicolaus I. Bernoulli publicó muy poco y seleccionó estrictamente aquéllos de sus trabajos que podrían darse a conocer, destruyendo los restante. De esta forma resulta bastante difícil el conocimiento y valoración de su obra matemática. Una parte de sus ideas acerca de las probabilidades ha llegado hasta nosotros a través de la correspondencia que mantuvo con Pierre Rémond de Montmort y que éste publicó en la segunda edición de su *Ensayo sobre los juegos de azar*. Aquí aparecen comentados algunos problemas importantes de la Teoría de Probabilidades, entre ellos el problema que más tarde se le daría el nombre de Paradoja de San Petersburgo. La formulación original de esta paradoja es parte de una colección de cinco problemas que se encuentran en una carta escrita en 1713.

En el cuarto problema de la colección, N. Bernoulli propone encontrar la cantidad que B debe pagar para que resulte equitativo el siguiente juego: A da a B una moneda si obtiene un 6 al tirar un dado la primera vez, dos monedas si el 6 lo obtiene en la segunda tirada, tres si en la tercera y así sucesivamente. Se consideraba que el juego era equitativo si el jugador aportaba la cantidad que esperaba ganar, es decir, la esperanza matemática de su ganancia. Fácilmente se calcula que la esperanza de B es 6. Así que el jugador debe abonar la razonable cantidad de 6 monedas para que este juego sea equitativo.

El quinto problema trataba sobre el mismo juego, pero ahora las cantidades que B recibe son respectivamente 2, 2^2, 2^3,... En este caso la esperanza da un valor infinito y entonces, para que el juego fuera «justo», B debería pagar una «suma infinita», suma que está seguro de perder, ya que, como comenta Bernoulli, «es moralmente imposible que él no obtenga un 6 antes de un número finito de tiradas».

J. Bernoulli había sugerido que un suceso con una probabilidad muy baja (por ejemplo, 1/1.000) era moralmente imposible. Basado en esta idea, N. Bernoulli propuso no tener en cuenta las probabilidades muy bajas, moralmente imposibles, inclusive cuando ellas conllevan a ganancias enormes. Sin embargo, como no estaba satisfecho con su solución, le propuso a su amigo Gabriel Cramer el quinto problema y es a este último a quien se debe la formulación definitiva de la paradoja, así como dos variantes de solución.

Cramer sustituyó el juego de dados por el del lanzamiento de una moneda y mantuvo la forma de pago de 2^{n-1} monedas en caso que cara aparezca por vez primera en la tirada n-ésima. Con esta formulación, la serie que conduce a la esperanza se simplifica.

Cramer trata de explicar esta paradoja por la diferencia entre el valor matemático y el valor moral del dinero: «los matemáticos valoran el dinero en proporción a su cantidad, el sentido común del hombre en proporción a su uso». De esta forma propone la sustitución de la esperanza matemática por otras cantidades que relaciona con el sentido común e introduce para ello la terminología de «esperanza moral».

Sin embargo, Nicolaus Bernoulli no quedó satisfecho con la solución de Cramer y se dirigió a su primo Daniel Bernoulli. Aunque D. Bernoulli inicialmente no prestó gran atención al asunto, después lo investigó profundamente, resultando así un trabajo que comunicó a la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Ésta es la razón de por qué se conoce al quinto problema de Nicolaus I. como la Paradoja de San Petersburgo.

Los aportes de Daniel Bernoulli

Daniel Bernoulli se doctoró en medicina en 1721, en la Universidad de Basilea, pero según escribió en su autobiografía, de esa época data su interés por las matemáticas. D. Bernoulli realizó numerosos aportes en las ciencias físico-matemáticas. En relación con las probabilidades sus trabajos están encaminados a las aplicaciones prácticas y a la interpretación de los cálculos probabilísticos.

En sus reflexiones sobre la Paradoja de San Petersburgo, Daniel Bernoulli considera que el concepto de esperanza matemática está basado en la suposición de que todos los individuos «esperan» lo mismo de un determinado juego, pero que este razonamiento no es correcto. Por ello introduce un nuevo tipo de magnitud que denomina, siguiendo la terminología de Cramer, «esperanza moral» sobre la que basa todas sus deducciones.

Daniel Bernoulli considera que la esperanza matemática se basa en la suposición de que todos los individuos «esperan» lo mismo de un determinado juego, pero que este razonamiento no es correcto. Según su punto de vista las expectativas de cada uno dependen del capital que posee y plantea un ejemplo. Supongamos que a una persona que nada tiene se le propone la posibilidad de con igual probabilidad obtener veinte mil ducados o no recibir nada. En este caso su esperanza sería de diez mil ducados. Daniel considera totalmente razonable que este individuo venda su derecho en algo menos que su esperanza, digamos nueve mil ducados. Sin embargo, un individuo muy rico iría contra sus intereses realizando semejante venta.

Daniel desarrolla esta idea y así introduce la definición de esperanza moral. Supongamos que un individuo posee un capital inicial α y tiene posibilidades de ganar las cantidades $c_1, c_2, c_3, ..., c_m$ con probabilidades respectivas $p_1, p_2, p_3, ..., p_m$. Entonces a esta situación corresponderá una esperanza moral dada por la expresión

$$(c_1+\alpha)^{p_1}\,(c_2+\alpha)^{p_2}\cdots(c_m+\alpha)^{p_m}-\alpha.$$

Daniel utiliza el concepto de esperanza moral para argumentar su posición en contra de los juegos de azar. En este sentido señala que, incluso los juegos de azar considerados equitativos, es decir, donde la esperanza matemática es cero, no resultan favorables al jugador, por muy rico que éste sea. Por ejemplo, supongamos que un individuo tiene una fortuna de a monedas y juega un juego donde gana una moneda con probabilidad 1/2 y pierde una moneda con la misma probabilidad. En este caso la esperanza matemática será evidentemente cero, sin embargo, la esperanza moral será igual a

$$(a+1)^{1/2}\,(a-1)^{1/2}-a$$

cantidad que evidentemente es negativa cualquiera sea el capital inicial a.

Los problemas acerca de la esperanza moral fueron muy populares durante todo el siglo XVIII e incluso en el siglo XIX. Una muestra de la importancia brindada en la época a este concepto es el hecho de que Laplace en su obra cumbre *Teoría analítica de las Probabilidades* la considera entre los diez principios generales. Sin embargo, éste es un concepto al cual no se le encontró un verdadero interés teórico o práctico y ha caído en el olvido de los matemáticos.

En la última parte del *Ars conjectandi*, Jacob Bernoulli utilizó la idea de límite como una aproximación, otros contemporáneos también trataron, mediante aproximaciones, problemas de la Teoría de Probabilidades, pero va a ser Daniel Bernoulli quien introduce de forma sistemática los métodos del análisis infinitesimal en la Teoría de Probabilidades. Y éste será su principal aporte a esta rama de las matemáticas.

La resolución de problemas relacionados con las probabilidades mediante la aplicación de los métodos combinatorios clásicos conduce, generalmente, a cálculos sumamente complicados. Daniel Bernoulli propuso resolver estos problemas mediante la aplicación del cálculo diferencial. Este método permitió encontrar expresiones asintóticas para valores grandes de los parámetros considerados en el problema.

La idea principal que lo guió fue del siguiente tipo: cuando en una urna hay una cantidad muy grande de tarjetas, la alteración producida en esta cantidad por la extracción de una tarjeta puede considerarse infinitamente pequeña. Para mostrar la eficacia de su método, D. Bernoulli resuelve el problema:

> *Supongamos que en una urna se colocan tarjetas en parejas, cada pareja está marcada por el mismo número, y diferentes parejas se marcan con números diferentes. Se extraen de la urna al azar una tarjeta tras otra y, al cabo de cierto número de extracciones, se pregunta ¿cuántas parejas permanecerán intactas dentro de la urna y cuántas habrán sido desechas?*

Inicialmente, Bernoulli da la solución habitual para su época, utilizando los métodos combinatorios, que en este problema resultan bastante laboriosos, y llega a la conclusión: si n denota el número inicial de parejas en la urna y r la cantidad de tarjetas que permanecen en ella después de $2n - r$ extracciones, entonces el número x de parejas que se mantienen intactas viene dado por $x = r(r - 1)/(4n - 2)$. Señalemos que es usual en la obra de Bernoulli identificar el valor de cierta variable con el de su esperanza matemática. Así que en realidad x representa la esperanza matemática del número de parejas completas que se conservan en la urna.

Acto seguido observa que si la cantidad n de parejas iniciales y el número r de tarjetas que aún permanecen son grandes, entonces se puede considerar $x = r^2/4n$. A continuación muestra cómo esta última igualdad puede obtenerse de forma mucho más sencilla con la ayuda del análisis de los infinitesimales.

Supongamos que la cantidad inicial n de parejas es muy grande y que, en determinado momento, el número r de tarjetas que quedan en la urna es también grande. Después de una extracción, r disminuye en una unidad, la cual toma como dr. Luego de realizada la extracción, la cantidad x de parejas puede permanecer igual o también disminuir en una unidad, que de forma análoga denota por dx. Entonces concluye que dx puede ser cero o puede ser igual a dr, esto último con probabilidad $2x/r$. Así que, según Bernoulli $dx = 2x \cdot dr/r$. Teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son $r = 2n$ y $x = n$, obtiene $x = r^2/4n$.

En un trabajo posterior propone la determinación de la duración media de los matrimonios. Éste era un problema realmente difícil en esa época, pues no existían datos estadísticos acerca de su duración real. Así que decide utilizar los resultados del tipo anterior para realizar los cálculos correspondientes. Para ello simplifica el problema estableciendo varias consideraciones: 1) los matrimonios se terminan sólo con la muerte de uno de los cónyuges, 2) la edad de ambos cónyuges en el momento del matrimonio es 20 años y 3) la duración media de la vida de los hombres y las mujeres es la misma. Este problema, así simplificado, coincide plenamente con el de la extracción de las tarjetas colocadas en pareja en la urna. Posteriormente, Daniel va a considerar otros casos modificando las suposiciones 2) y 3).

A fines del siglo XVIII, Daniel Bernoulli se va a interesar por el problema del análisis de los errores en las observaciones y desarrolla algunas ideas importantes. En particular, clasifica los errores en: aleatorios, lo que para él significaba normalmente distribuidos y sistemáticos, esto es, constantes.

En esa época era común considerar el promedio de las observaciones realizadas como el mejor valor de la magnitud medida. Sin embargo, para ello frecuentemente era necesario eliminar previamente aquellos valores que se desviaban mucho de la masa fundamental de observaciones. Bernoulli indicó la insuficiencia de tal razonamiento, ya que estas observaciones que se excluyen no sólo son factibles, sino que podrían estar dentro de las mejores opciones. Por ello aconseja no desechar ninguna observación, y sí utilizar un método diferente a la media aritmética.

Sugiere buscar una curva que represente la distribución de los errores aleatorios, a la cual exige cinco condiciones: 1) sus ordenadas deben ser decrecientes a ambos lados del centro, 2) la curva debe ser simétrica, 3) la tangente en el punto central de la curva debe ser paralela al eje de las abscisas, 4) en los puntos muy alejados del centro la ordenada de la curva debe ser cero y 5) la tangente a la curva en los puntos de intersección con el eje de abscisa debe ser vertical. Estas condiciones lo motivan a tomar como curva de distribución una semicircunferencia de ecuación $y = \sqrt{r^2 - (x - \overline{x})^2}$, donde r es el límite de las posibles magnitudes de los errores aleatorios y el centro $\overline{x}$ el lugar de mayor densidad de las observaciones. En los siguientes razonamientos de Bernoulli ocupa un lugar importante la discusión acerca de cuál debe ser el centro $\overline{x}$ de tal curva. Considera que la media aritmética es correcto aplicarla si todos los errores fueran igualmente probables, pero en la práctica esto no siempre ocurre así. De modo que propone un método para encontrar $\overline{x}$. Si los valores de las observaciones son 0, a, b, ..., entonces $\overline{x}$ es el valor que maximiza la función de verosimilitud

$$(r^2 - x^2)[(r^2 - (x-a)^2)][(r^2 - (x-b)^2)]\cdots$$

Bernoulli eliminó el radical con el fin de facilitar las manipulaciones algebraicas por lo que, de hecho, está considerando una parábola en lugar de una semicircunferencia. Esta idea de utilizar una semicircunferencia o una parábola no permaneció en la ciencia, pues resultaba demasiado complicada para los cálculos, pero ejerció sin duda influencia en sus sucesores, en particular, en Gauss cuando idea el Método de los Mínimos Cuadrados.

Con la obra de los Bernoulli y sus contemporáneos se dieron los primeros pasos en la formación de una nueva rama de las matemáticas, la Teoría de Probabilidades, y además comenzaron a vislumbrarse sus posibilidades de uso en diferentes ramas de la actividad humana. El desarrollo posterior de esta teoría y sobre todo la expansión del caudal de sus aplicaciones, no siempre válidas, hicieron surgir absurdos, contradicciones y paradojas que mostraron numerosas lagunas en sus fundamentos.

Esta situación de crisis conducirá a la formación de la Teoría axiomática de las Probabilidades más de 200 años después de publicado el *Ars conjectandi* de Jacob Bernoulli.

BIBLIOGRAFÍA

BERNHARDT, H. (1989): La familia de matemáticos Bernoulli. En *Biografías de grandes matemáticos*. H. Wussing & W. Arnold. Prensas Universitarias de Zaragoza.

DASTON, L. (1995): *Classical Probability in the Enlightenment*, Princenton Univ. Press

GIGERENZER et al. (1990): *The Empire of Chance: How Probability Changed Science and Everyday Life*, Cambridge Univ. Press.

GNEDENKO, B. V. y KOLMOGOROV, A. N. (1954): *Limits Distributions for Sums of Independent Random Variables*.

GRIGORIAN, A. T. y KOVALIOV, B. D. (1981): *Daniel Bernoulli*. Moscú (en ruso).

MAISTROV, L. E. (1974): *Probability Theory: A Historical Sketch*, Academic Press.

MATHÚNA, D. Ó. (2000): *The Bernoulli Project*. Dungaldan Press. Dundalk, Ireland.

NIKIFOROVSKII, V. A. (1984): *Los grandes matemáticos Bernoulli*. Moscú (en ruso).

CAPÍTULO 13

V. Pareto, G. Sorel et les ambigüités dans la comparaison des inégalités

Marc Barbut
Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales, E.H.E.S.S.

1896-1897, les deux protagonistes

Vilfredo Pareto (1848-1923), après des études scientifiques et techniques, est ingénieur dans l'industrie ferroviaire en Italie jusqu'en 1893.

À cette date, il commence une carrière académique à l'Université de Lausanne, où il succède à Léon Walras dans sa chaire d'économie politique, et où il enseigne non seulement l'économie mais bientôt également la sociologie.

Ses trois ouvrages majeurs:

- Cours d'économie politique (1896)
- Manuale di Economia Politica (1906)
- Trattato di Sociologia Generale (1916)

Georges Sorel (1847-1922), son aîné d'un an à peine, commence lui aussi par des études scientifiques (École Polytechnique de Paris), puis est ingénieur des Ponts et Chaussées, jusqu'en 1892.

À cette date, c'est-à-dire au même âge que Pareto en 1893, il devient publiciste et essayiste, se consacre lui aussi à l'économie et à la sociologie, mais en dehors de toute institution universitaire.

Ses trois principaux ouvrages:

- Introduction à l'économie moderne (1903)
- Réflexions sur la violence (1908)
- Matériaux pour une théorie du prolétariat (1919)

Deux destinées, on le voit, à la fois parallèles et divergentes. Et radicalement opposées sur le plan des idées: le premier (Pareto) est un économiste résolument libéral; le second (Sorel) s'engage dans un socialisme militant.

La loi de Pareto pour la distribution des revenus

En 1896, V. Pareto publie, notamment dans son *Cours d'Économie Politique*, la loi qu'il a découverte empiriquement pour la répartition des revenus et des richesses.

La formulation générale en est, pour la proportion $P(x)$ des revenus supérieurs ou égaux à chaque valeur x:

$$(1) \qquad P(x) = \left(\frac{x_0 + c}{x + c}\right)^{\alpha}, \qquad \text{avec} \quad x \cdot x_0 > -c \quad \text{et} \quad \alpha > 0$$

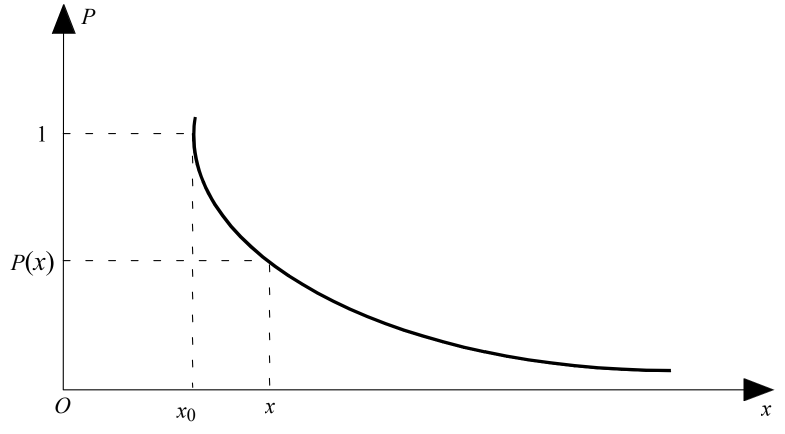
En pratique, les estimations le donnent toujours, pour les revenus:

$$\alpha > 1$$

Une formulation simplifiée, valable pour les grandes valeurs de x, et que nous considérerons seule dans la suite est:

$$(2) \qquad P(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, \qquad \text{avec} \quad x \cdot x_0 > 0, \quad \text{et} \quad \alpha > 1$$

La courbe représentative en est figurée ci-dessous:



En raison de cette forme, Pareto parlera de «toupie» des revenus (il aurait aussi bien pu dire «pyramide», comme pour la «pyramide des âges»).

La grande importance de la loi de Pareto pour la statistique et son histoire résulte de deux faits:

- Elle est empiriquement vérifiée, on s'en est aperçu tout au long du 20^{e} siècle, pour une multitude de phénomènes relevant les uns des sciences sociales, les autres des sciences naturelles (répartition de la population des agglomérations urbaines, fréquence des mots dans des textes assez longs, surface des lacs, longueur des rivières, etc.); récemment, on lui a trouvé des applications en mathématiques financières;
- Cette universalité (au moins aussi grande que celle de la «loi normale») résulte notamment du fait qu'il s'agit d'une loi relevant, pour $\alpha < 2$ du domaine d'attraction des «lois stables» de Paul Levy, en calcul des probabilités.

Bien entendu, comme toujours en statistique, elle n'est qu'approximativement vérifiée par les données empiriques.

Ajoutons que de nos jours, contrairement à ce qui était le cas au 19e siècle et au début du 20^{e}, la distribution des revenus, contrairement à celle de beaucoup d'autres grandeurs, ne relève plus de cette loi.

La diminution de l'inégalité selon Pareto (1896)

Avec quelques hésitations, et non sans quelques contradictions, Pareto (*Cours*, § 964, p. 320) adopte la définition suivante de la *diminution* de l'inégalité des revenus: «La diminution de cette inégalité sera donc définie par le fait que le nombre des pauvres va en diminuant par rapport au nombre des riches…».

Cette définition, à laquelle il se tiendra toute sa vie, signifie que pour lui le sens de variation de l'inégalité est, pour chaque «seuil de pauvreté» x fixé, celui du rapport :

$$r(x) = \frac{1 - P(x)}{P(x)} \tag{3}$$

Or $r(x)$ est d'autant plus grand que $P(x)$ est petit, c'est-à-dire, d'après l'expression (2) et pour une valeur fixée x_0 du revenu minimum, d'autant plus grand que l'exposant α est grand. Autrement dit, pour Pareto, plus α est petit (i.e. proche de 1), moins il y a d'inégalité, et plus α est grand, plus il y a d'inégalité.

Or l'examen de la courbe figurée plus haut, nous montre que c'est exactement le contraire; plus α est grand, et plus la courbe s'incurve, et se rapproche de l'axe de x; à la limite, lorsque tend vers l'infini, $P(x)$ tend vers 0 pour tout $x > x_0$; mais on a toujours $P(x_0) = 1$. Ce qui signifie qu'à la limite aucun revenu n'est supérieur à x, quelque soit $x > x_0$.

Donc tous sont égaux au minimum x_0: c'est l'*équirépartition*, la plus grande égalité possible.

Pareto s'est donc lourdement trompé. D'où son erreur provient-elle?

Probablement de ce que, comme tout économiste libéral, et plus généralement tout théoricien réputé «de droite», il était persuadé qu'en économie libérale (ce qui était le cas de la plupart d'entre elles dans la seconde moitié du 19e siècle) les inégalités ne pouvaient aller qu'en diminuant. Or, qu'observe-t-on? Que l'évolution temporelle des estimations du paramètre α est la suivante (voir le *Cours*, § 360, p. 312; j'ai personnellement vérifié ces résultats):

Pays	*Grande-Bretagne*			*Prusse*		
Date	1843	1879	1893	1852	1881	1894
α	1,5	1,35	1,31	1,89	1,73	1,6

Le constat empirique est que α diminue avec le temps; or, pour Pareto, il faut que l'inégalité aille en diminuant; donc l'inégalité diminue avec α.

C'est aussi simple que cela.

La réplique de Georges Sorel (1897)

G. Sorel, lui, est un socialiste; pour lui, comme pour tout théoricien «de gauche», les inégalités ne peuvent (dans une économie libérale) aller qu'en augmentant.

Dans sa revue *Le devenir social* (juillet 1897, p. 578-607) il publie un article intitulé «La loi des revenus» qui est une critique courtoise, mais très approfondie, du *Cours* de Pareto. Et cette critique porte essentiellement sur cette question de la diminution de l'inégalité.

Comme Sorel n'a pas oublié ses études de mathématiques, il va se livrer à une série de calculs, dont il donne les résultats sous forme de tableaux. Nous reproduirons ici trois d'entre eux.

Le premier concerne le rapport entre revenu moyen m_0 et revenue minimum x_0 pour une distribution de Pareto de la forme (2) ci-dessus. On démontre que:

$$(4) \qquad \frac{m_0}{x_0} = \beta, \qquad \text{où} \qquad \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \qquad (\alpha > 1)$$

Le résultat est fourni par Sorel pour des valeurs décroissantes de α, ce qui donne le tableau suivant (p. 602, *op. cit.*).

α	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,15
β	2,43	2,66	3	3,5	4,33	6	7,66

En fait, les formules (4) montrent que β varie bien en sens contraire de α. Et Sorel de commenter qu'il s'agit de «relations qui se rattachent de près au *sentiment*[1] que l'on a de l'égalité ou de l'inégalité».

En effet, comme Maurice Fréchet le montrera en 1925, le rapport est, plus généralement, quelque soit le niveau de revenu x, celui de la moyenne $m(x)$ des revenus supérieurs à x à ce revenu x lui-même:

$$(5) \qquad \forall x \geq x_0, \qquad \frac{m(x)}{x} = \beta$$

Il est clair que plus β est grand, plus le détenteur du revenu x a le sentiment d'une plus grande inégalité[2]. Et ce «sentiment» varie comme β, c'est-à-dire en sens contraire de α.

Un deuxième des tableaux fournis par Sorel concerne le rapport entre un «seuil de richesse» S défini par le dernier vingtile de la distribution (5% des revenus sont supérieurs à ce seuil) et le revenu moyen m_0:

α	2	1,7	1,5	1,4	1,3	1,2
S/m_0	2,23	2,4	2,45	2,43	2,31	2,02

Ici, le résultat est ambigu, puisque le rapport étudié, que Sorel s'attendait à voir croître lorsque α décroît, passe par un maximum pour $\alpha = 1,5$, et décroît ensuite. On peut d'ailleurs démontrer algébriquement qu'il doit bien en être ainsi.

Par contre, un troisième des tableaux de G. Sorel ne recèle aucune ambiguïté. Il concerne le pourcentage q du revenu total distribué qui est détenu par les 5% les plus riches.

α	2	1,7	1,5	1,4	1,3	1,2
q %	22,3	29,1	36,8	42,5	50	60,7

1 C'est moi qui souligne.

2 Plus généralement encore, pour la forme générale (1) de la distribution de Pareto, on a:

$$m(x) = \beta x + c(\beta - 1)$$

ce qui fournit un moyen commode d'estimation des paramètres α et c.

Ici encore, on démontre algébriquement que q est bien fonction monotone de variant de 0, pour α infini, à 100% pour $\alpha = 1$.

Or un calcul tel que celui de q est précisément celui que, aujourd'hui, nous faisons le plus spontanément pour appréhender l'inégalité d'une distribution. Sorel le faisait dès 1897, c'est-à-dire près de dix ans avant l'utilisation systématique, par l'économiste américain M.O. Lorenz puis par le statisticien italien C. Gini, des «courbes de concentration»[3]. Il semble donc bien que, comme pour la prise en compte des formules (4) (que Pareto connaissait mais n'a pas exploitée) et (5) (FRÉCHET, 1925) ci-dessus, Sorel ait été ici encore très en avance sur son temps. La justification théorique de l'utilisation des courbes de concentration, et donc de tableaux tels que le troisième de Sorel, ne se produira d'ailleurs que vingt-trois ans plus tard (PIGOU, 1920).

La conclusion de Sorel est en tout cas très claire: contrairement à ce qu'affirmait Pareto, c'est lorsque α augmente que l'inégalité diminue et ce que montrent les résultats empiriques de Pareto c'est que, de 1850 à 1900, loin de diminuer, l'inégalité dans la distribution des revenus n'a cessé d'augmenter.

N.B. Un exposé plus détaillé du contenu des section 3 et 4 ci-dessus, et notamment les calculs algébriques mentionnés, se trouvent dans (BARBUT, 2003) de la bibliographie.

La suite des événements donne raison à G. Sorel

Dans une réponse à l'article de Sorel, Pareto déclare: «*Quel sens donner au terme: diminution de l'inégalité des revenus*? Monsieur Sorel fait à ce sujet de fort bonnes observations. Il vaut mieux éviter ce terme ambigu» (PARETO, 1897).

Il admet donc qu'il y a au moins ambiguïté ; cependant, dans ses écrits ultérieurs et notamment dans son *Manuel* (PARETO, 1909) il répète sans modification son argumentation de 1896 tendant à montrer que les inégalités de revenu ont diminué depuis les années 1840-1850.

Et ceci, malgré les démentis que, sur le plan théorique, vont lui apporter, nous l'avons vu, les travaux de M. O. Lorenz, C. Gini, A. C. Pigou, dont Sorel avait eu la prémonition, qui tous sont publiés du vivant de Pareto, et qu'il a donc connus. Toujours sur le plan théorique, la formule (5) de M. Fréchet (FRÉCHET, 1925) va dans le même sens, mais elle n'est publiée qu'après sa mort.

---

[3] En effet, ce que fait ici Sorel, c'est étudier la variation en fonction de α d'un point de la courbe de concentration d'une distribution paretienne. Sur l'utilisation des courbes de concentration pour représenter les variations de l'inégalité, on pourra consulter (BARBUT, 1998) pour un exposé élémentaire, ou (SEN, 1973) pour une étude plus approfondie.

Les faits lui donneront également tort: depuis la fin de la première guerre mondiale, l'inégalité des revenus s'est mise à décroître (renversement de tendance par rapport au 19e siècle) et le paramètre α n'a cessé de croître. Voici ce qu'il en est, par exemple, pour les revenus en France, où une politique de redistribution des revenus a été poursuivie et accentuée pendant des décennies:

Date	1919	1927	1938	1957	1979
α	1,63	1,68	2,13	2,42	2,78

En fait, dès que α dépasse 2, la loi de Pareto cesse de bien s'ajuster aux distributions de revenus; d'autres types de distributions, telles que les lois Log-normales de R. Gibrat, sont beaucoup mieux adaptées.

Mais bien des ambiguïtés subsistent

Tout n'est pas dit pour autant. Des observations récentes montrent que la comparaison des inégalités ne va pas de soi, et que bien des ambiguïtés (voire des paradoxes) demeurent.

Un exemple en a été donné en France, dans les années 1984-1985, lors le débat qui a eu lieu en sociologie de l'éducation, sur l'inégalité des catégories socio-professionnelles quant à l'accès à l'enseignement universitaire.

L'opposition entre sociologues «de droite», pour lesquels cette inégalité diminue, et sociologues «de gauche», pour lesquels elle ne cesse d'augmenter, y a été caricaturale. Mais le côté positif de cette polémique, que l'on n'exposera pas ici (voir (BARBUT, 2003) pour un exposé résumé) a été de mettre à jour quelques « paradoxes » mathématiquement inéluctables, recelés par la représentation si simple, et si convaincante à première vue, de l'inégalité d'une distribution par sa courbe de concentration.

Voici un autre exemple, de nature théorique, et inédit, je crois.

Je considère trois familles de distribution souvent adéquates à rendre compte de phénomènes inégalitaires et en particulier de la répartition des revenus :

- Les *distributions de Pareto de type (2)* ci-dessus, sur lesquelles ont s'est déjà longuement étendu. À savoir:

$$P(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, \qquad x \cdot x_0 > 0, \qquad \alpha > 1$$

- Les *distributions exponentielles*, d'équation:

$$P(x) = e^{-u(x)} \qquad \text{avec} \qquad u(x) = \frac{x - x_0}{h}, \qquad x \cdot x_0, \qquad h > 0$$

L'inégalité, toujours dans le sens de la concentration de Lorenz-Gini-Pigou, y est une fonction croissante du paramètre h.

- Les *distributions Log-normales* (ou de Gibrat) d'équation:

$$P(x) = G(u(x)) \qquad \text{avec} \qquad u(x) = \frac{l_n(x) - l_n(\mu)}{\sigma}, \qquad x > 0$$

Et où l_n est le logarithme neperien.

Les paramètres σ et μ sont positifs et G est la distribution dite «normale» de Laplace et Gauss:

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Pour la Log-normale, l'inégalité, toujours selon les courbes de concentration, est fonction croissante de σ.

Je considère ensuite trois classes de revenus, déterminées par deux seuils fixés s et S:

- Les «pauvres», ceux dont le revenu X est inférieur à s:

$$x_0 \leq X < s$$

- Les «intermédiaires», dont le revenu est compris entre s et S:

$$s \leq X < S$$

- Les «riches», dont le revenu est supérieur à S:

$$S \leq X$$

s et S s'interprètent donc respectivement comme un «seuil de pauvreté» et un «seuil de richesse».

Considérons enfin trois critères pour juger de l'effet d'une augmentation de l'inégalité, quand le paramètre gouvernant la variation de la fonction de concentration va de la valeur correspondant à l'équirépartition à celle qui correspond à l'inégalité maximale:

- Le pourcentage P de chacune des trois catégories dans la population totale;
- Le pourcentage Q du total distribué détenu par chacune des trois catégories;
- Un revenu «typique» (moyenne ou médiane) de chacune des trois catégories.

Les résultats sont fournis par le tableau ci-dessous, une flèche montante ↗ signifiant «croissance» et une flèche descendante ↘ signifiant «décroissance».

Je laisse le lecteur à la méditation des ambiguïtés révélées par ce tableau.

	Pareto	Exponentielle	Log-Normale
	α: $\infty \searrow 1$	h: $0 \nearrow \infty$	σ: $0 \nearrow \infty$
Pobres	$1 \searrow 1-\frac{x_0}{s}$	$1 \searrow 0$	$0 \nearrow 1/2$
Inter.[1]	$0 \nearrow x_0\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{S}\right)$	$0 \nearrow \searrow 0$	$1 \searrow 0$
Ricos	$0 \nearrow \frac{x_0}{S}$	$0 \nearrow 1$	$0 \nearrow 1/2$

P: % de la population

Pobres	$1 \searrow 0$	$1 \searrow 0$	$0 \nearrow \searrow 0$
Inter.	$0 \nearrow \searrow 0$	$0 \nearrow \searrow 0$	$1 \searrow 0$
Ricos	$0 \nearrow 1$	$0 \nearrow 1$	$0 \nearrow 1$

Q: % de la richesse totale

4 Il peut arriver, dans le cas paretien, et selon les valeurs données à s et à S, que P ne soit pas fonction monotone (comme c'est aussi le cas pour l'exponentielle).

	Pareto	Exponentielle	Log-normale
Pobres	$x_0 \longrightarrow m_p$	$x_0 \longrightarrow \frac{x_0 + s}{2}$	$s \longrightarrow 0$
Inter.	$s \longrightarrow m_i$	$s \longrightarrow \frac{s + S}{2}$	$\mu \dashrightarrow M_i$
Ricos	$S \longrightarrow \infty$	$S \longrightarrow \infty$	$S \longrightarrow \infty$
	Moyenne	Médiane Moyenne	Moyenne

Pobres	$X_0 \longrightarrow \mu_p$	$s \longrightarrow 0$
Inter.	$s \longrightarrow \mu_i$	$\mu \dashrightarrow M'_i$
Ricos	$S \longrightarrow 2S$	$S \longrightarrow \infty$
	Médiane	Médiane

Avec:
$$m_p = \frac{x_0\ s}{s - x_0}\ l_n\left(\frac{s}{x_0}\right) \qquad \mu_p = \frac{2\ x_0\ s}{x_0 + s} \qquad M_i = \frac{S - s}{2\ l_n\left(\frac{S}{s}\right)}$$

$$m_i = \frac{s\ S}{S - s}\ l_n\left(\frac{S}{s}\right) \qquad \mu_i = \frac{2s\ S}{s + S} \qquad M'_i = (sS)^{1/2}$$

- Pour la Log-Normale, on a supposé: $0 < s < \mu < S$
- La flèche en pointillé $\dashrightarrow$ indique que, selon les valeurs de s, S et μ, il peut aussi bien y avoir croissance que décroissance.

BIBLIOGRAPHIE

BARBUT, MARC (1998): «Une introduction élémentaire à l'analyse mathématique des inégalités», *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, n° 142, p. 27-41.

BARBUT, MARC (2003): «Ideología, matemáticas y ciencias sociales: Vilfredo Pareto, Georges Sorel y la ambigüedad en la comparación de las desigualdades», *Empiria, revista de metodología de la ciencias sociales*, n° 6, UNED, Madrid.

FRÉCHET, MAURICE (1925): «Une nouvelle représentation analytique de la répartition des revenus», *Bulletin de l'Institut international de statistique*, tome XXII, fasc. 3, p. 547 et sq.

PARETO, VILFREDO (1896): *Cours d'Économie Politique*, Genève, Droz, Nouvelle édition par G.H. Bousquet et G. Busino (1964), même éditeur.

PARETO, VILFREDO (août 1897): «La répartition des revenus», *Le monde économique*, p. 259-261. Reproduit dans *Vilfredo Pareto, écrits sur la courbe de la répartition de la richesse*, réunis et présentés par Giovanni Busino, Genève, Droz, p. 43-48.

PARETO, VILFREDO (1909): *Manuel déconomie politique*, traduit sur l'édition italienne par Alfred Bonnet (revue par l'auteur), Paris, Giard et Brière. Nouvelle édition par G. Busino (1966), Genève Droz.

PIGOU, ARTHUR CECIL (1920): *The Economics of Welfare*, Cambridge (England), Cambridge University Press.

SEN, AMARTYA (1973): *On Economic Inequality*, London, Oxford-Clarendon Press.

SOREL, GEORGES (juillet 1897): «La loi des revenus», *Le devenir social*, 3e année, n° 7, p. 578-607.

CAPÍTULO 14

San Isidoro de Sevilla, patrono de los profesionales de la estadística

FERNANDO CELESTINO REY
Instituto Nacional de Estadística

La península Ibérica en el siglo VI

La victoria del rey franco Clodoveo I sobre el visigodo Alarico II en Vouillé, cerca de Poitiers (507), permitió el establecimiento de los merovingios en Aquitania y obligó a los visigodos a replegarse al sur de los Pirineos. A partir de esa derrota, el dominio real visigótico se limitó a la Tarraconense y parte de la Meseta Central; los suevos seguían manteniendo el control del macizo galaico-portugués mientras que la Bética[1], desde la temprana marcha de los vándalos en el 429, era gobernada por poderes locales hispano-romanos. Con posterioridad, hacía mediados del siglo V, las continuas disputas dinásticas de los visigodos —causadas en gran medida por el carácter electivo que tenía la monarquía visigótica— facilitaron al emperador bizantino Justiniano ocupar pacíficamente Cartagena como aliado del visigodo

[1] La Bética romana que no tenía coincidencia con Andalucía, se componía de los cuatro «conventos jurídicos» de Híspalis (Sevilla), Córdoba, Astigi (Écija) y Gades (Cádiz), pero la Tarraconense de Augusto penetraba como un cuchillo por debajo de Despeñaperros hasta porciones geográficas de las actuales provincias de Jaén, Almería y Granada.

Atanagildo sublevado contra el rey Agila, iniciándose así una lenta expansión por la costa mediterránea.

Perdida la Galia, los visigodos trasladaron la capital de su reino a Toledo y se convirtieron en un Estado exclusivamente hispano. Sin embargo, los visigodos no eran lo bastante numerosos para instalarse en toda la península Ibérica y así extensas regiones de la península, especialmente el norte y la Bética continuaron durante muchos años gobernándose por jefes locales bajo el mando nominal del rey visigodo[2]. Además, existían profundas antipatías entre los dos pueblos ya que los visigodos constituían un ejército de ocupación que se quedó con la mayor parte de las tierras más fértiles. Estos odios se enconaban aún en mayor medida por la diferencia de religión, pues los visigodos profesaban la fe arriana[3] y los hispano-romanos la católica.

Algunos reyes visigodos procuraron activar la fusión de ambos pueblos distinguiéndose en este sentido el rey Leovigildo que accedió al trono en el año 568. Este monarca completó la conquista de la Península imponiendo su autoridad a los cántabros y vascones y acabando con la independencia del reino de los suevos (585); también impuso su autoridad en la España meridional vinculada al Imperio Bizantino ocupando todo el valle del Guadalquivir. Para asegurar su sucesión, Leovigildo asoció la corona a sus hijos Recaredo y Hermenegildo y, en su intento de unificar religiosamente su reino bajo el arrianismo convocó el Sínodo de Toledo (580) a partir del cual al parecer, hubo numerosas conversiones de católicos. Pero el problema de la unidad religiosa, produjo que los últimos años de su reinado se viesen gravemente turbados por la rebelión de su propio hijo Hermenegildo.

Para gobernar la Bética, Leovigildo envió a su primogénito Hermenegildo. Éste en 579, casó con Ingunda, princesa de origen franco y ferviente católica. Una vez establecido en Sevilla, Hermenegildo influido por su esposa y por las prédicas de Leandro arzobispo católico de aquella ciudad, abjuró del arrianismo y se bautizó según el rito de la Iglesia Católica (580). Ese mismo año, apoyado por la población hispano-romana de la Bética comenzó la rebelión contra su padre; hacia 582, empezó a titularse rey. Después de una larga guerra civil, Hermenegildo fue apresado en Córdoba (584), encarcelado en Valencia y luego en Tarragona donde fue asesinado por su carcelero (585), mártir de una lucha por la fe, y desde luego por lo que representaba esta fe como afirmación de un espíritu y una cultura (la hispano-romana)[4].

---

[2] Se calcula que los visigodos alcanzaban la cifra de 200.000 a 300.000 almas frente a una masa de siete millones de hispano-romanos.

[3] El arrianismo era una herejía que negaba el dogma trinitario al declarar que el Hijo no era exactamente igual al Padre ya que no era de su misma naturaleza y no participaba de su eternidad, por lo que su divinidad era secundaria.

[4] Hermenegildo es mártir y santo de la Iglesia Católica.

Leovigildo murió a los pocos meses (586) y le sucedió su hijo Recaredo. Éste impresionado por el martirio de su hermano se convirtió al catolicismo (587) siguiendo los consejos de Leandro quien había influido, como ya hemos visto, en la conversión de su hermano. Como la mayor parte del pueblo visigótico siguió el ejemplo de su rey, esta conversión favoreció la fusión entre los dos pueblos al quedar autorizados los matrimonios mixtos y a partir de entonces, la Iglesia Católica adquirió gran influencia sobre los reyes y la sociedad visigoda. En el 589, el cambio de dogma del Estado visigodo del arrianismo al catolicismo es celebrado públicamente en el II Concilio Toledano. Los Concilios de Toledo que hasta entonces sólo habían sido asambleas eclesiásticas, se convirtieron en importantes órganos de gobierno del que formaban parte nobles y obispos para resolver asuntos políticos y religiosos.

Breve reseña biográfica de San Isidoro

San Isidoro de Sevilla (¿Cartagena? ¿Sevilla? ¿560? ¿570?-Sevilla 636), una de las plumas cimeras de la literatura tardo-antigua, vivió en una de las épocas más apasionantes de la historia hispánica: la segunda mitad del siglo VI y la primera del VII, cuando el mundo romano desaparece y de sus cenizas, con la inyección del elemento germano, surgen nuevas nacionalidades. Cuando los bizantinos enviados por Justiniano en auxilio del rey godo Atanagildo, se apoderaron de la parte meridional de la península Ibérica, procedieron a la expulsión de aquellos elementos que pudiesen resultar un peligro para ellos. Así, muchos hispanovisigodos abandonaron sus casas de Levante para establecerse en Sevilla; la misma sede metropolitana de Cartagena se trasladó a esa ciudad. Los padres de Isidoro fueron de los muchos refugiados que se instalaron en la ciudad hispalense. Tuvieron cuatro hijos: San Leandro, San Isidoro y San Fulgencio, los dos primeros obispos de Sevilla y el tercero de Écija y la poetisa Santa Florentina que será consagrada abadesa.

En el 578, Leandro es elegido obispo católico de Sevilla y como tal, a raíz de la sublevación católica de la Bética, viaja a Bizancio para pedir infructuosamente ayuda. A su regreso, sofocada ya la sublevación y ocupado el trono por Recaredo, presiona con éxito para que el nuevo rey se convierta al catolicismo y pasa a ejercer funciones de consejero y de mediador entre Toledo y Bizancio. Al morir Leandro (¿599? ¿601?) Isidoro le sucedió en el episcopado de Sevilla, cargo que ocupó hasta su muerte. En ese momento, San Isidoro ya tenía una bien merecida fama —que trascendía de las fronteras ibéricas— de hombre excepcionalmente letrado proveniente de su fructífera labor docente y dedicación al estudio. Posteriomente, San Isidoro jugará un importante papel de maestro y consejero de los reyes Sisebuto y Quintila, presidiendo el II Concilio de Sevilla (619) y el IV de Toledo (633) y continuando la obra de su hermano en pos de la catolicidad del pueblo ibérico.

La obra isidoriana

El mayor mérito de San Isidoro radica en el ingente legado que nos ha transmitido sin el cual no podríamos comprender el itinerario recorrido por la sociedad europea desde la antigüedad griega hasta nuestros días.

San Isidoro reunió lo mejor de la tradición teológica (sobre todo de San Agustín y San Gregorio Magno) en *Las sentencias* y elaboró dos grandes diccionarios enciclopédicos, síntesis de todo el saber de su tiempo: *Las diferencias*, diccionario de sinónimos y distinción de algunas nociones dogmáticas y morales y las famosas *Orígenes o Etimologías* compendio de todo el saber de su época en veinte libros, obra que se convirtió en indispensable en toda biblioteca de la Edad Media. También se esforzó por buscar y fijar los libros canónicos (*Proemios*) y dilucidar el alcance de los apócrifos. Recogió interesantes tradiciones a propósito de los personajes de la Biblia (*Breviarios*), no descuidó el estudio de la liturgia (S*obre los oficios eclesiásticos*). También, investigó sobre la simbología de los números matemáticos (*Libro de los números*) y de los cosmológicos y geográficos (*De la naturaleza de las cosas*); pero sobre todo se dedicó a la ciencia sagrada, a la exégesis (*De la fe católica contra los judíos, De la vida y muerte de los santos, Las alegrías de la Sagrada Escritura,* etcétera), sin abandonar el estudio de las Reglas para los escritorios (*Regla monástica*), hagiográfico o histórico (*El cronicón,* donde se relata la historia del mundo o *La historia de los godos, vándalos y suevos)* y biográficos (*De los varones ilustres)* sobre los personajes de la España goda. Por otra parte, San Isidoro participó en muchas obras colectivas (*Colección canónica hispánica*).

Su obra supuso la recuperación de un gran número de obras perdidas de la antigüedad griega y romana. La variedad y el carácter enciclopédico de sus obras la constituyeron naturalmente maestro y doctor de la época, obras que penetran muy pronto en Europa, singularmente su obra *Los orígenes* o *Etimologías*. Isidoro fue llamado «nuevo Salomón» y «Daniel» por el pontífice San Gregorio Magno y «nuevo ornato de la Iglesia» y «sapientísimo de los siglos» según los padres del III Concilio de Toledo.

San Isidoro de Sevilla fue canonizado por la Iglesia Católica en el año 1598 aunque algunos eruditos discuten la exactitud de dicha fecha. El 25 de abril de 1722, el Papa Inocencio XII le proclamó Doctor de la Iglesia Universal, extendiéndose así su patronazgo científico allende el ámbito de la Iglesia Apostólica Romana. Su festividad se celebraba el 4 de abril pero con motivo de la modificación del santoral que tuvo lugar a principio de los años setenta del siglo XX, dicha festividad se trasladó al 26 de abril.

¿San Isidoro científico?

Llegamos aquí a una cuestión ciertamente controvertida sobre la que se han vertido muchas opiniones y que examinaremos someramente. Algunos autores niegan cualquier originalidad a San Isidoro. Para ellos, es un compilador, una especie de perfecto escriba; su esfuerzo enciclopédico es una yuxtaposición de recortes. En cambio, para otros autores, San Isidoro es un reputado matemático y geómetra, un gran astrónomo (o mejor dicho, geógrafo astronómico), un relevante naturista con importantes conocimientos de medicina. Para dichos autores, San Isidoro no se limita a acumular conocimientos sino que establece entre ellos relaciones lógicas que van ligando las partes con el todo.

Ahora bien, para situarnos en el universo mental de la Edad Media, debe señalarse que para San Isidoro y sus coetáneos todos los fenómenos y cosas del Universo tenían una explicación divina ya que habían sido creados por Dios con una finalidad; incluso las creencias religiosas tenían que tener una plasmación física. Así, al describir el mundo en su obra *De natura rerum*, San Isidoro situaba cartográficamente el infierno en el fondo de la Tierra.

En cualquier caso, no cabe considerar desde una óptica actual el razonamiento de San Isidoro como *científico* entendiendo como éste una secuencia lógica de conclusiones basadas en la experiencia empírica. Así, en la Edad Media se empleaba un método de razonamiento que hoy en día puede parecer extraño para el hombre moderno pero que fue ampliamente utilizado en aquella época. Este método estaba basado en el empleo de la etimología de las palabras según el cual se admitía que puesto que los nombres habían sido dados a las cosas para expresar la naturaleza de éstas, era posible conocer la naturaleza de las cosas encontrando el sentido primitivo de los nombres[5]. En cualquier caso, el patronazgo y la irradiación de la figura de San Isidoro en España tiene que ver tanto con el contenido de su magna obra como por su naturaleza histórico-política —«mito» vendríamos en decir—, aspecto que trataremos en el próximo epígrafe.

La figura histórico-política de San Isidoro

A su muerte, San Isidoro fue enterrado en Sevilla aunque sigue siendo problemático ubicar con exactitud el lugar donde reposaban sus restos cuando se produjo la invasión de la península Ibérica por los musulmanes[6]. Debilitado el califato, éste empezó a desmembrarse en reinos de taifas. Fernando I (1037-1065), sometió a tributo y vasallaje al taifa de Sevilla —Al Mutadid— y después de complicadas peripecias rescató para la cristiandad los restos de San Isidoro (1063), trasladándolos a la ciudad de León donde construyó una basílica en su honor. Es a partir de

[5] Así en *las Etimologías*, se afirmaba que el hombre se llamaba «homo» porque Dios lo había creado con «humus» (tierra).

[6] Según la tradición, su enterramiento habría estado ubicado en el Monasterio de San Isidoro del Campo, situado en el municipio de Santiponce (Sevilla).

este hecho cuando se produce un proceso de «heroicización» de la figura de San Isidoro[7] que le convierte a similares propósitos que el Apóstol Santiago, en un paladín nacional, en una especie de vidente que se opone al avance del Islam[8]. No es imposible que San Isidoro hubiera tenido noticia de la existencia de Mahoma, pero debe darse como muy poco probable. San Isidoro muere pues sin conocimiento del naciente Islam pero el pueblo personifica en él por medio de la leyenda y la fantasía popular la primera resistencia espiritual del cristianismo frente al invasor musulmán.

Posteriormente es Felipe II quien impulsa de nuevo la figura de San Isidoro mandando clasificar y publicar todas sus obras oponiendo su legado espiritual al propugnado por la reforma protestante. Sin embargo, a partir de la segunda mitad del siglo XIX, los escritos y pensadores de ideología liberal cuestionaron la figura de San Isidoro al hilo de la revisión histórica de los mitos de la reconquista. Finalmente, el régimen instaurado después de la Guerra Civil (1936-39) glosó de nuevo la figura de San Isidoro —por sabio, santo y español— al considerarle precursor de la unidad política y religiosa de España.

Hoy en día, despojado San Isidoro de connotaciones políticas, permanece como una de las grandes figuras de las letras hispanas; por ello no es de extrañar que su imagen escultórica se encuentre en las escalinatas de acceso al edificio de la Biblioteca Nacional ubicado en Madrid junto con otras siete plumas señeras de la literatura española[9].

El patronazgo geográfico-estadístico de San Isidoro

Durante medio siglo (1873-1922), «lo estadístico» y «lo geográfico» convivieron en el seno de la Dirección General del Instituto Geográfico y Estadístico que estuvo adscrito primero al Ministerio de Fomento hasta la supresión del mismo en el año 1900, para pasar a depender en esa fecha del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes. En 1922, los trabajos estadísticos pasaron a encuadrarse en el Ministerio de Trabajo.

El Instituto Geográfico continuó adscrito al Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes pasando a denominarse Instituto Geográfico y Catastral (1925) al

7 A partir de mediados del siglo XII, coincidiendo con el comienzo de las Cruzadas a Tierra Santa, la Reconquista fue adquiriendo un tinte marcadamente religioso primando este factor sobre el económico o el político.

8 Las crónicas relatan la contribución milagrosa de ambos en la toma de Baeza por el rey Alfonso VII (1147).

9 Éstos son: Quevedo, Lope de Vega, Cervantes, Nebrija, Luis Vives, Raimundo Llulio y Alfonso X el Sabio.

absorber los servicios del Catastro de Rústica del Ministerio de Hacienda. Posteriormente quedó asignado a la Presidencia del Consejo de Ministros (marzo 1926), al Ministerio de Trabajo y Previsión (noviembre 1928) y de nuevo a la Presidencia del Consejo de Ministros (febrero 1930).

Durante este peregrinaje administrativo, en el año 1927, la Asociación de Ingenieros Geógrafos elevó instancia a su obispo de Madrid-Alcalá en súplica de que fuese nombrado patrono de dicho cuerpo al sabio santo español. No conocemos las razones de dicha petición pero pueden hacerse algunas suposiciones verosímiles. En la década de los años veinte se asistió en España a un renacido interés por la obra isidoriana y su obra política. Por otra parte, se pueden considerar relevantes las recopilaciones de datos geográficos efectuadas por San Isidoro, en especial las relativas a la agrimensura, las pesas y medidas, la geometría y especialmente la astrología[10]. Llegados a este punto, se debe señalar que el Observatorio Astronómico de Madrid estaba por aquel entonces encuadrado en el Instituto Geográfico y Catastral. Por todo ello, no es extraño que unos profesionales de honda raigambre científico-técnica como los ingenieros geógrafos, eligieran a San Isidoro como su patrono.

Habiendo sido aprobada dicha solicitud por la autoridad eclesiástica competente, la Orden de la Presidencia del Consejo de Ministros del 14 de mayo de 1928 (Gaceta del 25), S. M. el Rey sancionó legalmente este patronazgo declarando el día 4 de abril de cada año día festivo para los citados ingenieros con el fin de que fuese solemnizada debidamente la festividad de dicho santo.

Ahora bien, algún tiempo después, juzgando los demás cuerpos de funcionarios del Instituto que había existido discriminación por la deferencia otorgada a este cuerpo de funcionarios[11], solicitaron se extendiese este patronazgo a todos los cuerpos que integraban la Dirección General del Instituto Geográfico y Estadístico. Por la Orden del Ministerio de Trabajo y Previsión del 22 de enero de 1930 (Gaceta del 29), S. M. el Rey de conformidad con lo solicitado por la Dirección General del Instituto tuvo a bien reconocer como patrono de todo el personal de la misma a San Isidoro.

Los avatares políticos acaecidos en España durante los años treinta conllevaron que el Instituto cambiase varias veces de adscripción ministerial. Así, pocos días después del advenimiento de la II República (14 de abril de 1931), un Decreto del 21 del mismo mes creó la Dirección General del Instituto Geográfico, Catastral y de Estadística encuadrándola en el Ministerio de Trabajo aunque, antes de terminar

---

[10] Uno de los títulos no oficiales de San Isidoro es el de «sabio cosmógrafo».

[11] Estos cuerpos eran: el Cuerpo de Topógrafos Auxiliares, el Cuerpo de Astrónomos y los Fieles Contrastes de Pesas y Medidas que sin constituir cuerpo de funcionarios, tenía unas características administrativas especiales.

el año otro Decreto del 9 de octubre la hizo depender de la Presidencia del Gobierno de la II República. A la vista de estos hechos administrativos, ¿debería entenderse que a partir del 21 de abril de 1931 San Isidoro fue también patrón de los estadísticos?[12] No se ha localizado ninguna normativa administrativa o sacra que pudiese sustentar esta hipótesis pero no nos cabe duda que de facto fue así ya que dos años después, en 1933, se creó una Hermandad Profesional Católica donde geógrafos y estadísticos estuvieron bajo la advocación de San Isidoro en un contexto político que analizaremos seguidamente.

Las hermandades católicas profesionales

En tiempos de la monarquía absoluta todo tipo de asociaciones estaban prohibidas y las profesiones (gremios) para asociarse debían hacerlo bajo el mandato protector de la Iglesia Católica. Pero es a finales del siglo XIX cuando en los países europeos desarrollados (Francia, Inglaterra, Alemania, Bélgica) empieza a propagarse lo que vino en denominarse el «catolicismo social». Esta doctrina sintetizaba la actitud de los católicos quienes, en aplicación del evangelio, querían luchar contra la miseria del proletariado organizando círculos y asociaciones católicas y finalmente los sindicatos católicos que preconizaban la intervención del Estado entre patronos y obreros. En este contexto político-social, la jerarquía de la Iglesia organizó la Acción Católica para estructurar y promover el apostolado laico en colaboración con la misma e inmediata dependencia.

En España también se desarrolló la Acción Católica en todas sus facetas, pero es a principios de los años treinta durante la II República cuando la misma recibe un gran impulso al verse confrontada a la dialéctica de los partidos republicanos de izquierda fuertemente anticlericales y a los partidos de ideología marxista. De ahí que al hilo de la creación del partido político Acción Popular (marzo 1993)[13] cuyos principios programáticos estaban inspirados en el ideario de Acción Católica, se impulsó la creación de Hermandades Profesionales Católicas para propagar el catolicismo social agrupando y fomentando la asociación y la participación de los católicos en el mundo del trabajo.

Se tiene noticia por aquel tiempo de la creación de una Hermandad de San Isidoro que agrupaba a los profesionales geográficos y estadísticos, cuyos estatutos

[12] En esa fecha, los funcionarios de estadística se agrupaban en un solo cuerpo: el Cuerpo Nacional de Estadística.

[13] Acción Popular liderada por José María Gil Robles fue el núcleo fundador que vertebró la CEDA (Confederación Española de Derechas Autónomas).

fueron aprobados por el obispo de Madrid-Alcalá por Decreto del 29 de agosto de 1933 siendo su sede canónica la Iglesia Parroquial de San Jerónimo de Madrid[14].

Los caminos administrativos de «lo geográfico» y «lo estadístico» se volvieron a separar ya que en septiembre de 1935, la primera competencia pasó a depender del Ministerio de Instrucción Pública y la segunda del Ministerio de Trabajo, Justicia y Sanidad aunque debe presuponerse que la Hermandad continuó siendo única.

Las hermandades y cofradías de San Isidoro después de 1939

La Cofradía de San Isidoro de Profesionales de las Ciencias y Artes Geográficas y Estadísticas.

Finalizada la Guerra Civil, la Ley de 8 de agosto de 1939 reorganizó la Administración del Estado y confirmó —hasta nuestros días— la separación de los lares administrativos de estas dos ciencias. Así, la Dirección General del Instituto Geográfico y Catastral quedó adscrita a la Presidencia del Gobierno y la Dirección General de Estadística quedó dependiente del Ministerio de Trabajo. No obstante, geógrafos y estadísticos vuelven a estar juntos en una Hermandad Católica que recreó la existente antes de la guerra.

En efecto, el 10 de enero de 1942 se aprobaron los nuevos (sic) estatutos de la Cofradía de San Isidoro de Profesionales de las Ciencias y Artes Geográficas y Estadísticas. Estaría formada por dichos profesionales en todas sus ramas sin distinción de clases ni de categorías. Entre otros, los fines perseguidos por la Cofradía eran: «fortalecer y fomentar el espíritu cristiano y la vida interior de los cofrades y su unión con Jesucristo fuente de toda sabiduría (…)», «propagar la devoción a San Isidoro y siguiendo sus altos ejemplos difundir la fe y la verdad innegable de la completa armonía que existe entre ella y la ciencia» y «colaborar con las demás Cofradías de Profesionales Católicos en la Obra de Acción Católica, a la cual estará incorporada». Cabe destacar que las mujeres no tenían voto a tenor del Cannon 704, según el Artículo 10. El domicilio de la Cofradía se fijó en Madrid en la Iglesia de Nuestra Señora de Montserrat, calle de San Bernardo 79, en donde se veneraba la imagen del santo[15]. En 1944, fruto de una iniciativa de la Hermandad, el Instituto Geográfico publicó la obra *San Isidoro, arzobispo de Sevilla y sabio cosmógrafo*.

[14] En aquellos años, se crearon otras Hermandades Católicas Profesionales como la de Licenciados de Filosofía y Letras —también bajo la advocación de San Isidoro— (1933), Ingenieros de Montes (1934), Minas (1934), Industriales (1934), Banca y Bolsa (1935).

[15] En la segunda mitad de los años sesenta, dicha imagen se trasladó al Tercer Monasterio de las Salesas Reales, calle San Francisco de Sales, 44, próximo a la sede actual (que data de 1930) del Instituto Geográfico Nacional, calle Ibáñez de Ibero, 3.

Observamos pues que, además de la aplicación de la moral cristiana al mundo del trabajo, la superación del conflicto entre fe y ciencia estaba muy presente representando San Isidoro la armonía entre la fuerza espiritual y la sabiduría científica[16].

A título de curiosidad, cabe señalar que el Decreto del Ministerio de Trabajo de 23 de diciembre de 1944 (BOE del 11 de enero de 1945) colocó bajo el patrocinio de San José a los cuerpos de funcionarios del Ministerio de Trabajo. En el texto del citado Decreto no se hace ninguna excepción ni tan siquiera con los Cuerpos de Estadística (existían dos por aquel entonces, el Cuerpo Facultativo Nacional de Estadística y el Cuerpo de Ayudantes Administrativos de Estadística). El legislador debió de entender que dichos cuerpos estaban ya bajo el patrocinio de San Isidoro de Sevilla. Este hecho es una prueba de la autonomía administrativa que gozaba la Dirección General de Estadística dentro del Ministerio de Trabajo al cual estaba adscrita[17].

Por otra parte, de los testimonios orales recabados de estadísticos que vivieron aquellos años existía también una cierta «separación» entre geógrafos y estadísticos dentro de la Hermandad lo cual era en cierto modo un reflejo de un cierto antagonismo profesional ya que «lo geográfico» era considerado como científico mientras que «lo estadístico» no se consideraba una ciencia sino una labor administrativa. Así, cabe señalar que en la misa anual que se celebraba en honor del santo, solíase adornar su imagen con algunos instrumentos de medida propios de la profesión geográfica como teodolitos, jalones de medir o miras topográficas. Sin embargo, a los estadísticos les resultaba difícil aportar algún objeto propio de su profesión[18].

Se ha conseguido localizar un documento que relata la participación de la Hermandad en los actos que se celebraron en León los días 17 al 22 de febrero de 1946, con motivo de la II Asamblea de los Cuerpos de Estadística que debatió sobre el Reglamento que debía desarrollar la Ley de Estadística de 1945 recientemente aprobada. En la portada y primera página del desaparecido periódico leonés *Proa* del martes 19 de febrero se dice lo siguiente: «(…) En total pasan de cien los llegados y entre ellos hay que contar al joven ingeniero geógrafo D. Antonio Luna, que trae la representación de la Rama Geográfica (sic) de la Hermandad de San Isidoro de los Profesionales de las Ciencias y Artes Geográficas y Estadísticas que se halla instaurada en Madrid, en la Iglesia de Nuestra Señora de Montserrat (Padres Benedictinos) donde se da culto a una hermosa imagen de San Isidoro su patrón».

---

[16] San Isidoro continuó siendo el patrón del Instituto Geográfico y Catastral.

[17] Era ministro de Trabajo, José Antonio Girón de Velasco.

[18] Estas «controversias» estaban enmarcadas en un ambiente de camaradería y compañerismo. Un cierto año, un estadístico al empezar la misa anual, depositó a los pies del santo un cuestionario estadístico.

Más adelante se señala: «A las once de la mañana de ayer, los miembros representantes de los cuerpos que ya integran el Instituto Nacional de Estadística y sus altos jefes acudieron a la Basílica de San Isidoro, a honrar con una ofrenda simbólica a su Santo Patrón (…). En el edificio se colocó la bandera de la Hermandad de San Isidoro, de Madrid, a que hemos hecho referencia. La llevaba el jefe de sección D. Adolfo Melón». Más adelante, se relacionan las autoridades que asistieron al acto entre los que figura el presidente diocesano de Acción Católica.

La Hermandad de San Isidoro de Profesionales de la Estadística

La Ley de 31 de diciembre de 1945 (BOE del 3 de enero de 1946) creó el Instituto Nacional de Estadística (INE) con rango de Dirección General. El Reglamento de esa Ley, Decreto de 2 de febrero de 1948 (BOE del 25 de marzo), consagró a San Isidoro como *patrono exclusivo de los estadísticos*. En efecto, su artículo primero decía: «(…) El Instituto Nacional de Estadística se pone bajo la advocación de San Isidoro de Sevilla, al que declara su patrono».

Desde un punto de vista histórico, puede ser discutible la idoneidad de esta elección puesto que, aunque San Isidoro llevó a cabo una ingente tarea de recopilación y clasificación de datos de la naturaleza más diversa, no realizó ningún trabajo estadístico tal y como es concebido en la actualidad en el sentido de inferir, de la masa de información recopilada, una conclusión empírica o regla científica que explicase el mundo o la naturaleza de las cosas. En cualquier caso, la «aureola científica» de San Isidoro, su figura histórico-política muy glosada en aquellos años y «la convivencia» de los estadísticos con él en las Hermandades Católicas citadas anteriormente (junto al personal del Instituto Geográfico) bastan para justificar su elección como patrono del INE.

El patronazgo de San Isidoro fue muy manifiesto en los primero años de vida del INE. Así, el 30 de marzo de 1953, el Obispado de Madrid aprobó los estatutos de la Hermandad de San Isidoro de Profesionales de la Estadística[19].

Según dichos estatutos, sus fines eran: «en el orden religioso, honrar al Santo Patrono de los Estadísticos (…)», «en el orden hispánico, su incorporación a la misión católica de España para la salvación del mundo», «en el orden profesional, la dignificación del trabajo y la exaltación de la conciencia profesional del traba-

[19] A partir de ese momento, la Cofradía citada anteriormente perdió su epíteto «estadísticas», para pasar a denominarse Hermandad de San Isidoro de los Profesionales de las Ciencias y Artes Geográficas. El patronazgo de San Isidoro sigue muy presente en el Instituto Geográfico Nacional. En las escalinatas de entrada a su actual sede central calle General Ibáñez de Íbero, puede contemplarse una gran imagen de San Isidoro de similar perfil a la que figura en los accesos a la Biblioteca Nacional.

jador» y «en el orden social, la armonía y convivencia entre el personal de la Hermandad y sus familiares».

La imagen del santo que fue sufragada por el INE y la Hermandad, se veneraba en su sede canónica sita en la capilla del Santuario del Inmaculado Corazón de María ubicada en la calle Ferraz esquina a la de Marqués de Urquijo[20].

Esta Hermandad estaba abierta a todos los trabajadores del INE, organizándose el día de la festividad del santo una misa y anualmente un ciclo de conferencias cuaresmales. Son de reseñar los brillantes actos en los cuales participó la Hermandad, que tuvieron lugar en León en 1960 con motivo del XIV Centenario del nacimiento de San Isidoro y el primer milenario de la Biblia Visigótica.

Imagen de San Isidoro de la Hermandad de Profesionales de la Estadística
(se conserva en la sede central del INE).

La Hermandad de San Isidoro del Cuerpo Técnico de Estadísticos Sindicales

Para recopilar la información estadística necesaria a los fines de la Organización Sindical que empezó a crearse en 1940 se formó en su seno el Servicio Nacional de Estadística y Colocación (octubre 1940).

[20] Muy cerca de la sede del INE (hasta 1973), que se encontraba en la calle Ferraz, 41.

En diciembre de 1944, este servicio se dividió en dos: el Servicio Nacional de Encuadramiento y Colocación y Servicio Nacional de Estadística, el cual poco después cambió su epíteto *Nacional* por el de *Sindical*. En este contexto administrativo, se creó en mayo de 1942 el Cuerpo Técnico de Estadística y Colocación y posteriormente, acorde con el precitado desglose de servicios, se creó en marzo de 1949 el Cuerpo Técnico de Estadísticos Sindicales.

La Hermandad de San Isidoro de dicho Cuerpo se constituyó en junio de 1955[21]. En el artículo primero de sus Estatutos, se relacionaban los dos fines de la Hermandad: el primero «colocar a los funcionarios del Cuerpo Técnico bajo el patrocinio de San Isidoro de Sevilla y recabar su amparo, inspiración y acierto en el desempeño de las funciones estadísticas que les sean encomendadas (…)» y el segundo, «procurar un auxilio económico, al fallecimiento de un funcionario del Cuerpo Técnico de Estadísticos Sindicales, para la viuda, hijos, padres o cualesquiera otros beneficiarios del causante, en la cuantía, forma y condiciones que se determinen en el presente Reglamento[22]. La sede canónica de la Hermandad, se estableció en la iglesia de las Calatravas, calle Alcalá, 25.

Carácter complementario pero relevante reviste la mención del emblema de esta Hermandad[23]. En efecto, el emblema de la Organización Sindical fue un martillo en medio de un entorchado formado por una espiga de trigo y una rama de palma enlazadas ambas en forma de sierpe. El distintivo de la Hermandad copió este modelo pero sustituyendo el martillo por una cruz.

La extinción de las hermandades profesionales de San Isidoro

Todas las citadas Hermandades disponían en sus Estatutos que en la festividad de San Isidoro (primero el 4 de abril y posteriormente el 26 del mismo mes) se honrase al mismo con una solemne misa y posteriormente una comida de confraternización[24].

Los cambios sociológicos de la sociedad española que se iniciaron en la década de los años sesenta del siglo XX fueron produciendo una sociedad más laica rele-

[21] Por lo tanto, con posterioridad a la Hermandad de Profesionales de la Estadística.

[22] Dicha ayuda económica, se denominaba en el Artículo 12 de los estatutos «Auxilio de San Isidoro».

[23] Figuraba en la portada de sus estatutos. No se han podido localizar los distintivos de las demás Hermandades de San Isidoro.

[24] El Artículo 9 de los Estatutos de la Hermandad de San Isidoro del Cuerpo Técnico de Estadísticos Sindicales recogía explícitamente dicha celebración. «En la misma fecha (festividad de San Isidoro) se celebrará una comida de hermandad y se organizarán cuantos actos se estimen oportunos en orden al fomento y cultivo de la vida cristiana y compañerismo entre todos los del Cuerpo».

gando la práctica de la religión al ámbito privado de las personas. Al mismo tiempo, surgieron otros grupos cristianos de apostolado seglar distintos a los encuadrados en la Acción Católica; ello produjo el decaimiento de la actividad de las Hermandades Profesionales Católicas. La del Cuerpo Técnico de Estadísticos Sindicales se disolvió a principios de la década de los años setenta y la de los Profesionales de la Estadística a finales de ese decenio. La de Profesionales de las Artes Geográficas (Instituto Geográfico Nacional) al parecer no se ha disuelto formalmente, aunque su actividad es muy reducida.

No obstante, los profesionales geógrafos y estadísticos del INE y de otras organizaciones estadísticas españolas siguen celebrando cada 26 de abril, festividad de San Isidoro, una misa en honor del Santo y aprovechan dicha fecha para compartir un vino de confraternización y participar en diversas actividades culturales y lúdico-deportivas.

Por lo que respecta a los trabajadores que prestan sus servicios en el INE, cabe decir que la Ley 12/1989 de la Función Estadística Pública de 9 de mayo que vino en derogar la Ley de Estadística de 1945 no menciona su patronazgo ni encomienda la actividad estadística a su santa inspiración. No obstante, dado que dicha Ley no ha tenido un Reglamento que la desarrolle en su totalidad —aunque sí Reglamentos parciales— el Reglamento de 1948 está en vigor en materias en las cuales no se haya promulgado una disposición derogatoria. Por tanto, debería concluirse que sigue vigente el patronazgo de San Isidoro recogido en el precitado artículo primero del Reglamento de 2 de febrero de 1948 que desarrolló la Ley de Estadística de 1945.

Oración de San Isidoro. Arzobispo de Sevilla patrono de la Hermandad de Profesionales de la Estadística

Glorioso San Isidoro, Doctor de
la Iglesia, varón esclarecido del solar
hispano y doctísimo en todas las
ramas del saber, acogiéndose a
tu tutelar patronazgo y postrados
reverentes a tus plantas, te rogamos
nos asistas en todos los instantes
de nuestra vida y, especialmente,
en el ejercicio de nuestra profesión.
Te suplicamos, también, que
intercedas cerca del Altísimo para
que, imitando tus virtudes en la
tierra, merezcamos ser partícipes
de tu gloria en el cielo. Amén.

BIBLIOGRAFÍA

ARAUJO-COSTA, LUIS (1942): *San Isidoro, Arzobispo de Sevilla*. Talleres Tipográficos de la Editorial Tradicionalista. Madrid.

BALLESTEROS GAIBROIS, MANUEL (1936): *San Isidoro de Sevilla*. Pax. Madrid.

FONT PUIG, PEDRO (1945): *San Isidoro de Sevilla como Patrono de las Facultades españolas de Filosofía y Letras* (conferencia pronunciada con motivo de la fiesta del Patrono de la Facultad). Imprenta Elzeviriana. Barcelona.

LABORDA ORIHUELA, ANTONIO (1996): *Isidorus Hispalensis. De natura rerum*. INE. Madrid.

MONTERO DÍAZ, SANTIAGO (1954): *Semblanza de San Isidoro* (conferencia pronunciada el 23 de abril de 1953 en la Facultad de Filosofía y Letras) Universidad de Madrid.

MUÑOZ Y TORRADO, ANTONIO (1936): *San Isidoro de Sevilla*. Álvarez y Zambrano. Sevilla.

PÉREZ DE URBEL, JUSTO FRAY (1940): *San Isidoro de Sevilla: su vida, su obra, su tiempo*. Labor. Barcelona.

SÁNCHEZ FABA, FRANCISCO (1940): *San Isidoro científico*. Ediciones Athenas. Cartagena.

CAPÍTULO 15

Tadeo Lope y Aguilar: el cálculo de probabilidades en la España del siglo XVIII

F. JAVIER MARTÍN PLIEGO
Universidad Rey Juan Carlos

En otras ocasiones ya hemos reseñado cómo todavía en el siglo XVIII el cálculo de probabilidades era mayoritariamente ignorado en nuestro país, y cómo solamente se puede destacar el empeño de algunos pocos matemáticos que se ocuparon de ir dando a conocer algunos de los conceptos y aplicaciones de esta nueva aritmética del azar.

De estos pocos matemáticos, Benito Bails y Mariano Josef Vallejo hicieron sus comentarios y aportaciones ya en los inicios del siglo XIX[1].

Anteriormente, Juan Justo García recoge en tres párrafos una breve reseña del desarrollo histórico del cálculo de probabilidades los cuales reproducimos a continuación[2]:

> *Sólo me resta añadir, para concluir esta noticia histórica del Álgebra, la aplicación que se ha hecho de ella al conocimiento de las probabilidades y*

---

[1] Vid.: BAILS (1805) y VALLEJO (1827).

[2] Vid.: JUAN JUSTO GARCÍA (1782), págs. XI y XII.

acasos. Esta aplicación de que en el día se hace mucho caso, y con razón, se reduce a juzgar, o inferir de ciertos antecedentes y circunstancias el número de veces que podrá suceder una cosa contingente, o si sucederá bien o mal: pero en la inteligencia de que el mayor, o menor acierto de estas consecuencias o resultados será siempre a proporcion del número y calidad de dichos antecedentes.

Huygens fue el primero que aplicó el cálculo a los juegos de suerte, y después Pascal y Moivre. M. Montmort publicó a principios de este siglo sus Ensayos del análisis sobre los juegos de suerte*, donde en todos los casos posibles determina la ganancia o pérdida de los jugadores en los juegos* del Faraon, la Banca, el Trece, el Sacanete, el Hombre *y* los Cientos *que entonces se usaban, valiéndose de sutiles y preciosas reglas, hijas de una profunda meditación sobre la materia. Por las mismas determinó después el Doctor Halley el grado de mortandad del género humano, por el que averigua el interés a que deben pagarse los réditos del fondo perdido o vitalicio, de lo que formó tablas, llevando cuenta en ellas con la edad y número de las personas en cuya cabeza se impone el principal. Struiks, sabio geómetra holandés, determinó en otras la duración de los matrimonios.*

A estas obras se siguieron otras muchísimas en todas lenguas, pero ninguna elemental, hasta que Emerson publicó sus tres tratados sobre los tres puntos a que se puede aplicar el cálculo de los acasos; a saber, 1.º Leyes de la casualidad*, 2.º* Rentas o Pensiones anuales*, 3.º* Compañías*, escritos con el mayor pulso, los cuales se hallan en sus* Misceláneas sobre diferentes asuntos de Matemática*, impresas en Londres en 1776, y componen un tomo en ocho*.

Alguna noticia tenía Juan Justo García sobre el estado de la cuestión pero no parece que fuera muy completa su información al respecto ya que en su tratado no se atreve a dedicar línea alguna al asunto. Además, si bien cita a Huygens, Pascal, Moivre, Montmort, Halley, Struiks y Emerson omite una referencia que a esas alturas era imprescindible tal como el *Ars conjectandi* de Jacob Bernoulli. Por otra parte, se fija en demasía en el trabajo de Emerson que hoy día se considera menor[3]. Su obra titulada *Miscellanies, or a Miscellaneous Treatise, containing several Mathematical Subjects* de 1776 no se destaca en casi ninguna de las historiografías de la probabilidad que hoy se disponen.

Por tanto, si exceptuamos la traducción del *Ensayo de aritmética moral* de Buffon[4] que se realizó por completar la obra de este insigne naturalista francés y no por ofrecer un texto sobre la probabilidad, y el apéndice añadido por López de

[3] Sólo aparece reseñado en TODHUNTER (1865) y KENDALL-DOIG (1968).

[4] Consúltese la traducción de Clavijo y Fajardo de la obra de Buffon, Tomo VI (1788).

Peñalver[5] en su traducción a las afamadas *Cartas a una princesa de Alemania* de Euler, sólo nos queda como verdaderamente destacable en este siglo XVIII el texto sobre probabilidad de Tadeo Lope y Aguilar.

De hecho, junto con el texto de Caramuel del siglo XVII, el de Tadeo Lope y Aguilar es la otra aportación que tendría un lugar relevante en la historia del cálculo de probabilidades de nuestro país en sus inicios. Y a ella vamos a dedicar nuestro análisis siguiente.

En primer lugar, podemos señalar que Tadeo Lope y Aguilar nació en Madrid sobre el año 1753, no se tiene certeza de este dato. Fue maestro de matemáticas, de arte militar y de delineación y lavado de planos en el Real Seminario de Nobles de Madrid. En 1794 parece que fue nombrado catedrático de esta institución de enseñanza superior pues así lo hace figurar en el Tomo I de su *Curso de matemáticas* que publicó en ese mismo año. Murió en 1802.

Su obra citada consta de tres tomos, el tercero a su vez se divide en dos volúmenes (Parte I y Parte II). En el Tomo I incluye un prólogo con un relato histórico de las matemáticas donde se intercalan citas variadas relativas al cálculo de probabilidades y a la demografía. Al final del Tomo II recoge a lo largo de 118 páginas un verdadero tratado de la probabilidad y rentas vitalicias.

El relato histórico[6] relativo a la evolución de la probabilidad que figura al final del prólogo del Tomo I está prácticamente calcado del que comentamos de la obra de Juan Justo García. La misma secuencia cronológica, los mismos autores citados y las mismas omisiones reseñadas anteriormente. También es sospechosa la insistencia de resaltar el tratado de Emerson, ya citado, que no se entiende si se compara con los de De Moivre y Montmort que son incluidos en la breve reseña histórica. Sobre el texto de Emerson, Todhunter advierte de lo inadecuado de su uso al incluir, en muchos casos, soluciones no exactas sino burdas aproximaciones para evitar cálculos más tediosos que el mismo Emerson admite.

De las 118 páginas que conforman el *Cálculo de probabilidades* de Lope y Aguilar, tan solo 41 están dedicadas a la probabilidad. En efecto, el capítulo primero de este tratado que se desarrolla bajo el lema «De las Leyes de la Suerte» es el que se ocupa de la probabilidad. Las páginas restantes que completan el tratado se dividen en dos capítulos, II y III, que titula «De las anualidades sobre las vidas o de las rentas vitalicias», y «Del establecimiento de las compañías o del Cálculo de las anualidades que se han de pagar en cualquier compañía, establecida para beneficio de la gente anciana», respectivamente.

En este trabajo nos centraremos en el análisis del texto relativo a la probabilidad. En primer lugar, Lope y Aguilar intenta ofrecernos una idea de lo que es el azar, que

5 Vid.: EULER-LÓPEZ DE PEÑALVER (1799).

6 Vid.: LOPE y AGUILAR, T. (1794): Tomo I, págs. XLIV-XLVI.

él identifica con la suerte. Así, en el Escolio I dice[7]: «Aunque la *Suerte* parezca un asunto leve y de poco momento para tratar de él, por su incertidumbre e inconstancia sin embargo todos los sucesos tienen algún cierto grado de probabilidad para verificarse o no verificarse; y esos grados de probabilidad son los que consideran los matemáticos. Aunque es imposible determinar con certeza cómo sucederá un suceso, no obstante se puede determinar matemáticamente qué verosimilitud o grado de probabilidad hay para que suceda o no; y esto es cuanto se pretende por medio del cálculo».

Y añade más adelante[8]: «La *Suerte* o *Acaso* es un suceso, o alguna cosa que sucede sin la intencion o dirección de ningún agente; y es dirigida o conducida al fin solamente por las leyes de la naturaleza. Por lo cual la suerte tiene una causa natural, pero no final; y la verdadera naturaleza de la suerte es el ser inconstante».

De esta reflexión parece deducirse que Lope y Aguilar identifica más bien el azar con la ignorancia que tengamos acerca de las leyes que regulan la naturaleza, ignorancia que genera incertidumbre sobre las consecuencias que pueden darse del fenómeno estudiado. Esta incertidumbre se acota a través de la asignación de un determinado grado de probabilidad a cada suceso.

Es interesante analizar cómo establece por medio de definiciones los principales conceptos de la probabilidad. En sus Definiciones II a VI va desgranando los conceptos básicos de los que luego va a hacer uso repetido. Así, en la Definición II introduce la noción de probabilidad de la manera siguiente[9]: «La *Probabilidad* o *Improbabilidad* de que suceda un suceso es el juicio que se forma de él, comparando el número de suertes que hay para que se verifique con el de las que hay para que falte».

Aunque la forma de definir la probabilidad nos acerca más a la idea moderna del *odd-ratio*, sin embargo el uso práctico que posteriormente hace de la probabilidad está asociado a la noción clásica habitual. No obstante, en su definición está implícita la necesidad de que quede perfectamente descrito el espacio de los comportamientos elementales.

En la Definición III se contempla la idea primitiva de esperanza de tal manera que dice[10]: «La *Esperanza* o *Expectación* en el juego es el valor de la suerte del hombre; esto es de la cosa jugada, considerada con la probabilidad de ganarla; y por lo tanto es el producto de su valor multiplicado por la probabilidad de ganar el fondo. Y la *ventaja = esperanza − la apuesta*». Aquí recoge el concepto inicial de

---

7 Vid.: LOPE Y AGUILAR, T. (1795): Tomo II, pág. 327.

8 Ibídem: págs. 327 y 328.

9 Ibídem: pág. 328.

10 Ibídem.

esperanza establecido por los precursores de la probabilidad en el sentido de identificarla con la parte de ganancia esperada de un juego.

La parte de pérdida esperada, es decir, lo negativo del azar, se denominó inicialmente como *temor,* siendo para Lope y Aguilar el riesgo. En la Definición IV lo explicita[11]: « El *Riesgo* es el valor de la apuesta considerada con la probabilidad de perderla; y por lo tanto es el producto de su valor por la probabilidad de perderla».

La noción actual de esperanza se alcanzaría mediante la suma de la esperanza y el riesgo en Lope y Aguilar.

Las dos definiciones siguientes se refieren a la independencia o no de los sucesos, de tal manera que[12]: «Los sucesos son *independientes* quando no tienen ningún género de conexión uno con otro; o cuando el verificarse el uno, ni facilita ni impide el que se verifique otro cualquiera de ellos», mientras que[13]: «Un suceso es *dependiente* cuando la probabilidad de que se verifique se altera por verificarse algún otro». Los ejemplos que añade a cada una de estas dos Definiciones V y VI aclaran lo establecido en las definiciones y no cabe aquí más comentario.

Lope y Aguilar contempla el desarrollo teórico del cálculo de probabilidades con una estructura eminentemente matemática. En efecto, una vez establecidas estas definiciones elementales introduce las consecuencias teóricas de la probabilidad mediante el establecimiento de tres axiomas y la demostración de nueve teoremas.

Realmente lo que se establece axiomáticamente no coincide en nada con la moderna axiomática del cálculo de probabilidades, pero resulta curioso y a la vez halagador que a finales del siglo XVIII, este español viera de tal contundencia el cálculo de probabilidades que le pareciera que habría que revestirlo de la mayor formalidad posible, y ello, como matemático que era, suponía empezar por un cuerpo axiomático.

Los tres axiomas de Lope y Aguilar son[14]:

> AXIO. I: *Al calcular el número de las suertes se supone que todas las suertes son iguales, o pueden suceder con igual facilidad.*
>
> AXIO. II: *Toda la esperanza para qualquier fondo es la suma de todas las esperanzas sobre los particulares.*
>
> AXIO. III: *El valor de cualquier suerte o esperanza es el que lograría la misma suerte o esperanza en un buen juego.*

---

[11] Ibídem.

[12] Ibídem.

[13] Ibídem.

[14] Ibídem.

El primero de sus axiomas es una mera hipótesis, muy extendida en una amplia variedad de aplicaciones de la probabilidad pero que no puede ser aceptada en muchos casos. De hecho, aunque esta hipótesis de equiprobabilidad de los sucesos elementales es aceptable para el análisis de muchos juegos ideales y se consagra por el principio de la razón insuficiente, sabemos que no puede ser mantenida en bastantes ocasiones por lo que no es palmariamente un axioma sino más bien un acuerdo de conveniencia que permite la resolución de ciertos problemas.

El segundo de los axiomas de Lope y Aguilar tampoco es un axioma, entre otras cosas porque el enunciado que establece, hoy en día, es fácilmente demostrable. La esperanza de una suma de variables aleatorias es la suma de las esperanzas de cada una de las variables aleatorias.

En cuanto al tercer axioma me cabe la duda de que a lo quiere referirse Lope y Aguilar es a la comparación de un juego cualquiera con un juego justo, cuando se refiere a un buen juego. En todo caso sería entonces el axioma ético de su teoría.

De los nueve teoremas excluiremos el segundo que es meramente un enunciado aritmético y comentaremos el resto.

El denominado Primer Teorema es, en realidad, la verdadera definición de probabilidad en su concepción clásica: Nos dice que si 1 es la certeza absoluta y a el número de casos en que se da el suceso y b el número para los que no se verifica el suceso entonces

$$\frac{a}{a+b} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a+b}$$

son las probabilidades de que suceda el suceso y de que no suceda, respectivamente. Como corolario de este teorema enseña el modo de calcular la probabilidad del suceso complementario.

En Teorema III nos muestra la regla de la multiplicación[15], al afirmar que «la probabilidad de que se verifiquen varios sucesos independientes es el producto de las varias probabilidades tomadas con separación». Para tres sucesos independientes establece la probabilidad de que se den conjuntamente los tres, de que no se dé ninguno de los tres, de que suceda por lo menos alguno de ellos.

En el Teorema IV ofrece una expresión para calcular la probabilidad de que, en un suceso dicotómico, se den por lo menos t veces una de las alternativas en n repeticiones.

[15] Ibídem: págs. 333 y 334.

El valor de la esperanza, en sentido moderno, se recoge en el Teorema V donde dice[16] que si una persona tiene una suerte igual para dos fondos *A*, *B*, el valor de su esperanza es

$$\frac{A+B}{2}$$

expresión que extiende hasta cuatro alternativas del suceso.

En el Teorema VI generaliza la definición matemática de esperanza para el caso de que las probabilidades de cada uno de los fondos *A* y *B* fueran, respectivamente, *a* y *b*. La fórmula que extiende también para tres alternativas, es

$$\frac{aA+bB}{a+b}$$

En el Teorema VII aventura una especie de cálculo para las probabilidades compuestas pero no termina de aclarar su objetivo aunque puede deducirse que lo que intenta definir es la probabilidad de la intersección de sucesos.

En el Teorema VIII incorpora una falacia, quizá derivada de su formación matemática y de la no captación completa de la idea de aleatoriedad. Transcribamos primero su enunciado[17]: «Si hay *n* suertes iguales en todo, y 1 por un suceso dado; este suceso se verificará una vez en *n* pruebas, tomadas una vez con otra». Aunque Lope y Aguilar intenta matizar el teorema llevando el razonamiento al infinito sigue insistiendo en la fatalidad con que debe sucederse el suceso estudiado cada *n* pruebas[18]: «Tomando un número infinito de pruebas, este suceso en el todo sucederá una vez cada *n* pruebas, porque todas las suertes suceden con igual facilidad o dificultad; y por consiguiente cuantas más pruebas, tanto más se aproximarán a esta razón; y en un infinito número de repeticiones, se aproximarán infinitamente a la certeza de suceder una vez en *n* pruebas».

En el Teorema IX relaciona los *odd-ratio* con las probabilidades de ganar que tienen cada uno de los dos jugadores que intervienen en un juego[19].

En la página 339 de este tratado advierte de la necesidad de establecer previamente el espacio muestral, aconseja que cuando el cálculo de la probabilidad de un suceso complementario sea más fácil que el de la probabilidad del suceso en cuestión debe escogerse este camino y también que para determinar el número preciso de sucesos elementales que configura un suceso compuesto «debe recurrirse a la

[16] Ibídem: pág. 334.

[17] Ibídem: págs. 335 y 336.

[18] Ibídem: págs. 335 y 336.

[19] Ibídem: págs. 338 y 339.

doctrina de las combinaciones y permutaciones» y aprender a descomponer un suceso compuesto en sus casos elementales para, mediante la regla de la suma, determinar su probabilidad.

El tratado se completa con la resolución de problemas y cuestiones donde va ofreciendo consejos para su solución. En la resolución de estos problemas y cuestiones hace repetidas alusiones al texto de De Moivre, *The Doctrine of Chances*.

BIBLIOGRAFÍA

DE MOIVRE, A. (1756): *The Doctrine of Chances or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.* A. Millar. London.

EMERSON, W. (1776): *Miscellanies, or a Miscellaneous Treatise; containing several Mathematical subjets.* London.

GARCÍA, J. J. (1782): *Elementos de aritmética, álgebra y geometría.* Joaquín Ibarra. Madrid.

LOPE Y AGUILAR, T.: *Curso de matemáticas para la enseñanza de los caballeros seminaristas del Real Seminario de Nobles de Madrid.* Imprenta Real. Madrid. Tomo I-1794. Tomo II-1795.

LÓPEZ DE PEÑALVER, J. (1798): *Sobre los fundamentos del cálculo de probabilidades.* En Euler, L.: *Cartas a una princesa de Alemania sobre varias materias de física y de filosofía.* Madrid.

LÓPEZ PIÑERO, J. M.; GLICK, T. F.; NAVARRO BROTÓNS, V. y PORTELA MARCO, E. (1983): *Diccionario histórico de la ciencia moderna en España. Vol.I. (A-L).* Península. Barcelona.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (2002): *Los probabilistas españoles de los S. XVII a XIX.* En AHEPE: *Historia de la probabilidad y de la estadística.* Editorial A.C. Madrid.

KENDALL, M. G. y DOIG, A. G. (1968): *Bibliography of Statistical Literature. Pre-1940.* Oliver and Boyd. London.

TODHUNTER, I. (1865): *A history of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace.* Macmillan. London.

CAPÍTULO 16

Aportaciones de Agustín Martínez Alcíbar a la Teoría de la Probabilidad: conceptos y aplicaciones

Marta García Secades
Universidad San Pablo CEU

Martínez Alcíbar: personalidad

Agustín Martínez Alcíbar (1810-1872), natural de Burgos, después de realizar en esta ciudad sus primeros estudios trasladó su residencia a Madrid, para cursar las enseñanzas de la Dirección General de Minas y pasar a Almadén, con el fin de estudiar en la Real Academia, en la que ingresó en noviembre de 1839 incorporándose a la promoción correspondiente en el número 288 de la relación general de ingenieros de minas[1].

Martínez Alcíbar tiene la mentalidad del profesional liberal, y más concretamente del ingeniero de la época, poseyendo dos vertientes diferenciadas pero complementarias. Por un lado, la vertiente científica, Martínez Alcíbar destacó por su interés en las ciencias físicas, adquiriendo profundos conocimientos, con una afición especial por la química, alcanzando una elevada reputación entre los cientí-

[1] En los escalafones de ingenieros de minas publicados en los *Anales de Minas*, tomos segundo y tercero, figura con los apellidos de Martínez Ramos. En las referencias posteriores observamos el cambio de Ramos por Alcíbar, perteneciente a su madre, destacado linaje de la jurisdicción de Azpeita.

ficos de la época. Su profundo espíritu investigador lo vemos plasmado en la publicación de numerosos tratados y manuales de diversas áreas de conocimiento.

> *Su publicación fue agradecida por cuantos trabajaban en los respectivos campos, por la información práctica que les proporcionaba*[2].

Por otro lado, destacamos también del autor su profundo interés por el progreso técnico. Es un hombre práctico, al que le interesa la aplicación de la ciencia al fomento de las diversas ramas de la riqueza. Estas dos aptitudes, la científica y la práctica, fueron la causa de su continua demanda de la incipiente industria para labores de asesoramiento y dirección. Resaltamos en este punto, de entre los nombramientos y cargos que ocupó, que fue vocal de la Comisión Geológica en la Junta General de Estadística[3]. No sabemos si fue este nombramiento el que le impulsó a estudiar y profundizar en el estudio de la ciencia estadística, lo que sí conocemos es que en el año de 1867, Martínez Alcíbar publicó su manual titulado *Elementos del cálculo de las probabilidades como complemento de la aritmética.*

Prólogo de su tratado estadístico

Comienza el autor su obra con un suculento prólogo en el que, en primer lugar, lamenta el estado de la educación en la nación española. La clave de esta situación es, según él, la falta de sólida instrucción en las «ciencias exactas y de experimento». Es probablemente ésta la razón por la cual escribe el autor su obra a modo de didáctico manual.

> *En vez de escribir un tratado, para lo cual hubiera bastado traducir alguno de los publicados en el extranjero* (...) *es más útil y más conveniente, para vulgarizar el cálculo de probabilidades, formar una cartilla, en la cual se indiquen las principales aplicaciones de dicho cálculo*[4].

Considera Martínez Alcíbar, que el sistema de conocimientos humanos depende de la Teoría de la Probabilidad. Asegura que sólo con la ayuda de la probabilidad, seremos capaces de emitir juicios guiados a la luz de la razón.

---

[2] LÓPEZ DE AZCONA, M.; GONZÁLEZ CASANOVAS, I. y RIZ DE CASTAÑEDA, E. (Coordinadores) (1992): *Minería Iberoamericana: repertorio bibliográfico y biográfico. Vol. III* (*1492-1892).* Instituto Tecnológico Geominero de España. Consejo Superior Ingenieros de Minas de España. Sociedad Estatal V Centenario, pág. 326.

[3] R.O de 21 de enero de 1865.

[4] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A. (1867): *Elementos del cálculo de probabilidades.* Imprenta de J. Fernández y Compañía. Madrid, pág. 13.

> (Con ayuda de la probabilidad) *se adquirirán hábitos de discurrir bien y de someterse al imperio de la razón, desterrando opiniones erróneas o inútiles para el verdadero progreso social*[5].

Insiste una vez más el autor en este punto:

> *en las investigaciones científicas de todos los ramos del saber humano no hay más guía que la ciencia de las probabilidades*[6].

Es ésta la razón por la cual considera que su estudio, simplificado todo lo posible, debiera preceder a todos los demás y, consecuentemente, debiera formar parte de la instrucción de los alumnos en las escuelas.

Interesante nos resulta reproducir el texto que a continuación se presenta, donde Martínez Alcíbar trata de resaltar la importancia del cálculo de probabilidades. Y es en este fragmento donde se observa con una impecable claridad lo que hoy conocemos como las etapas del análisis estadístico formal, en el que se engloba el análisis descriptivo e inferencial. Asombrosa nos resulta la definición que de la estadística inferencial se presenta.

> *Para que se comprenda la importancia del cálculo de probabilidades bastará recordar: que el saber humano se reduce, primero, a observar hechos singulares y describirlos; segundo, a generalizarlos; tercero, a deducir de la generalización nuevos hechos singulares; cuarto, a aplicar estos hechos*[7].

Concluye el prólogo con un listado de reconocidos autores en la materia, entre los cuales destacamos a Pascal, Fermat, Condorcet, Laplace, Moivre, Poisson, Bernoulli y Huygens, entre otros. El objetivo de la relación de autores presentada, según él mismo expresa, será saciar la curiosidad de todos aquéllos a los que con su tratado les haya podido despertar la afición al estudio del cálculo de probabilidades.

Antes de adentrarse en el uso y aplicación de la Teoría de la Probabilidad dedica, en mi opinión muy acertadamente, un capítulo a explicar los conceptos básicos que después empleará a lo largo de toda su obra, de forma clara y sucinta.

> *Entre el cero y la unidad, o entre la imposibilidad y la certeza estará la probabilidad*[8].

Expone en forma de hermoso diálogo entre un maestro y su aventajado discípulo las nociones fundamentales del cálculo de probabilidades: imposibilidad, posibilidad, probabilidad y certeza; en sus dos vertientes, conceptual y matemática.

---

5 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, págs. 12-13.

6 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 12.

7 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 11.

8 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 20.

Maestro.– ¿Podrás sacar una bola negra de esa bolsa, donde has visto que se han puesto ocho bolas blancas?

Discípulo.– No, señor; porque en la bolsa no hay ninguna bola negra.

M.– ¿Cómo se representa en aritmética esta expresión de no hay ninguna?

D.– Por 0; porque el decir que en la bolsa no hay ninguna equivale a decir: ninguna de las ocho, o sea cero octavas partes, y 0/8 = 0.

M.– ¿Podrás sacar una bola blanca de la bolsa, donde has visto que hay cuatro bolas blancas y cuatro negras?

D.– Sí, señor; porque hay cuatro bolas blancas de las ocho que hay en la bolsa: por lo cual, tan posible es que salga bola blanca como bola negra.

M.– ¿Cómo se escribe en aritmética la expresión de cuatro de las ocho?

D.– En forma de quebrado 4/8 = 1/2 porque el decir cuatro de las ocho, equivale a decir cuatro octavas partes.

M.– ¿Podrás sacar una bola blanca de la bolsa, donde has visto que hemos puesto ocho bolas blancas?

D.– Ciertamente, con toda seguridad sacaré bola blanca; porque, para sacarla tengo a mi favor todas las bolas que hay en la bolsa, o sean ocho de ocho.

M.– ¿Cómo se escribe esta expresión ocho de las ocho?

D.– Se escribe 8/8 = 1; porque decir ocho de las ocho, equivale a decir ocho octavas partes[9].

Concepción frecuentista de la probabilidad

Los siguientes capítulos de su manual los titula «Probabilidad simple» y «Ejemplos de probabilidades simples». Comienza el primero de ellos exponiendo una serie de sencillos ejemplos relativos al cálculo de probabilidades con bolas y cartas, tomando para resolverlos la definición laplaciana de la probabilidad. Repetirá en cada uno de los diversos enunciados planteados la primera y más importante regla a seguir que, según él, constituye el principal principio de la teoría expuesta:

Es necesario fijarse bien en el enunciado de los problemas y no olvidar las reglas necesarias para plantearlos, si se quiere evitar errores en la aplicación del cálculo de probabilidades[10].

Otros ejemplos nos demostrarán más adelante, como los referidos, la necesidad de la exactitud en el lenguaje y del rigor del raciocinio[11].

9 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, págs. 18-19.

10 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 29.

11 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 35.

Dentro del capítulo dedicado a los ejemplos de la probabilidad simple, haremos un alto en el camino para analizar el enunciado, resolución e importante conclusión que se deriva de uno de ellos. Así enuncia el problema:

Juegan dos a pares o nones (...) *arrojando las bolas para que entren en una tronera de una mesa de billar, o de cualquier otro modo: ¿quién tendrá a su favor mayor probabilidad, el que apuesta a sacar pares, o el que apuesta a sacar nones*?[12].

Así trata de resolverlo:

Considerando con atención, se verá que las bolas que hay en el montón sólo pueden venir a la mano según las diversas maneras con que se pueden combinar entre sí; pero no según las diversas maneras con que la totalidad se puede dividir en dos partes, ni según el número de cifras pares o nones que caben dentro del número total; es decir, que en cuatro hay uno, dos, tres y cuatro[13].

Veamos cómo lo soluciona: toma cuatro bolas con las letras: *a*, *b*, *c* y *d*. A continuación, determina el número de combinaciones impares y pares que son, respectivamente, 8 y 7.

Las combinaciones impares serán:
a, b, c, d, abc, abd, acd, bcd, que son ocho combinaciones (...)
las combinaciones pares serán:
ab, ac, ad, bc, bd, cd, abcd, que son siete combinaciones[14].

Determina las probabilidades de obtener cada uno de los dos sucesos.

La probabilidad de obtener número impar será:

$$\frac{8}{8+7} = \frac{8}{15}$$

La probabilidad de obtener número par será:

$$\frac{7}{8+7} = \frac{7}{15}$$ [15].

Presenta en forma de tabla idénticos resultados (número de combinaciones y probabilidades par e impar) de 2 a 51 bolas, 60, 70, 80, 90 y 100. Seleccionado, a continuación, los casos en que el número de bolas sean de 4 y 20, para hacer una comparativa de los resultados:

[12] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 38.
[13] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 38.
[14] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 39.
[15] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 39.

CON 2 BOLAS	CON 20 BOLAS
P (Impar) = 0,533333	P (Impar) = 0,500000
P (Par) = 0,466666	P(Par) = 0,499999
P (Impar) – P (Par) = 0,066667	P (Impar) – P (Par) = 0,000001

La conclusión a la que llega es:

> *Lo que demuestra que aun cuando siempre es mayor la probabilidad de obtener número impar respecto a la de obtener número par, a medida que va aumentando el número de piezas, va disminuyendo la diferencia entre las dos probabilidades contrarias y, cada una de ellas aproximándose más a ½ o a ser iguales*[16].

Esta última proposición está íntimamente relacionada con la idea de límite de la frecuencia relativa que caracteriza a la concepción frecuentista de la probabilidad. Encontramos así un importante y desconocido precedente español en esta cuestión.

Analizará también este asunto en el capítulo titulado «Repetición de acontecimientos». Es aquí donde reproduce el problema planteado por el Caballero de Meré a Pascal y comenta cuál es el error que se comete al resolverlo:

> (1º) *En la falta de exactitud al enunciar el problema.* (...) *Debiera decirse:* «*encontrar el número de golpes, con dos dados, en el que haya una probabilidad 671/1.296 de obtener seis y seis, y la probabilidad 625/1.296 de no obtenerlo*».
> (...)
> (2º) *Es un error el creer que las probabilidades resultantes de la repetición de acontecimientos son proporcionales a los números de los casos o suertes; cuando la relación y la proporcionalidad dependen de las probabilidades que representan estos casos o lances, no de su número en general. En lo que hay proporcionalidad es en el número de golpes o la repetición de actos y las probabilidades que de ellos proceden*[17].

Aplicaciones de la probabilidad compuesta: juego del *monte* y juego del *bacarrá*

Los dos siguientes capítulos los dedica a la probabilidad compuesta y a ejemplos de la cuestión. Reproduce en el primero de ellos los famosos principios de Laplace contenidos en su conocida obra *Ensayo filosófico sobre las probabilidades.*

[16] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, págs. 42-43.

[17] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, págs. 118-119.

Señala, en primer lugar, la ventaja que supone conocer las reglas de la probabilidad compuesta:

> *La consideración de las probabilidades compuestas abrevia mucho los cálculos, dispensando del desarrollo de todas las combinaciones posibles*[18].

De entre los ejemplos que de probabilidad compuesta propone, seleccionamos dos de ellos: el juego del *monte* y el juego del *bacarrá*. La justificación de la elección es sencilla: la complicación de los mismos y el gusto, de la que escribe, por los juegos de cartas.

El juego del monte

El juego del *monte*[19] se juega con una baraja española. El objetivo del mismo es ganar las apuestas hechas al acertar el palo o valor de la carta que se va a descubrir del mazo. En este juego hay un banquero y un número indeterminado de jugadores —puntos— que juegan contra él.

A partir de aquí analiza todos y cada uno de los posibles lances del juego:

• Primer lance: *Albur*.- El banquero saca dos cartas de la baraja y las coloca descubiertas sobre la mesa. Los puntos pueden apostar por cualquiera de las dos, debiendo ganar la que salga primero de las dos[20]. A continuación, el banquero comienza a sacar las cartas. Si la primera carta que se encuentra es igual a una de las del albur, se dice que está en *puerta*. El banquero gana entonces toda la apuesta de la carta contraria y no pierde más que las tres cuartas partes de la cantidad que ha salido.

Si en las dos cartas del albur han salido, por ejemplo, una sota y un dos, hay en la baraja otras sotas y otros tantos doses que pueden salir en puerta; es decir, seis cartas que causan puertas. A partir de aquí determina cuáles son las probabilidades:

> *La probabilidad de que una carta esté en puerta es: 6/38. La probabilidad contraria o de que no esté en puerta es: 32/38*[21].

Si una de las cartas sale en puerta, la ventaja del banquero es de 1/4 de la suma que hay en una carta o 1/8 de la que hay en las dos. Deduce a continuación, cuál sería en este caso la ventaja del banquero: (1/8) * (6/38).

---

[18] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 66.

[19] Nace en España, se extendió por América durante la conquista del continente y se convirtió en uno de los juegos más populares del legendario Far West.

[20] Es decir, si hay una sota y un dos, el que apuesta por la sota gana, si sale primero una sota que un dos.

[21] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Op. Cit, pág. 77.

En general, si representamos por n *el número de cartas que quedan en la baraja, la ventaja del banquero será:*

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{6}{n}=\frac{6}{8n}=\frac{0{,}75}{n}$$ [22].

De la expresión anterior, correctamente deduce que la ventaja del banquero aumenta a medida que el número de cartas que quedan en la baraja disminuyen.

• Segundo, tercero y cuarto lance: *Gallo, pollos* e *iguales*. Estos tres lances podrían considerarse un segundo, tercero y cuarto albur, respectivamente. También calcula para cada uno de ellos cuál sería la ventaja del banquero, que se muestra cada vez mayor, pues el número de cartas que quedan en la baraja va a su vez reduciéndose.

• Quinto lance: *En una*. Se verifica este lance cuando hay tres cartas sobre la mesa, una doble y la otra sencilla. El banquero dispone y acepta el punto que este último apueste por la sencilla, con la condición de que si ésta sale a la primera o se halla en puerta, sea nulo el lance. Ahora bien, si la que aparece es la del banquero, gana éste. Si no es ni una ni otra se seguirán tirando cartas hasta que gane uno de ellos[23].

Determina cuándo gana el banquero: cuando su carta sea la primera o cuando no siendo la primera la del punto ni la del banquero, se halle la de éste antes que la de aquél. Para pasar después a calcular la probabilidad total del banquero:

$$\frac{2}{n}+\frac{2n-10}{5n}=\frac{2n}{5n}=\frac{2}{5}$$ [24].

De la misma manera procede para determinar la probabilidad de que gane el punto. En primer lugar, expone cuáles son los dos casos que deben acontecer para este hecho: que no sea su carta la primera[25] y que no habiendo sido su carta la primera, salga antes que la del banquero. De aquí deduce:

La probabilidad del concurso de estos dos casos, que pueden considerarse como uno solo es, en general:

$$\frac{n-5}{n}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3n-15}{5n}$$ [26].

---

22 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 78.

23 Hay que advertir que en este lance y en los siguientes juega el banquero contra los puntos.

24 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Op. Cit, pág. 82.

25 Pues esto anularía el lance.

26 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Op. Cit, pág. 82.

La reunión de los tres acontecimientos, que gane el banquero, gane el punto y que el lance sea nulo constituye la certeza:

$$\text{en general, } \frac{2n}{5n} + \frac{3n-15}{5n} + \frac{3}{n} = \frac{5n}{5n} = 1$$ [27].

Siendo, por tanto, la ventaja del banquero, en general: $\frac{15-n}{5n}$.

• Sexto, séptimo, octavo y noveno lance: *En Dos, En Tres, En Cuatro* y *En Cinco*. Se distinguen estos lances del anterior En Una en que para que gane el banquero o el lance sea nulo, el juego se extiende a dos, tres, cuatro y cinco cartas, respectivamente. Determina en cada caso las diversas situaciones en las que gana el banquero, punto o el juego sea nulo. Para pasar después a calcular correctamente las probabilidades de cada uno de estos sucesos y finalizar determinando cuál es, en cada caso, la ventaja del banquero.

• Décimo y undécimo lance: *Elijan* y *Ganarán*. De estos lances interesante nos resulta destacar el siguiente párrafo, que a continuación se presenta, donde el autor determina cuándo puede establecerse la igualdad matemática en los juegos de cartas:

> *La igualdad matemática puede establecerse de tres modos. Primero: apostando cantidades iguales con suertes iguales. Segundo: apostando cantidades iguales con suertes desiguales; pero ignorando ambas partes de qué lado está la desigualdad. Tercero: apostando cantidades iguales con suertes desiguales, pero siendo la ganancia en razón inversa de la suerte*[28].

Sorprendente no resulta comprobar en este punto cómo ahora el autor emplea el término «suerte» para denominar lo que hasta el momento ha llamado «probabilidad». Este hecho supone un extraño y puntual retroceso terminológico, si tenemos en cuenta que uno de los méritos más destacables del autor reside en la elaboración de un moderno manual, que tiene las mismas aspiraciones de rigor que uno actual.

El juego del bacarrá

El bacarrá es un juego de cartas de origen francés. Se juega con dos barajas francesas; es decir, con 104 cartas. Hay 32 cartas (figuras y dieces) que valen 10 o cero (bacarrá). Las 72 restantes valen la puntuación que figura en las mismas (de 1 a 9).

Martínez Alcíbar nos resume las jugadas y sus puntuaciones derivadas:

---

[27] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 82.

[28] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 90.

Las figuras y las combinaciones de cartas que compongan 10, son cero o bacarrá, y se cuentan hasta 9, que es el mejor punto antes de llegar a 10, o después de pasar de 10, porque 11, 12, 13, etcétera, valen 1, 2, 3, etcétera[29].

Hay dos jugadores, el banquero y dos lados. A partir de aquí describe cuáles son las dos posibles actuaciones de cada uno, quedarse con las cartas que tienen o pedir nuevas: cuando los lados tienen un punto menor a 5, se debe pedir carta para tratar de mejorar el punto. Si tiene 6, 7, 8 y 9, lo mejor será no pedirla. La duda surge cuando alguno de los lados tiene 5.

Se ha creído que no debe pedir carta el que tenga 5, fundándose en la razón siguiente: si pide carta, puede salirle una figura o un 10, que son 0, lo que no altera el punto; puede salirle un 1, que mejora el punto; un 2, un 3, un 4, que también mejoran el punto; pero también le puede tocar un 5, un 6, un 7, un 8, un 9, que lo empeoran: de modo que excede la desventaja a la ventaja en 1, y como el total de casos es 13, la desventaja es = 1/13[30].

Mas comenta nuestro suspicaz autor:

Pero es preciso considerar esta desventaja, no aisladamente, sino con relación al punto que puede tener el banquero[31].

Correctamente calcula, suponiendo que el lado tenga 5, las 5.356 combinaciones que pueden formarse con 104 cartas tomadas de dos en dos.

Ahora es preciso averiguar cómo se distribuyen estas 5.356 combinaciones entre los diferentes puntos que puede tener el banquero[32].

Que pasamos a resumir en forma de tabla:

[29] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 91.

[30] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 92.

[31] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 92.

[32] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 92.

Bacarrá o cero	780
Uno	512
Dos	504
Tres	512
Cuatro	504
Cinco	512
Seis	504
Siete	512
Ocho	504
Nueve	512

Descontando los casos de 8 y 9, porque con estos puntos no pide carta el banquero, quedan 4.340 combinaciones del banquero.

Concluye el autor:

Ventaja del punto a tirar = 0,0625 + 0,0454 = 0,1079
Desventaja del punto a tirar = 0,0589
Diferencia o ventaja del punto = 0,0490
Luego hay en definitiva una ventaja de cerca de un 5% a tirar o pedir carta cuando tiene 5[33].

La ventaja del punto al tirar o desventaja del banquero es: 0,054 + 0,0625 = 0,179.

- Siendo $0{,}0625 = \frac{504}{4340} \cdot \frac{7}{13}$.

Pues, si el lado tira a 5, puede ocurrir que salga un 5, 6, 7, 8, 9 o un 10. Estos son seis casos de los trece que no le ofrecen ventaja. Luego, la desventaja del punto se ha reducido a 6/13 con tirar, siendo la diferencia de 7/13.

Además, para que el banquero tenga 6, hay 504 posibles combinaciones de un total de 4.340.

- Veremos cómo ha calculado ahora el valor: 0,054

$$0{,}054 = \frac{512}{4340} \cdot \frac{5}{13}$$

[33] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 98.

Si el punto tira a 5, le puede caer un 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1 o un 2. Luego, su desventaja de no tirar se ha reducido de 13/13 a 8/13, cuya diferencia es 5/13.

Además, para que el banquero tenga 7, hay 512 combinaciones del total de las 4.340.

El resto de capítulos los dedica a examinar numerosos ejemplos, no sólo relativos a los juegos de azar, sino de todos los actos y órdenes de la vida: físico, moral, político y económico. Para concluir que la probabilidad nos conduce a la verdad con mayor seguridad que cualquier otro sistema de raciocinio.

> *El que confía en sus negocios siguiendo estas reglas del cálculo de probabilidades cuando ellas le inducen a obrar al retirarse a descansar, puede dormir tranquilo, en la seguridad de que ha procedido con acierto*[34].

De las medias y de los límites a las variables aleatorias y a la distribución normal

Comienza Martínez Alcíbar el capítulo titulado «De las medias y de los límites» señalando la importancia del concepto de media:

> *La Teoría de las Medias sirve de base a todas las ciencias de observación; por ser tan sencilla y tan natural, es sin duda por lo que no se aprecia bastante el gran servicio que ha prestado al espíritu humano, con lo que le ha hecho adelantar*[35].

Es necesario, comenta el autor, preocuparse de las cantidades susceptibles de variación al tratar la idea de media.

> *En todo aquello en lo que se puede decir más o menos, hay necesariamente tres cosas que considerar, un estado medio y dos límites* (...).
> *La consideración de los límites, en cuanto completan la idea de media, sólo ha podido tomar alguna consistencia por la aplicación del cálculo de las probabilidades al estudio de los fenómenos naturales*[36].

Veamos cómo justifica la afirmación precedente y las consecuencias que de ella se derivan:

> *Supongamos que tratamos de medir la altura de una montaña y que en vez de encontrar la altura real, hemos encontrado en cada medición variaciones diferentes, pero sin que exista una causa que dé mayor facilidad a los errores en*

---

[34] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 148.

[35] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 152.

[36] MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 152.

más que a los errores en menos. La media de todos estos valores particulares será un número, que probablemente no es la altura real de la montaña, pero que se separará poco de ella. (...) *Encontraríamos a la larga tantas medidas menores como mayores que la altura buscada, y en lugar del valor de ésta, encontraríamos otro que se aproximará al verdadero, tanto más cuanto más se hayan repetido las mediciones. Además, los resultados no caen indiferentemente a un lado o a otro de la media, sino en un orden determinado* (...) *y si los resultados se indican en una curva, ésta coincidirá con la curva de posibilidad, en la que el mayor número de resultados iguales está indicado por la mayor altura de las ordenadas, ocupando el centro la mayor, que representa la media*[37].

Continúa el autor:

El mayor grupo lo tomarían los números que se apartaban menos de la media, y los demás grupos serían tanto más pequeños, cuanto más se aparten de la media (...).

De modo que la torpeza, o el azar, si preferimos esta palabra, porque lisonjea nuestro amor propio, procede con una regularidad que estábamos muy ajenos de poder atribuir. Si en vez de uno hay mil (...) *las mil medidas presentarán una regularidad notable y se agruparán según la ley de posibilidad*[38].

La distribución normal fue descubierta por De Moivre (1713), como aproximación de la distribución binomial, si bien fueron Gauss (1809) y Laplace (1812) quienes le dieron un gran impulso, estudiando el comportamiento de los errores de medición, fundamentalmente en astronomía.

De los textos anteriormente recopilados podemos deducir que Martínez Alcíbar conocía, al menos de forma intuitiva, el concepto de variable aleatoria y la distribución normal. Y el hecho que hoy en día supone el principal interés de esta distribución es la distribución límite de multitud de sucesiones de variables aleatorias, discretas y continuas. Encontramos así un importante y desconocido precedente español también en esta cuestión.

Si tuviéramos que resumir las contribuciones de Agustín Martínez Alcíbar a la estadística, bien nos valdrían sus propias palabras que nos disponemos a reproducir:

El estudio de los hechos estadísticos es inseparable del estudio de las medias, de las causas, del de la ley de los grandes números, y en general del de las principales cuestiones que sólo se resuelven por la aplicación de la Teoría de las Probabilidades. La estadística sólo puede considerarse como una parte del cálculo de probabilidades, y cuando éste se aplique a la economía política, tan

---

37 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, págs. 155-156.

38 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, pág. 157.

íntimamente relacionado con aquélla, es cuando el estudio de la producción y del consumo, de la formación y distribución de las riquezas, ascenderá a la categoría de una verdadera ciencia[39].

BIBLIOGRAFÍA

ABELLÁN, J. L. (1993): *Historia crítica del pensamiento español. V. VI: La crisis contemporánea I.* Espasa Calpe. Madrid.

AHEPE (2002): *Historia de la estadística y la probabilidad.* A.C. Madrid.

BERNOULLI, C. (1713): *Ars conjectandi.* Thurnisius. Basilea.

LÓPEZ DE AZCONA, M.; GONZÁLEZ CASNOVAS, I. y RIZ DE CASTAÑEDA, E. (Coordinadores). (1992): *Minería Iberoamericana: repertorio bibliográfico y biográfico. Vol. I, II, III, IV* (*1492–1892*). Instituto Tecnológico Geominero de España. Consejo Superior Ingenieros de Minas de España. Sociedad Estatal V Centenario.

GARCÍA SECADES, M. (2002)*: Contribuciones del probabilismo hispano a la conceptualización de la probabilidad.* Tesis Doctoral. Publicación en soporte electrónico: CD. Dep. Legal: M-22679. Universidad San Pablo CEU. Vicerrectorado de Ordenación Académica, Profesorado e Investigación. Madrid.

HUYGENS, C.: *De Ratiociniis in Ludo Alae.* La traducción castellana utilizada es la realizada por Mora Charles, M. S. (1989): *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos XVI y XVII.* Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco. San Sebastián.

LAPLACE, P. S. (1995): *Philosophical Essay on Probabilities.* Springer. New York. En español: *Ensayo filosófico sobre las Probabilidades.* Introducción y notas de Pilar Castillo. Alianza Editorial. Madrid.

LEIBNIZ, G. W. (1995): *L'estime des apparences. 21 Manuscrits de Leibniz sur les Probabilités, la Théorie des Jeux, l´Espérance de Vie.* Vrin. Paris.

MARTÍNEZ ALCÍBAR, A. (1867): *Elementos del cálculo de las probabilidades.* Imprenta de J. Fernández y Compañía. Madrid.

MIESE, VON R. (1946): *Probabilidad, estadística y verdad.* Espasa-Calpe. Buenos Aires.

PASCAL, B. (1963): *Oeuvres Completes.* Edición de Louis Lafuma. Éditions Du Seuil. Paris.

VEA MUNIESA, F. (1986): *Las matemáticas en los planes de estudios de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX.* En *Cuadernos de Historia de la Ciencia.* Universidad de Zaragoza. Zaragoza.

PÁGINA WEB: www.acanomas.com (27-03-2003).

Reglamento del juego *del Bacarrá* y del juego *del Monte*.

39 MARTÍNEZ ALCÍBAR, A.: Ibídem, págs. 157-158.

CAPÍTULO 17

Diego Ollero: el primer tratado moderno español sobre cálculo de probabilidades

JESÚS SANTOS DEL CERRO
Universidad de Castilla-La Mancha

Introducción

Este trabajo pretende abordar el estudio de la obra de un autor, Diego Ollero, que fue pionera en España en la introducción del tratamiento moderno del cálculo de probabilidades. Aunque existen importantes autores españoles anteriores a Diego Ollero tales como Tadeo Lope y Aguilar, José Mariano Vallejo, etcétera, hay que ubicar sus obras en un estadio premoderno del cálculo de probabilidades en cuanto a su tratamiento.

Además, merece la pena señalar que afortunadamente se están realizando notables esfuerzos en el estudio de la historia del cálculo de probabilidades, y en particular de las aportaciones de científicos españoles. No han sido muchos aún los trabajos que se han dedicado el estudio histórico de nuestro acervo científico sobre el cálculo de probabilidades. Nuestro objetivo principal consiste en realizar una aproximación inicial al análisis monográfico de un tratado de un científico español sobre el cálculo de probabilidades.

Precedentes y entorno inmediato del Tratado de Ollero

Tal como se ha destacado en trabajos previos sobre el origen del cálculo de probabilidades, las aportaciones principales de científicos españoles al nuevo cálculo se realizaron en los inicios o creación de esta disciplina, a mediados del siglo XVII, y consisten en la elaboración del concepto mismo de probabilidad propugnado por los doctores del probabilismo moral. En esta misma época hay que destacar la publicación del segundo tratado en la historia sobre el cálculo de probabilidades debido a Juan Caramuel.

Durante el siglo XVIII, las aportaciones son de muy escasa relevancia. Esto conducirá a que:

> *A finales del siglo XVII, y a diferencia de lo que ocurría en la vecina Francia o Inglaterra, el cálculo de probabilidades seguía sin ser estudiado y cultivado en nuestro país. No existía investigación y, por tanto, tampoco se crearon círculos de científicos donde se discutieran y comunicaran los nuevos adelantos. Sólo podemos constatar el empeño de algunos pocos matemáticos en difundir los conceptos y aplicaciones de la probabilidad. En esta época y a comienzos del siglo XIX aparecieron pequeños opúsculos dentro de manuales dedicados a la matemática aplicada*[1].

Aunque algunos de estos opúsculos representan importantes contribuciones al cálculo de probabilidades como el debido a José Mariano Vallejo, que constituye un antecedente de la noción del método de estimación máximo-verosímil, en general se trata de textos de pequeña extensión como los de Benito Bails (7 páginas) y el del propio José Mariano Vallejo (12 páginas), que tuvieron poca repercusión sobre la continuación de este tipo de estudios. Representan pues intentos más o menos aislados, aunque muy meritorios, en un ambiente social y científico poco proclive al florecimiento del cultivo de estas materias.

El siglo XIX sigue mostrándose no muy receptivo en suelo español ante los progresos de la disciplina moderna de la estadística y del cálculo de probabilidades. Aunque existen manuales dedicados a estas materias siguen siendo aislados y poco apreciados en distintos ámbitos tales como la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Es especialmente interesante en este punto la cita de José Echegaray y Eizaguirre en la que afirma:

> *No logran fascinarme ni las cándidas paradojas del Caballero de Meré, ni la paradoja llamada de San Petersburgo, que por ser de tierra del nihilismo y del pesimismo, debe ser espejo de paradojas, siquiera sea espejo ahumado, ni los*

---

[1] MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): «Historia de la probabilidad en España». *Revista de Historia Económica*. Año XV, Invierno 1997, n.º 1, pág. 166.

errores de Condorcet, ni los hermosos teoremas de Bernoulli, ni los sublimes tratados de Laplace, ni los de Gauss, ni todas las lucubraciones posteriores, que son todas ellas como esfinges matemáticas, que defienden el templo nebuloso de la Diosa Casualidad, la de más veleidades y más coqueterías entre todas las diosas[2].

En este entorno, a finales del siglo XIX, concretamente en el año 1879, el comandante de artillería Diego Ollero publica su *Tratado de cálculo de probabilidades* que representa el primer manual moderno sobre el cálculo de probabilidades en castellano en donde se recogen influencias claras, tal y como destacaremos más adelante, de ciertos científicos como Gauss, Laplace, Lacroix, Liagre, etcétera. Trataremos en este trabajo de abordar el estudio de la citada obra así como establecer los nexos entre dicha obra y las de los que recibe las influencias más notables.

Análisis y valoración del contenido del *Tratado de cálculo de probabilidades* de Ollero

Juan Sánchez-Lafuente en su *Historia de la estadística como ciencia en España* (*1500-1900*), destaca que:

> *En 1879 surge en la literatura científica española el primer* Tratado de Cálculo de Probabilidades[3].

Esta primera edición de 1879 no debe diferir de la cuarta edición de 1913, que ha sido sobre la que hemos trabajado, a juzgar por la estructura y contenido de los capítulos que analiza el profesor Sánchez-Lafuente de la primera. A pesar de las críticas que este último formula sobre distintos planteamientos y la falta de ciertas demostraciones, constata indirectamente el alto nivel del Tratado de Ollero.

> *La presencia del Tratado de Ollero nos da la sensación de que la estadística estaba más avanzada de cómo nos la presentan nuestros catedráticos de las Facultades*[4].

Efectivamente, el planteamiento metodológico y la aplicación de herramientas matemáticas que observamos en el Tratado de Ollero corresponden a los de una obra moderna cuyo nivel científico no difiere de las principales publicaciones sobre el cálculo de probabilidades de países como Inglaterra, Bélgica, Francia, etcétera, de los que como veremos después recibe influencias.

---

2 ECHEGARAY y EIZAGUIRRE, J. en MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): Ibídem, pág. 171.

3 SÁNCHEZ-LAFUENTE, J. (1973): *Historia de la Estadística como ciencia en España* (*1500-1900*) II. Estadística Española, nº. 60 y 61, pág. 111.

4 SÁNCHEZ-LAFUENTE, J. (1973): Ibídem, pág. 115.

En el Capítulo 1 se dedica a realizar demostraciones matemáticas relativas, principalmente, al cálculo integral. En este capítulo, que comprende aproximadamente las primeras 50 páginas del Tratado, estudia con gran detalle ciertos resultados matemáticos necesarios sobre cuestiones relativas al cálculo de probabilidades, la Teoría de Errores y el Método de los Mínimos Cuadrados.

Conviene destacar que la extensión y profundidad de este capítulo es superior al que realiza Liagre en su *Calcul des Probabilités et Theorie des erreurs*, del que Ollero recibió gran influencia. En este sentido, el texto de Ollero constituye un tratado moderno sobre el cálculo de probabilidades como apuntó el profesor Sánchez-Lafuente.

Uno de los aspectos más interesantes del texto de Ollero lo constituye, pues, este primer capítulo titulado «Recapitulación de las principales fórmulas que sirven de base al cálculo de probabilidades» en el que se tratan aspectos tales como distintos resultados de combinatoria, análisis complejo, cálculo integral, demostración de la fórmula de Stirling, estudio detallado de ciertas integrales útiles para el cálculo de probabilidades y el Teorema de Fourier así como algunos resultados relacionados. Esto constituye un aspecto diferencial respecto del tratamiento que realiza Liagre de estas cuestiones. Este último solamente repasa en el primer capítulo de su obra cuestiones relativas a la combinatoria y al binomio de Newton y, al final del libro, resume algunas fórmulas sobre el cálculo de probabilidades y la Teoría de Errores.

En este capítulo Ollero también realiza un estudio, en este caso mucho más breve que Liagre, de combinatoria. Liagre en cambio en su capítulo primero hace un análisis minucioso en el que demuestra varias expresiones relativas a combinaciones, permutaciones y variaciones a lo que añade múltiples ejemplos.

El Capítulo 2 lo dedica Ollero al análisis de la noción de probabilidad y los principios fundamentales del cálculo de probabilidades. Hay que advertir que tanto Liagre como Ollero se encuentran dentro de la tradición laplaciana. En este sentido Liagre afirma que ha tomado prestado algunos argumentos e ideas de otros autores de los que dice:

> *Tengo deudas concretas con Lacroix, Cournot y Quetelet*[5].

En particular, Lacroix comparte la concepción determinista de la naturaleza laplaciana y señala la ignorancia como causa epistemológica de la existencia del azar y por tanto de la probabilidad. Asimismo, el recurso a una inteligencia superior de que hace uso Laplace es también empleado por Lacroix:

---

[5] LIAGRE, J. B. J. (1852): *Calcul des Probabilités et Théorie des Erreurs, avec des applications aux sciences d´observation en general, et de la géodésie en particulier.* Alexandre Jamar, Bruxelles, pág. 11.

El evento, que aquí es la caída de lluvia, aunque incluso por quien observa los indicios, no está en absoluto no obstante abandonado al azar; resulta de un estado anterior de la atmósfera y de las consecuencias necesarias de este estado. Una inteligencia superior, que captara todas las condiciones, concluiría enseguida lo que debe ocurrir[6].

Por su parte Liagre mantiene una concepción filosófica de la probabilidad laplaciana. Ollero comparte un principio determinista o concepción determinista de la realidad similar a la visión de la naturaleza de la tradición laplaciana. Persiste también la idea de una inteligencia suprema:

Un conocimiento perfecto de estas leyes nos permitiría llegar a la solución exacta de cada cuestión, siempre que además estuviesen determinados con todo rigor los datos correspondientes[7].

Sin embargo, la ignorancia constituye el origen del concepto de probabilidad y, en definitiva, del cálculo de probabilidades. En este sentido, Ollero afirma que:

La imperfección de los medios de que podemos disponer para llevar a cabo las observaciones o experiencias es causa de que tanto los datos como las leyes sólo puedan determinarse aproximadamente; y si para comprobar los resultados se multiplica el número de estas experiencias, en cada una de ellas se cometerán evidentemente nuevos errores, pudiendo creerse, por tanto, que éstos no se hayan regidos por ley alguna y sí sometidos al azar[8].

El cálculo de probabilidades tratará de responder a cuestiones del tipo:

¿Qué grado de confianza debemos atribuir a los resultados de cada una de las observaciones de determinado género? (...) *¿qué procedimientos conviene seguir y con qué grado de precisión se podrá contar en la determinación de las demás cantidades que de ellas dependen*?[9]

Respecto de la definición de probabilidad tiene también un claro precedente laplaciano:

El procedimiento que se emplea para dar precisión matemática a estos diversos grados de posibilidad consiste en suponer o concebir descompuesta la prueba o experiencia que pueda dar lugar un suceso determinado en un cierto número de casos igualmente posibles, es decir, que no tengamos ningún motivo para suponer que uno de ellos se ha de verificar con preferencia a los otros[10].

---

6 LACROIX, S. F. (1864): *Traité Élémentaire du Calcul des Probabilités.* 4ª edición. Paris, pág. 6.

7 OLLERO, D. (1913): *Tratado de cálculo de probabilidades.* 4ª edición. Madrid, pág. 5.

8 OLLERO, D. (1913): Ibídem, pág. 5.

9 OLLERO, D. (1913): Ibídem, pág. 6.

10 OLLERO, D. (1913): Ibídem, pág. 54.

También en este segundo capítulo define la probabilidad compuesta de sucesos independientes, la probabilidad compuesta de sucesos no independientes en cuya definición utiliza lo que llama «probabilidad modificada del primer suceso», la probabilidad total y el Teorema de Bayes. De estos dos últimos hará un gran uso en varias demostraciones posteriores.

Respecto del Capítulo 3, lo dedica al estudio de la probabilidad de sucesiones o repeticiones de sucesos de un fenómeno, centrándose especialmente en fenómenos dicotómicos, en donde otorga un especial énfasis al Teorema de Bernoulli. Liagre lo analiza también en su capítulo tercero «De las leyes de la probabilidad matemática en la repetición de sucesos». No obstante Liagre antes de entrar al estudio de la Teoría de Errores y el Método de Mínimos Cuadrados, objeto por otra parte de los dos últimos capítulos (4 y 5) del *Tratado de Ollero*, desarrolla un conjunto de tópicos relativos a:

– Del valor venal de las suertes y de las probabilidades. Del contrato aleatorio y del juego en general (Capítulo 4)
– Determinación de las causas por las observaciones. Probabilidad de un nuevo suceso (Capítulo 5)
– Estudio de las causas. Medias y límites. Aplicaciones (Capítulo 6)
– De las leyes de la mortalidad y de la población. De las asociaciones. De los seguros sobre la vida y las cosas (Capítulo 7)

Los Capítulos 4 y 5 y últimos del texto de Ollero constituyen el objeto principal de su obra, siendo lo anterior preparación y exposición, y análisis de nociones necesarias para dicho objeto, que no es otro que la Teoría de Errores y el Método de los Mínimos Cuadrados.

> *Vamos a entrar de lleno en el objeto principal que nos hemos propuesto* (...) *Distinguiremos dos clases de cuestiones: la una, que comprende aquéllas cuyo fin es investigar los valores de las cantidades, valiéndose de mediciones u observaciones inmediatas; la otra, que abraza cuántas se proponen la determinación de estas mismas cantidades, cuando están ligadas, por leyes conocidas, a otras deducidas de la observación*[11].

En lo que respecta al Capítulo 4, tanto Ollero como Liagre expresan la influencia recibida principalmente de Gauss. Liagre, en concreto, cita a Gauss, Bessel, Baeyer, Encke, Gerling y Laplace como autores que:

> *nos han dejado sobre este objeto admirables modelos teóricos y prácticos*[12].

---

[11] OLLERO, D. (1913): Ibídem, pág. 91.

[12] LIAGRE, J. B. J. (1852): Op. Cit., pág. 11.

Ollero, por su parte, sigue a Gauss en la determinación de la función de probabilidad de los errores.

> *Para determinar esta función emplearemos el método seguido por Gauss, que está basado en el principio de la media diferencial*[13].

La conclusión, siguiendo a Gauss, a la que llega es que los errores tienden a una función de probabilidad normal o gaussiana.

El Capítulo 5 y último del Tratado de Ollero trata sobre los mínimos cuadrados, cuya notación, al igual que Liagre, es la utilizada por Gauss. La referencia de la obra de Gauss es *Teoría combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (1823).

Conclusión

El *Tratado de cálculo de probabilidades* de Diego Ollero constituye un hito importante en la introducción en España del cálculo de probabilidades moderno y demuestra una actitud atenta y receptiva por los avances científicos europeos sobre el citado cálculo en un siglo en el que, según algunos autores, se consuma en España uno de los períodos en que se produce un mayor distanciamiento en el progreso científico.

BIBLIOGRAFÍA

LACROIX, S. F. (1864): *Traité Élémentaire du Calcul des Probabilités.* 4ª edición. París.

LIAGRE, J. B. J. (1852): *Calcul des Probabilités et Théorie des Erreurs, avec des applications aux sciences d´observation en general, et de la géodésie en particulier.* Alexandre Jamar, Bruxelles.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): «Historia de la probabilidad en España». *Revista de Historia Económica*. Año XV, Invierno 1997, n.º 1.

OLLERO, D. (1913): *Tratado de Cálculo de Probabilidades.* 4ª edición. Madrid.

SÁNCHEZ-LAFUENTE, J. (1973): *Historia de la estadística como ciencia en España* (*1500-1900*) II. Estadística Española. n.º 60 y 61.

[13] OLLERO, D. (1913): Op. Cit., pág. 118.

CAPÍTULO 18
Estadísticos significativos

MIGUEL A. GÓMEZ VILLEGAS
Universidad Complutense de Madrid

Introducción

Los estadísticos tienen una comprensible inclinación a considerar toda la historia de la ciencia como un dar vueltas alrededor de la medida y del razonamiento estadístico. La frase es de Stigler (1986) pero sirve perfectamente para justificar el trabajo que se realiza a continuación.

Con esta justificación, de todos los autores se van a hacer unos breves comentarios biográficos y a recoger sus contribuciones más importantes a la probabilidad y a la inferencia estadística.

En años recientes se han publicado varios libros sobre la historia de la probabilidad y la estadística. Por no citar nada más que los que me son conocidos me gustaría nombrar el de Pearson (1978) *La Historia de la Estadística en los siglos XVII y XVIII*; el de Stigler (1986) *La Historia de la Estadística: la medida de la incertidumbre antes de 1900*; en castellano el De Mora (1989) *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad siglos XVI y XVII*; el de Droesbeke & Tassi (1990) *La historia de la Estadística*; el debido a Johnson & Kotz (1997) *Personalidades más importantes en la ciencia estadística*; el libro de HaId (1998) *Una historia de la*

Estadística Matemática desde 1750 a 1930; el de Stigler (1999) *La estadística sobre la mesa: la historia de los conceptos y métodos estadísticos*. La reimpresión del clásico libro de 1865 de Thodhunter (2001) *Una historia de la Teoría Matemática de la Probabilidad* y por último el de Heyde & Seneta (2001) *Estadísticos del siglo*.

John Graunt (1620-1674)

El primer estadístico que se va a considerar es precisamente el padre de la estadística. Su padre era comerciante en paños y él siguió la tradición familiar. No tuvo una formación en estudios superiores, pero participó en el ayuntamiento londinense siendo un hombre ecuánime al que sus coetáneos recurrían en busca de sus medidos juicios. Fue capitán y mayor de las «train'd band» los grupos armados que recorrían las grandes ciudades por la noche para salvaguardar el orden y que fueron inmortalizados por Rembrandt en su célebre cuadro *La ronda de noche*.

En 1662 publicó *Observaciones naturales y políticas hechas a partir de los boletines de mortalidad*, memoria que puede ser considerada como el inicio de la estadística en el sentido actual y por la que ha sido incluido en este artículo. Es elegido miembro de la Royal Society por Carlos II, no sin la oposición de algunos de los miembros de la Sociedad que criticaron sus méritos, a lo que el rey comentó que si todos los integrantes del gremio de los paños hubieran prestado los mismos servicios a la ciencia y al rey no dudaría en proponerlos a todos para formar parte de la misma. Inicialmente fue protestante, luego sociniano y posteriormente católico. Esto último le grangeó las enemistades de los grupos hegemónicos protestantes que le acusaron de haber sido uno de los provocadores del gran fuego que asoló Londres en 1666. Su negocio se quemó con el fuego y aunque sus amigos trataron de ayudarle, ya no pudo recuperarse económicamente.

La memoria de 1662 está basada en la información recogida en unos boletines que confeccionaban las distintas parroquias londinenses y que recogían información sobre el número de bautizados, sobre los fallecidos, las causas del fallecimiento, los muertos por la peste, si es que ésta se había producido, etcétera. Los boletines recogen una información preciosa para cualquier interesado en la medicina de la época. A partir de los datos contenidos en estos boletines, Graunt confecciona su memoria que contiene un prefacio y 12 capítulos. Acaba con una serie de conclusiones de las que extraigo las siguientes a título de ejemplo:

1. Cerca de un tercio de los niños concebidos vivos mueren en los primeros 5 años y alrededor del 36% por debajo de los 6.
2. Sea la peste grande o pequeña, la *city* está completamente repoblada al cabo de 2 años.
3. Hay en torno a 6,5 millones de personas en Inglaterra.

4. En Londres hay 14 varones para cada 13 hembras.
5. Adán y Eva han engendrado en 5.610 años a la población actual. Por lo tanto, el mundo no puede ser más antiguo de lo que en las Escrituras se presenta.
6. En todo matrimonio, unos con otros, se tienen 4 niños.

Las técnicas que utiliza Graunt para llegar a estas conclusiones son a la vez muy simples e ingeniosas, no pasan de la regla de tres, pero con ellas llega a conclusiones muy interesantes; así es el primer autor que señala la ligera desigualdad en los nacimientos a favor de los varones y es el primero que realiza una construcción de una tabla de vida aunque sea rudimentaria. Una traducción de la memoria al castellano puede verse en el libro de De Mora (1989) páginas 190 a 274, la versión original en inglés Graunt (1662) puede consultarse en la revista *Journal Institute Actuaries* 90, páginas 1 a 61, 1964.

No quiero abandonar al iniciador de la estadística como un mecanismo para la obtención de conclusiones sobre un colectivo a partir de datos parciales del mismo y por tanto al precursor de la estadística en el sentido que hoy mismo tiene, sin recoger una cita de su memoria para dar una idea del carácter de Graunt.

> *Se podría preguntar qué propósito tiene todo este laborioso bullir y tantear. A esto puedo responder en general, diciendo que aquéllos que no pueden comprender la razón de estas cuestiones, son impropios de preocuparse de plantearlas.*
>
> *Puedo responder preguntando por qué tantos han gastado su tiempo y su fortuna en el arte de fabricar oro, el cual, si fuera bien conocido, sólo lograría exaltar a la plata al lugar que ahora posee el oro; y si sólo fuera conocido de una persona, ese mismo único* adeptus *no podría ni se atrevería a gozar de él, sino que sería o bien el esclavo de algún príncipe, o el esclavo de algún sibarita o bien acechando de un lado para otro en la oscuridad para permanecer oculto o insospechado.*
>
> *Podría responder que se experimenta un gran placer al deducir tantas informaciones abstrusas e inesperadas de esos pobres boletines. Y produce un placer el hacer algo nuevo, sin apestar al mundo con voluminosas transcripciones.*
>
> *Pero responderé más seriamente, quejándome que mientras el arte de gobernar y la verdadera política es como preservar al mundo y a los súbditos en paz y plenitud, los hombres estudian sólo aquella parte de ella que les enseña cómo suplantarse y superarse unos a otros y cómo ganar el premio, no corriendo más deportivamente, sino dándose puntapiés.*

Thomas Bayes (1702?-1761)

Es poco lo que se conoce sobre la vida de Bayes. Para empezar existen dudas sobre el año de nacimiento, que algunos autores fijan el 1701. Estudió teología en la

Universidad de Edimburgo entre 1719 y 1722, fue ministro presbiteriano en Tunbridge Wells, al sureste de Londres, no se casó y se retiró de su ministerio en 1752. Parece haber llevado una vida tranquila dedicada a su ministerio y a sus actividades científicas, entre las que figuraron la teología, las matemáticas y la inferencia estadística.

En 1731 escribió el tratado titulado *Divina Benevolencia o un intento de probar que el fin principal de la Divina Providencia es la felicidad de sus criaturas*, una contribución a la discusión del objetivo principal de Dios.

En 1734 el obispo George Berkeley ataca al cálculo diferencial de Newton en un tratado *El Analista, o un discurso dirigido a un matemático infiel. Donde es examinado si el objeto, principios y conclusiones del análisis moderno son concebidos de manera diferente, o deducidos de manera más evidente, que los misterios religiosos y los puntos de la fe*. Berkeley argumentaba que los *evanescentes*, los infinitésimos en lenguaje actual, no presentan una distinción clara entre cero y cantidades infinitamente pequeñas, y como indica de manera sarcástica en el título que los fundamentos del método de los diferenciales de Newton, no son más evidentes que los de la religión cristiana.

Entre las réplicas a Berkeley, aparece una en 1736 firmada por Rayes bajo el pseudónimo de John Noon con el título *Una introducción a la Teoría de las Fluxiones y una defensa de los matemáticos contra las objeciones del autor de* El analista, en este trabajo Bayes hace una cuidadosa deducción del significado de los *fluxiones* y demuestra algunos teoremas básicos relativos a1 cálculo con los diferenciales.

Los dos tratados son las únicas obras que nos han llegado publicadas por Bayes. La segunda demuestra que él era un hábil matemático y presumiblemente le valió ser elegido Fellow de la Royal Society en 1742.

A la muerte de Bayes, su familia envía a Price, Fellow de la Royal Society y ministro presbiteriano también, los documentos sobre matemáticas dejados por Bayes, para que Price los estudie y decida sobre su importancia. Price recibe un trabajo en el que Bayes demuestra la divergencia de la serie $\log(n!)$ corrigiendo a De Moivre que había dicho que era convergente aunque muy lentamente, y el célebre Ensayo en el que Bayes determina por primera vez un intervalo de confianza bayesiano para el parámetro de una distribución de Bernoulli a partir de n repeticiones del experimento de Bernoulli. Price se da cuenta de la importancia del descubrimiento de Bayes y lo manda al secretario de la Royal Society para su publicación en la revista de la academia inglesa, véase Bayes (1764) añadiéndole una carta de presentación a Canton, el secretario de la academia, y comentarios y extensiones.

No se sabe por qué, Bayes no envió en vida su resultado para publicación, quizá porque su finalización fue cinco meses antes de su muerte. Más verosímil parece el que se necesitaba aproximar la integral de la función beta incompleta, para su aplicación numérica, y la aproximación que se le ocurrió a Bayes no era muy buena, con lo que daba lugar a un número demasiado alto de repeticiones del experimento de Bernoulli para obtener con precisión el intervalo sobre la probabilidad de éxito. En cualquier caso, la formulación del problema es precisa, sus matemáticas son correctas y el paso que da para pasar de determinaciones directas de probabilidad a la resolución del problema inverso, como es el de inferencia que resuelve, es de gigante.

El ensayo contiene cuatro partes: el enunciado del problema, dos secciones y un apéndice.

El enunciado del problema está expuesto con total claridad.

> Dado el número de veces que un suceso ha ocurrido o fallado se quiere calcular la probabilidad de que la probabilidad de su ocurrencia en un solo experimento esté entre dos valores de probabilidad conocida.

Se pretende por tanto calcular la probabilidad de

$$\Pr\left\{a < \theta < b \,\middle|\, X = r\right\}$$

dadas a, y b constantes, cuando X tiene distribución binomial de parámetro θ. Es decir, si se lanza consecutivamente una moneda n veces y resultan r caras, se pretende calcular la probabilidad de que θ esté entre dos valores prefijados.

Desde el tiempo de Jacobo Bernoulli se sabía, que si se conoce el valor de θ la probabilidad de obtener en n lanzamientos r caras es

$$\Pr\left\{X = r \,\middle|\, \theta\right\} = \binom{n}{r} \theta^r (1-\theta)^{n-r}$$

Pero esto es una afirmación de probabilidad directa; si se sabe el valor de θ se puede calcular la probabilidad de que se observen r caras en n repeticiones. Además también Jacobo Bernoulli intuía que cuantas más repeticiones se hicieran, más seguro se debía estar del valor de θ. Pero esto era realmente un problema de estimación. Bayes tenía que dar una distribución de probabilidad sobre θ y calcular la distribución de probabilidad *a posteriori* o final sobre θ.

Esto es lo que Bayes logra, mediante la expresión

$$\pi(\theta \mid X = r) = \frac{\pi(\theta)\, P(X = r \mid \theta)}{\int_0^1 \pi(\theta)\, P(X = r \mid \theta)\, d\theta}$$

que constituye la forma continua del Teorema de Bayes. Y proponiendo como distribución de probabilidad la distribución uniforme en el intervalo (0,1).

$$\pi(\theta) = I_{(0,1)}(\theta).$$

Mediante estas dos expresiones calcula

$$\Pr\{a < \theta < b \mid X = r\} = \frac{\int_a^b \pi(\theta)\, P(X = r \mid \theta)\, d\theta}{\int_0^1 \pi(\theta)\, P(X = r \mid \theta)\, d\theta}$$

esta expresión es el cociente de dos funciones beta que Bayes se ve obligado a aproximar y que como se ha anticipado, el no haber logrado una aproximación suficientemente buena quizá le desanimaron y le llevaron a no publicar su resultado.

Una discusión más exhaustiva del ensayo puede verse en Gómez Villegas (1994) y (2001). La traducción por primera vez al castellano del ensayo se hizo con motivo del probable aniversario de su nacimiento y está en Gómez Villegas y otros (2001).

Laplace (1749-1827)

Pierre Simon de Laplace nace en Beaumont-en-Auge, en Francia en la región de Calvados. En 1765 ingresa en la Facultad de Artes de Caen. Con 23 años ya pertenece a la Academia Francesa. En 1774 publica *Memoria sobre la probabilidad de las causas por los sucesos*.

Es un científico que vive durante la Revolución Francesa, en 1789 se produce la toma de la Bastilla, en 1791 la matanza del campo de Marte y en 1793 la ejecución de Luis XVI. Laplace logra sobrevivir a la revolución.

Originariamente iba a dedicarse a la carrera sacerdotal pero pronto descubre su predisposición para las matemáticas y en 1771, apoyado por De Alambert obtiene plaza de profesor en la École Militaire donde dio clases a Napoleón. Alrededor de 1795 participó activamente en la organización de los planes de estudios de la École Normal y de la École Polytecnique, las dos grandes creaciones de la Revolución Francesa. En 1796 presenta a Napoleón el informe sobre el *Progreso de la Ciencia* como secretario permanente que era de la Academia. En 1802 publica el tercer volumen de su *Mecánica Celeste*. En el 1812 descubre el teorema central del límite y publica su *Teoría Analítica* de la que se realizan tres ediciones en vida de Laplace; la citada de 1812, la de 1814 y la de 1825. En 1820 participa en la Comisión de Longitudes contribuyendo a introducir el sistema métrico como método de medida y en 1779 fue ministro del interior con Napoleón durante seis meses.

Los trabajos de Laplace pueden dividirse en tres grupos: los realizados entre 1770 y 1780 en que se dedica a ecuaciones en diferencias y series, probabilidad, Teorema de Bayes, estudio de la proporción de nacimientos y funciones de pérdida para estimación. Los realizados entre 1780 y 1805 sobre las matemáticas aplicadas a la física del sistema solar y la mecánica celeste, y por último los realizados entre 1805 y 1827 que son trabajos sobre funciones características, el Teorema Central del Límite y la justificación bayesiana del Método de los Mínimos Cuadrados.

Como se ha dicho, con referencia a la historia del cálculo de probabilidades y la estadística, sus dos trabajos más importantes son la *Memoria sobre la probabilidad de las causas por los sucesos* de 1774 y la *Teoría Analítica de las Probabilidades* publicada en 1812.

Laplace era un convencido de la aplicabilidad universal del cálculo de probabilidades que él resumía en la frase «la probabilidad es básicamente el sentido común, reducido a cálculo».

La obtención del Teorema de Bayes en el caso continuo está contenida en el Problema I de la Sección III donde aparece:

> *Si una urna contiene infinitas bolas blancas y negras en proporción desconocida, y se extraen* p+q *bolas de las cuales* p *son blancas y* q *son negras se trata de determinar la probabilidad de que al hacer una nueva extracción la bola sea blanca.*

Él aplica la expresión

$$\pi(\theta \mid y) = \frac{f(y \mid \theta)}{\int_0^1 f(y \mid \theta)\, d\theta}$$

donde emplea como distribución de y la binomial de parámetros $p + q$ y θ, es decir,

$$f(y \mid \theta) = \binom{m+n}{n} \theta^n (1-\theta)^q$$

por lo tanto, redescubre la expresión continua de la Fórmula de Bayes, para el caso binomial y cuando la distribución *a priori* es la uniforme en el intervalo (0,1). A continuación, aborda el problema de la probabilidad inversa calculando la probabilidad final del intervalo

$$\Pr\left\{\left|\frac{p}{p+q} - \theta\right| \le \varepsilon \mid p, q\right\}$$

y aproxima la distribución final beta por la normal, para terminar comprobando que cuando p y q son grandes se tiene que

$$\Pr\left\{\left|\frac{p}{p+q} - \theta\right| \le \varepsilon \mid p, q\right\} \to 1.$$

Con referencia a la Teoría Analítica desearía comenzar con una pequeña anécdota. La primera edición está dedicada a Napoleón y su dedicatoria dice:

A Napoleón el Grande. Sire, La benevolencia con la que vuestra majestad se ha dignado acoger el homenaje de mi Tratado sobre Mecánica Celeste *me ha inspirado el dedicarle también esta obra sobre el cálculo de probabilidades. Este cálculo delicado se aplica a las cuestiones más importantes de la vida, que en su mayor parte no son más que problemas de probabilidad. Desde este punto de vista debe interesar a su majestad cuyo genio sabrá apreciar y se dignará apoyar todo lo que pueda contribuir al progreso de las luces, y a la prosperidad pública, yo suplico acepte este nuevo homenaje dictado por el más vivo reconocimiento, y por los sentimientos profundos de admiración y de respeto, con los cuales yo soy Sire, de vuestra majestad, el más humilde y obediente servidor y fiel súbdito, Laplace.*

Fue bastante criticado por sus coetáneos, particularmente por los científicos, que ya adivinaban la transformación del revolucionario en dictador, de hecho las siguientes ediciones ya no contienen esta dedicatoria. La *Teoría Analítica* fue a finales del siglo XXI, el libro que más influencia produjo sobre la Teoría de la Probabilidad. La definición que contiene sobre lo que es probabilidad es la siguiente:

La Teoría de la Probabilidad consiste en reducir todos los sucesos que pueden tener lugar en una circunstancia dada, a un cierto número de casos igualmente posibles, es decir tales que nosotros seamos totalmente indecisos respecto a su existencia y a determinar entre estos casos, el número de los que son favorables al suceso cuya probabilidad se busca. El cociente de este número entre los casos posibles, es la medida de esta probabilidad que no es más que una fracción cuyo numerador es el número de casos favorables, y cuyo denominador es el número de casos posibles.

Como se ve, es la regla clásica de determinación de probabilidades como casos favorables entre casos posibles al suceso en cuestión en el caso en que exista equiprobabilidad.

La obtención del Teorema de Bayes en el caso discreto, está contenida en el tercer principio, página 182 y está en la forma

$$P(C_i|E) = \frac{P(E|C_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|C_i)}$$

donde llama C_i a las causas y E al suceso, expresión correcta, cuando todas las causas son equiprobables y cada una tiene por tanto de probabilidad $1/n$.

La expresión del Teorema en el caso continuo cuando la distribución *a priori* es general, está también en la *Teoría Analítica* página 364, y viene recogida mediante

$$P\left\{\theta < x < \theta' \middle| X = r\right\} = \frac{\int_{\theta}^{\theta'} yz\, dx}{\int_{0}^{1} yz\, dx}$$

que en lenguaje actual se escribe

$$P\left\{a < \theta < b \middle| y\right\} = \frac{\int_{a}^{b} \pi(\theta)\, f(y|\theta)\, d\theta}{\int_{0}^{1} \pi(\theta)\, f(y|\theta)\, d\theta}$$

donde $\pi(\theta)$ es la distribución inicial y $f(y|\theta)$ el modelo con el que se distribuyen los datos.

Quizá de las contribuciones de Laplace la más importante es a la Teoría de la Probabilidad y es el actualmente llamado Teorema Central del Límite, que fue leído ante la Academia el 9 de abril de 1810, y en el que establece que cualquier suma o media (no únicamente el número de éxitos en n experimentos) será, si el número de observaciones es suficientemente grande, aproximadamente distribuido como una normal. Además también había tenido éxito en la idea de sustituir un conjunto de observaciones por su media, pero le faltó reconocer la conexión entre estas dos líneas de trabajo. En 1809 Gauss proporcionó la clave.

Karl Pearson (1857-1936)

Nace en Londres. Hijo de un abogado, estudia en el University College School. En 1875 estudia matemáticas en el King College de Cambridge y con 22 años viaja a Alemania donde estudia leyes, física y metafísica. Entre 1880 y 1884 es profesor de matemáticas en el King College y el University College y en 1911 fue el primer profesor Galton de eugenesia. Era un darwinista convencido y un ferviente socialista. En 1890 se producen dos sucesos que marcarán la trayectoria de K. Pearson; Galton publica su *Herencia Natural* donde están incluidos los trabajos sobre correlación y regresión y Weldon se incorpora como catedrático a la Cátedra de Zoología en el University College. Las teorías expuestas sobre la evolución son sujeto de contrastes mediante las ideas de correlación y regresión, así como las consultas que sobre las distintas especies le formula Galton. Esto le lleva a impartir entre 1891 y 1892 conferencias sobre «La Geometría de la Estadística» en el Gresham College introduciendo los estigmogramas, entigramas, histogramas, cartogramas, estereogramas, etcétera como representaciones de los datos estadísticos con el fin de obtener conclusiones sobre los mismos. Puede decirse que tras estas conferencias ha comenzado una nueva época en la teoría y la práctica estadística.

Entre 1893 y 1906 publica cien artículos sobre la Teoría Estadística y sus aplicaciones. La capacidad de investigación de K. Pearson parece asombrosa, a lo largo de su vida publicó más de 650 artículos, de los cuales más de 400 están dedicados a diversos aspectos de la estadística. Editó seis revistas de investigación y fue cofundador, junto con Weldon y Galton de la revista *Biometrika*, en 1901, fundada inicialmente para publicar trabajos sobre la herencia y que posteriormente ha ido recogiendo trabajos de estadística aplicada a la biología. Ese mismo año publica sus *Tablas para estadísticos y biométricos* confeccionadas para servir de ayuda en la aplicación de la estadística.

En 1905 publica un artículo titulado «Sobre la Teoría General de la Asimetría, la Correlación y la Regresión no lineal». En 1914 Fisher, al que luego nos referiremos, empieza su polémica con él. Concretamente cuando Fisher trata de publicar un artículo en *Biometrika* sobre el coeficiente de correlación muestral para m.a.s. de una población normal bivariante. El artículo fue referenciado por Weldon como biólogo y K. Pearson como estadístico y le fue negada su publicación. Posteriormente Fisher diría que había sido supervisado por un biólogo que no sabía estadística y por un estadístico que no sabía biología.

En 1925 K. Pearson funda los *Annals of Eugenics* y en 1932 anuncia su retiro. El University College a su retiro divide la Cátedra de Estadística en dos, una la Cátedra Galton de Eugenesia que desempeñó Fisher y la otra en una Cátedra de Estadística que fue desempeñada por Egon Pearson, el hijo de K. Pearson, quien después desarrollaría, junto con Neyman, la Teoría de los Contrastes de Hipótesis Estadísticos. En 1934, fruto de los trabajos del laboratorio de estadística de K. Pearson, aparece la primera versión del hoy clásico libro *Las tablas de la función beta incompleta*, con respecto al cual hay una anécdota que pone de manifiesto el carácter de Pearson. Atraídos por el prestigio del laboratorio del University College muchos estadísticos pasaban por él con el fin de actualizar sus estudios, y K. Pearson los invitaba a trabajar en lo que estuvieran haciendo, a la sazón determinar las tablas de la función beta incompleta. Uno de los profesores visitantes, viendo el duro trabajo que K. Pearson les imponía fue a comunicarle, que por lo que a él le atañía la función beta podía seguir incompleta durante muchos años. Otra muestra de la personalidad de K. Pearson la constituye el hecho de que en su primera época, cuando descubrió que los valores de la ruleta no eran aleatorios, escribió una carta al gobierno francés solicitando el cierre de los casinos y recomendándole el envío de los fondos así recaudados a la Academia Francesa para que ésta fundara un laboratorio dedicado al estudio de la probabilidad y la estadística.

Citar todas las contribuciones de K. Pearson a la Teoría de la Probabilidad y a la inferencia estadística es punto menos que imposible. Sólo señalaré las más importantes:

- Introduce su familia de curvas y ajusta sus parámetros introduciendo el método de los momentos. Esta familia de curvas son las soluciones de una ecuación diferencial e incluye a las distribuciones, beta asimétrica, la beta simétrica, la gamma y la normal, entre otras.
- Define con precisión el coeficiente de correlación lineal precisando las ideas introducidas por Galton.
- Desarrolla el Método de la 2 de Pearson para medir el ajuste entre unos datos y una distribución de probabilidad, en una memoria publicada alrededor del 1900, y lo generaliza a las tablas de contingencia.

William Sealy Gosset (Student) (1876-1937)

Nace en Canterbury (Inglaterra) y estudia química y matemáticas en el New College de Oxford. En 1889 inicia su trabajo como asesor en una fábrica de cervezas en Dublín. El trabajo que realiza puede ser calificado como el responsable del naciente control de calidad de la firma. En esta línea trabaja sobre la Ley de Errores y publica una nota interna, en lenguaje claro y accesible para no expertos, sobre la distribución de los errores. Precisamente la imposibilidad a que la empresa sometía a sus empleados de comunicar los resultados que éstos obtenían, le lleva a publicar los mismos con el pseudónimo de Student. En 1905 contacta con K. Pearson e inicia una correspondencia con él que se prolongará hasta el fin de sus días. De 1906 a 1907 pasa un año sabático en el laboratorio de K. Pearson en la University College de Londres, donde estudia la aproximación de la distribución binomial por la distribución de Poisson y rechaza formar parte del laboratorio del University College por sus tres hijos que en su opinión no podían ser debidamente mantenidos con el sueldo de la universidad, parece que los sueldos bajos en la universidad no son de ahora.

Mantuvo una amplia correspondencia con K. Pearson, con E. Pearson y con Fisher, el último estadístico que vamos a comentar, correspondencia que recientemente ha sido publicada y que ha elevado la estatura estadística de Student. Muere a los 61 años en Londres de un ataque al corazón.

A Student se le debe:

- La demostración de la convergencia de la distribución binomial a la distribución de Poisson.
- Si $X \sim N(\mu,\sigma)$ con m.a.s. de tamaño n obtiene la distribución de la v.a.

$$\frac{(\overline{X}-\mu)}{S/\sqrt{n}} \sim T_{n-1}$$

estableciendo su distribución. Donde $\bar{X}$ es la media muestral y S^2 la cuasivarianza muestral.

- Para muestras correlacionadas obtiene la expresión de la varianza de la media muestral

$$V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}(1 + (n-1)\,\rho)$$

con ρ el coeficiente de correlación de la población.

- Introduce la función de potencia de un contraste dado por la región crítica *RC* mediante la función

$$\beta(\theta) = \Pr\left\{RC \middle| \theta\right\}$$

Student era para los estadísticos un consultor en una fábrica de cervezas y para los fabricantes de cerveza, alguien que dedicaba su tiempo libre a la estadística. Podemos añadir que para nosotros es un ejemplo a ofrecer a las nuevas generaciones de estadísticos, deseosos de lograr aplicaciones sin menoscabo de un alto nivel teórico.

Ronald Aylmer Fisher (1890-1962)

Ronald Aylmer Fisher nació en East Finchley cerca de Londres. Su familia se dedicaba a los negocios pero él rompió la norma. Acudió a la escuela en Stanmore y posteriormente estudió en Harrow. Desde sus comienzos tuvo problemas con su vista. Algunos de sus discípulos han atribuido su habilidad para analizar mentalmente situaciones complicadas a este hecho. En su juventud tuvo prohibido leer con luz artificial y se le recomendó no fijar la vista demasiado.

Cuando dejó Harrow las finanzas familiares no estaban muy bien; sin embargo, gracias a una beca pudo estudiar en Gonville en el Casius College de Cambridge donde se graduó entre 1909 y 1912 y al año siguiente fue lector de Física Matemática. Durante el tiempo que estuvo en Cambridge también estudió biometría y genética.

En opinión de Kendall, la manera de combinar observaciones en astronomía fue lo que le llevó a interesarse por las distribuciones de probabilidad. En su primer artículo, en 1912 utiliza el valor absoluto para ajustar curvas de frecuencias siguiendo las ideas de K. Pearson.

Entre 1913 y 1915 trabajó en una compañía de inversiones pero sin ningún tipo de vocación. Durante la I Guerra Mundial le dispensaron de hacer el servicio militar por su vista y entre 1915 y 1919 se dedicó a la enseñanza en escuelas públicas, trabajo este último que simultaneó con la investigación, pues en 1916 escribió un artículo demostrando que las Teorías de Mendel no se ven rechazadas por los datos; lo referencian K. Pearson como estadístico biométrico y Punnett en sus aspectos genéticos.

En 1919 se le ofrece trabajar bajo K. Pearson dirigiendo el laboratorio Galton, o bien asesorar estadísticamente en la Rothamsted Experimental Station. Optó por esta segunda salida, más en consonancia con su propia filosofía de vida, ya que pensaba que, puesto que no podía contribuir al esfuerzo de guerra directo, debido a su visión deficiente, el mantenimiento y mejora de las granjas inglesas podría ser su particular contribución a la misma.

En 1922 escribe *La fundamentación matemática de la estadística teórica* donde introduce la noción de modelo estadístico y los conceptos de consistencia, eficiencia, precisión, validación, verosimilitud e información. Al enviar este artículo a Student se consolida su relación con éste, que ya se había iniciado en 1912. Precisamente es Student quien le da la idea de representar las observaciones como un vector de n dimensiones, esto junto a la intuición geométrica de Fisher le va a permitir llegar a obtener la distribución del coeficiente de correlación bajo la hipótesis de normalidad.

Fisher se unió a Rothamsted en octubre de 1919 y allí desarrolló el análisis de la varianza y los principios del diseño de experimentos; inicialmente no conoce la distribución del cociente de los cuadrados (hoy conocida como Distribución F de Fisher-Snedecor) por lo que aproxima su logaritmo por una distribución normal.

En 1925 aparece su primer libro *Métodos estadísticos*, que da la impresión de ser un manual para aprendices más que un libro de texto. No obstante, precisamente en esto radicó su éxito, ya que a lo largo del mismo anima a los lectores a trabajar los ejemplos. Problemas prácticos, técnicos, teóricos y filosóficos se discuten a través de ejemplos numéricos y en él se aleja de los matemáticos diciendo que en estadística hay que hacer razonamiento inductivo en lugar de deductivo, para lo cual es necesaria, sin embargo, una gran formación matemática pero aplicada a los datos con los que se trabaja.

En 1930 formula la Teoría Genética de la Selección Natural, en la que apoya y modifica la Teoría de la Evolución de las Especies de Darwin. Al año siguiente realiza su primer viaje a EE.UU, concretamente a Iowa, invitado por Snedecor.

En 1933 acepta la Cátedra de Eugenesia en el University College de Londres, trabajando a fondo en genética.

En 1938 viaja a la India invitado por Mahalanobis. Durante esta época desarrolla aspectos de la inferencia inductiva.

En 1943 viaja a EE.UU por segunda vez como profesor visitante de la Universidad de Carolina del Norte. En 1947 funda la Sociedad Biométrica Internacional.

Durante 1953 y 1954 es presidente de la Royal Statistical Society y dedica su intervención presidencial a glosar las contribuciones de los primeros estadísticos.

En 1956 publica *Métodos estadísticos e inferencia científica*.

Se retira en 1957 a la edad de 67 años y se marcha a Australia como investigador senior en el CSIRO (Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization) que dirigía Cornish, donde muere en 1962 como consecuencia de un cáncer de boca.

Como se ha dicho, en su primera época trabajó sobre la Teoría de la Evolución de Darwin, lo que le llevó a escribir el ya citado artículo sobre las Leyes de Mendel, que trató de publicar en *Biometrika*, revista dirigida por K. Pearson, y que fue rechazado. Tampoco lo logró en la Royal Society, por lo que por sugerencia del mayor Darwin (hijo de Charles Darwin) lo sometió a la Royal Society de Edimburgo, siendo aceptado allí en 1918.

Los problemas con K. Pearson continuaron, pues en 1920 Fisher escribió sobre el error probable del coeficiente de correlación, que también sometió a *Biometrika* y fue rechazado, por lo que decidió no volver a someter nada a esta revista. Como ya se ha comentado, esto le llevó a enemistarse con K. Pearson, enemistad que aumentó cuando Fisher le corrigió los errores que había cometido en el número de grados de libertad de la 2 para el problema de ajuste entre unos datos y una distribución con parámetros desconocidos, señalando también que el método de los momentos, que había sido introducido por K. Pearson para estimar los parámetros, no bastaba para asegurar la convergencia del estadístico a la χ^2_{k-1-r} siendo r el número de parámetros estimados.

Fisher mantenía que la inferencia en la ciencia no era una materia de decisión y que por tanto, criterios basados en pagos de cualquier tipo no debían de ser utilizados. En esta línea introdujo la distribución fiducial que él sostenía que podía utilizarse en muchos casos como una distribución de probabilidad *a posteriori* respecto a una *a priori* no informativa. A pesar de todo, en su libro de 1956 *Métodos estadísticos e inferencia científica*, Fisher se muestra partidario de la aproximación bayesiana, cuando la información sobre θ es lo suficientemente extensa para venir dada a través de una distribución de probabilidad, calculando la distribución *a posteriori* mediante el Teorema de Bayes. En otro caso era partidario del argumento fiducial basado en un estadístico suficiente.

En relación con los contrastes de hipótesis, Fisher no suponía hipótesis alternativa a la hora de plantear un contraste; simplemente afirmaba que una observación acreditaba o no un valor de la hipótesis nula H_0: $\theta = \theta_0$ sin ninguna referencia a cuál pudiera ser H_1; eso sí, trabajando de forma condicional al valor observado. En el problema de contrastar la diferencia de medias en poblaciones normales $X \sim N(\theta_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\theta_2, \sigma_2^2)$ con varianzas desconocidas y distintas (Problema de

Behrens-Fisher), Fisher obtuvo una distribución fiducial para la distribución de $\theta_1 - \theta_2$ que dependía del parámetro $\delta = \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ y que ponía de manifiesto que desde el punto de vista de la distribución en el muestreo, no se podía determinar el nivel de significación para todo valor de δ como afirmaba la Teoría de Neyman-Pearson.

Finalmente, como muestra de su carácter, recogemos de W. G. Cochran una demostración hecha por Fisher:

> *En una de sus clases citó sin demostrar un resultado. Tras de varios intentos sin que me saliera le pedí, en su despacho, si podía hacerme la demostración. Me dijo que en algún sitio la tenía archivada; abrió varios cajones y decidió que era mejor obtenerla de nuevo. Nos sentamos y escribió la misma expresión de la que yo había partido. El camino obvio va en esta dirección, dijo, y escribió una expresión de dos líneas. Ahora supongo que hay que desarrollar esto, y puso una ecuación que ocupaba tres líneas. Miró la expresión y comentó: el único camino parece ser éste, y obtuvo una expresión de cuatro líneas y media. Hubo un silencio de unos 45 segundos y dijo que el resultado se debe seguir de esto, y escribió debajo la expresión que yo le había preguntado. La clase había terminado.*

Gracias a Fisher el estudio de la estadística se introdujo en las universidades. No olvidemos que salvo en el University College London (U.C.L.), donde ya había cursos de estadística gracias a la personalidad e iniciativa de Karl Pearson, la estadística como tal no aparecía en los programas de las diversas disciplinas científicas.

Curiosamente, como ya hemos mencionado, nunca llegó a ser catedrático de estadística sino de genética en el University College de Londres.

En cuanto a las contribuciones a la inferencia estadística en opinión de L. J. Savage (1976, 1981) lleva menos tiempo decir a qué partes de la estadística Fisher no contribuyó que a las que sí lo hizo. No obstante las aportaciones son las siguientes: en primer lugar los tres libros que hemos citado, *Los métodos estadísticos*, *El diseño de experimentos* y *La inferencia estadística* y que recientemente han sido editados por Bennett (1990).

- La diferencia entre muestra y población.
- El método de la máxima verosimilitud.
- La determinación correcta del número de grados de libertad de la 2 en los problemas de ajuste entre una muestra y una distribución.
- El diseño de experimentos.
- El análisis de la varianza.

Del diseño de experimentos decía «Un examen cuidadoso del proceso de recogida de datos, o diseño experimental, puede incrementar la precisión de los resultados en diez o doce veces, empleando el mismo tiempo y esfuerzo. Consultar a un estadístico después de que ya haya concluido un experimento es, muy a menudo, pedirle que realice un examen *post-mortem*. Quizá le pueda decir de qué murió el experimento».

Un estudio más detallado de la contribución de Fisher a la inferencia estadística puede verse en Girón y Gómez Villegas (1998).

BIBLIOGRAFÍA

BAYES, T. (1764): *An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, *Philos. Trans. R. Soc. London*, 53, 370-418, Reeditado por Deming (1940) en *Biometrika*, 45, 293-315. Traducido al alemán con un comentario por Timerding (1908). Traducido al francés por Cléro (1988). Traducido al castellano por Gómez Villegas, Girón, Martínez y Ríos Insúa (2001) en *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat.* (*Esp*), 95, págs. 1-2, 63-80.

DROESBERE, J. J. y TASSI, P. (1990) *Histoire de la Statistique*, Ed. Presses Universitaires de France. París.

FISHER, R. A. (1990): *Statistical Methods, Experimental Design and Scientific Inference*. Edited by Bennett, J. M. with a foreword by Yates. F. Oxford. Oxford University Press.

GIRÓN, F. J. y GÓMEZ VILLEGAS, M. A. (1998): *R. A. Fisher: su contribución a la ciencia estadística*, Editado por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales *Historia de la Matemática en el Siglo XX*. Madrid, págs. 43-61.

GÓMEZ VILLEGAS, M. A. (1994): *El problema de la probabilidad inversa: Bayes y Laplace*, Editado por E. Bustos y otros en *Perspectivas Actuales de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, Ed. Siglo XXI. Madrid, págs. 385-396.

GÓMEZ VILLEGAS, M. A. (2001): *El ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar*, *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat.* (*Esp*), 95, págs. 1-2, 81-85.

GRAUNT, J. (1662): *Natural and Political Observations made upon the Bills of Mortality*, Ed. John Martyn and James Allestry. London.

HALD, A. (1998): *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*, Ed. Wiley. Nueva York.

HEYDE, C. C. y SENETA, E. (2001): *Statisticians of the Centuries*, Ed. Springer. Barcelona.

JOHNSON, N. L. y KOTZ, S. (1997): *Leading Personalities in Statistical Sciences*, Ed. Wiley. Nueva York.

DE MORA, CH. (1989): *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad siglos XVI y XVII*, Ed. Univ. del País Vasco. Vizcaya.

PEARSON, K. (1978): *The History of the Statistics in the 17th and 18th Centuries*. Ed. Macmillan. Nueva York.

STIGLER, S. M. (1986): *The History of the Statistics: the Measure of Uncertainty before 1900*, Ed. Univ. de Harvard. Cambridge.

STIGLER, S. M. (1999): *Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods*, Ed. Univ. de Harvard, Cambridge.

THODHUNTER, I. (2001): *A History of the Mathematical Theory of Probability* (reimpresión de la de 1865), Ed. Thoemmes Press. Bristol.

CAPÍTULO 19

La primera tesis doctoral sobre cálculo de probabilidades leída en la Universidad Central de Madrid

MARÍA DEL CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS
Universidad San Pablo CEU

ANA ISABEL BUSTO CABALLERO
Universidad Complutense

Introducción

La primera mitad del siglo XIX en España se caracteriza por multitud de cambios políticos y sociales. Fernando VII muere en el año 1833 y se inicia el reinado de Isabel II, bajo la regencia de su madre D.ª M.ª Cristina, con las conocidas guerras carlistas. La política de reformas en todos los ámbitos, llevada a cabo por Isabel II, está caracterizada por un marcado modernismo, y en particular en materia de educación va a establecer las pautas de la nueva enseñanza.

Por fin, el gobierno se da cuenta de la vital importancia de la educación y de lo verídico de las palabras de Gil de Zárate:

> *... digámoslo de una vez, la cuestión de enseñanza es cuestión de poder: el que enseña, domina; puesto que enseñar es formar hombres y hombres amoldados a las miras del que los adoctrina. Entregar la enseñanza al clero es querer que se formen hombres para el clero y no para el Estado*[1].

[1] A. GIL DE ZÁRATE (1855): «De la instrucción pública en España». Madrid. Impresión del Colegio de Sordomudos. 3. Tomo 1, págs. 117-118.

En esta etapa se van a establecer diversos planes de estudio así como distintas normas de instrucción pública que, independientemente, van poco a poco modificando el panorama educativo del Reino. Se carece de un sistema uniforme y ordenado en la enseñanza, tanto en su organización interna como en su dependencia de las administraciones correspondientes, con el consecuente caos económico.

Para corregir esta situación se van introduciendo disposiciones legislativas que van mejorando la instrucción pública. Sin embargo, estos esfuerzos son aislados o se malogran por ciertas circunstancias sociales. Por ejemplo, la segunda enseñanza que prácticamente no existía va creciendo y expandiéndose con la creación de los institutos.

La enseñanza superior, es decir, la impartida en las universidades, sufre profundas transformaciones debido, entre otros motivos, al liberalismo político en auge en la época de Isabel II. Las necesidades sociales hacen que se establezcan nuevas directrices en las facultades existentes y que se continúe con la supresión de ciertas universidades para beneficio de la calidad de la enseñanza de las restantes, y al mismo tiempo para sanear la economía pública.

Desde los últimos años del siglo anterior se habían venido promulgando distintas normativas para la uniformidad de la enseñanza universitaria, pues anteriormente las universidades habían seguido políticas educativas independientes entre sí, y al mismo tiempo independientes del gobierno del Reino. Mencionaremos los proyectos de planes de estudios de 1814, 1820 y 1821, pero es en 1824 cuando, a pesar de surgir en un gobierno no liberal, se promulga el Real Decreto sobre el Plan General de Estudios del Reino (14/10/1824) que regula fundamentalmente los estudios en las universidades, incluyendo parte de lo que se podría considerar segunda enseñanza y que establece por fin la uniformidad de enseñanza en todas las universidades y las sujeta a un mismo régimen.

Hay que tener en cuenta que toda Europa se encuentra en este período sumergida en importantes cambios políticos y sangrientos enfrentamientos que influyen en la sociedad española. En particular en lo que se refiere a la enseñanza universitaria, es importante resaltar la influencia que tuvo la revolución estudiantil de 1830 en Francia, que indujo a Fernando VII a cerrar las universidades a finales de 1832. En realidad lo que se prohibió fue la enseñanza en las aulas, aunque seguiría habiendo exámenes, matrículas y grados de forma que los estudiantes podían considerarse como alumnos libres.

Las reformas universitarias se siguen sucediendo. Basta tener en cuenta el plan de 1836 del Duque de Rivas, que constituía un verdadero sistema general de enseñanza, hasta que por fin en 1845 se establece el plan Pidal, que recoge casi todas las iniciativas anteriores, las organiza, finaliza el decrecimiento del número de universidades, dejando un total de diez (Barcelona, Granada, Madrid, Oviedo, Salamanca, Santiago, Sevilla, Valencia, Valladolid y Zaragoza) y centraliza la formación del profesorado universitario en la universidad de la capital del Reino, a fin de aportar a las provincias la uniformidad de doctrinas cuando los profesores, todos instruidos por igual en la Universidad Central, se distribuyan por las distintas universidades, ya que la legislación impone el grado de Doctor para ocupar determinadas plazas, lo cual hace necesario reglamentar bien esta novedad de la que apenas se tiene experiencia. Por este motivo, las tesis doctorales, la investidura del grado de Doctor, propio de los profesores universitarios y las oposiciones para ocupar las plazas de catedrático, sólo se podían celebrar en la Universidad de Madrid.

La Universidad de Madrid se empieza a crear a partir de 1812 como consecuencia del traslado y cierre de la Universidad Complutense establecida en Alcalá de Henares por el Cardenal Cisneros en 1508, aunque no comienza a funcionar hasta 1836 en la calle de San Bernardo, donde se instalan la mayoría de sus facultades y servicios[2].

Todos estos cambios y reformas de la enseñanza culminan con la Ley de Instrucción Pública del 9 de septiembre de 1857 conocida como Ley Moyano, cuyo nombre se debe al entonces ministro de Fomento, Claudio Moyano Samaniego, en la que se recoge una normativa general educativa por primera vez en España, con el rango de ley, de forma que a partir de este momento los cambios políticos e ideológicos que se sucedan no influirán tanto en la enseñanza como los anteriores.

Marco Legislativo de Enseñanza

El 28 de agosto de 1850, siendo entonces ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas Manuel de Seijas Lozano, se emite un Real Decreto por el que se reforma el anterior plan de estudios, plan Pidal de 1845.

Una de las novedades referentes a la obtención del grado de Doctor la expone en su Artículo 47:

> *No se optará tampoco al grado de Doctor sin haber obtenido una nota de sobresaliente en el curso o cursos que para él se exigen.*
>
> *El que no reuniere las notas arriba expresadas estudiará, antes de recibir el grado correspondiente, otro año más para repetir las materias en que hubiere sacado nota inferior a la de… sobresaliente…*

Este nuevo plan nos vuelve a confirmar que el grado de Doctor se conferirá únicamente en la Universidad de Madrid y en su Artículo 52 nos dice que la investi-

[2] Véase pág. 64 de la revista *Alfoz*, «La Universidad de Madrid y el Consejo Superior de Investigaciones Científicas», de SANTIAGO GARMA Y JOSÉ MANUEL SÁNCHEZ RON.

dura del grado de Doctor se hará por el Ministro, que podrá delegar este cargo en un alto funcionario del ramo y que el acto será solemne y a claustro pleno.

El 10 de septiembre de 1851, siendo ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas Fermín Arteta, se promulga una Real Orden, mandando observar y cumplir el reglamento que a continuación se detalla, para la ejecución del plan de estudios citado anteriormente. En este reglamento se detallan los requisitos para obtener el grado de Doctor que se mencionan a continuación:

Ser licenciado, hacer los cursos de doctorado correspondientes en la Universidad de Madrid y obtener en ellos la calificación de sobresaliente.

UNIVERSIDAD CENTRAL.

ACTA DE GRADO DE LICENCIADO

EN LA FACULTAD DE

Firma del interesado:

DILIGENCIA DE LA INVESTIDURA.

Acta del grado de Licenciado correspondiente a D. Ambrosio Moya de la Torre.

Presentar al Rector de la universidad un escrito con sus datos personales, cursos estudiados y establecimientos donde hayan sido cursados.

Pagar 1.000 reales por derechos de examen y presentar el recibo del pago al Decano, quien le señalará un día para la realización de los ejercicios propios del grado de doctor que consistían en un discurso y una lección oral, ante una comisión compuesta del Decano y cuatro catedráticos.

A este efecto, cada facultad tenía preparados cincuenta puntos o temas, elegidos de entre todas las asignaturas que se impartían en dicha facultad. De éstos, el candidato sacaba tres a suerte y elegía uno para redactar un discurso cuya lectura tendría que durar al menos un cuarto de hora. Para escribir el discurso tenía seis horas, en las que permanecía incomunicado, pero podía consultar los libros que quisiera. Pasadas las seis horas, el aspirante a doctor leía su discurso ante el tribunal y a continuación los examinadores le hacían preguntas durante una hora.

Dos días después, tenía que exponer la lección, en no menos de una hora. Ésta versaba sobre un tema de los estudios propios del doctorado y, tanto los puntos a sortear como el tiempo para la preparación de la lección, dependían de las distintas facultades. Las lecciones podían ser teóricas o prácticas, pero no se permitía consultar ningún libro. Las preguntas por parte del tribunal podían incluir la resolución de algún problema o la realización de algún experimento en el caso de las facultades de ciencias, según la sección.

Una vez pasadas estas pruebas, el doctorando tenía que hacer un pago o depósito de 1.500 reales en cada sección de Filosofía y 3.000 reales en las demás facultades.

Sobre el acto de investidura de doctor nos dice lo siguiente el Artículo 476 del mencionado reglamento:

> *El grado de Doctor se conferirá siempre individualmente de la manera que sigue: el candidato escribirá una tesis sobre un punto cualquiera de la facultad o ciencia, y la imprimirá, entregando al Rector, con la anticipación de ocho días, el suficiente número de ejemplares para repartir al claustro. Llegado el día de la ceremonia, después de ser introducido en la sala por el padrino… leerá el impreso, que se distribuirá entre los circunstantes. Acto continuo, le contestará uno de los catedráticos con un discurso relativo al objeto de la tesis y el modo con que la ha desempeñando, y enseguida el presidente le recibirá el juramento y le conferirá el grado con las insignias; hecho lo cual, se retirará acompañado del padrino y los bedeles después de abrazar a los doctores y de dar gracias al claustro.*

UNIVERSIDAD LITERARIA DE MADRID.

FACULTAD DE FILOSOFÍA. GRADO DE DOCTOR EN Ciencias Físico-Matemáticas

D. Moya de la Torre
natural de
provincia de
de edad de años.

EL SECRETARIO DE LA FACULTAD.

Constan en el expediente adjunto (núm.)
instruido á su instancia en la Secretaría general de esta Universidad conforme al Reglamento vigente de Estudios.

Ha verificado en el día de la fecha el depósito que acredita el adjunto recibo, y entregado los derechos de examen marcados en el Reglamento.
Madrid
de mil ochocientos

Acta del grado de Doctor de D. Ambrosio Moya de la Torre.

A esta ceremonia podían concurrir todos los doctores de todas las facultades que quisieran, pero era obligatoria la asistencia para los catedráticos.

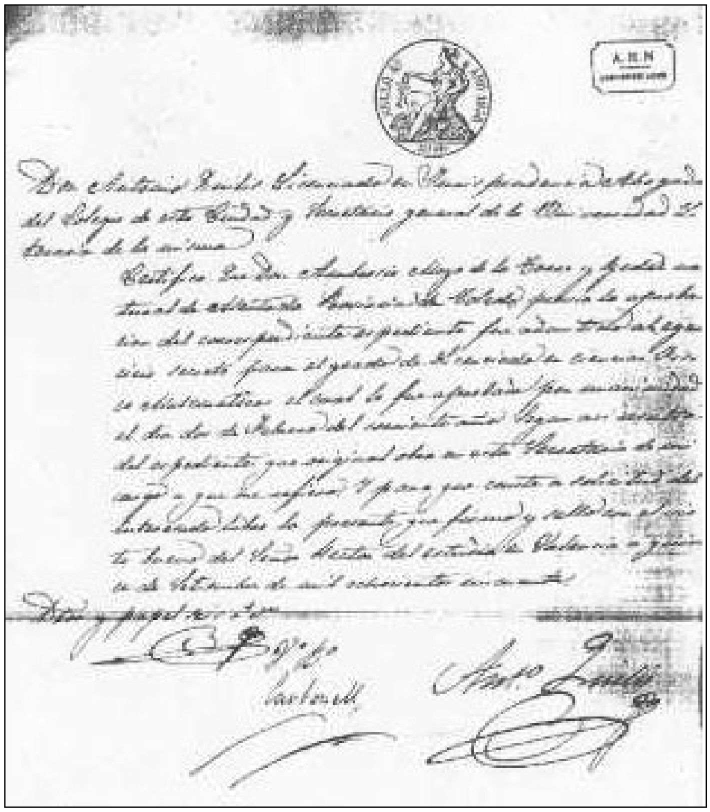
Las tesis tenían que ser presentadas al Rector antes de imprimirse, y los discursos de contestación antes de leerse, pues el Rector debía revisarlos y darles su visto bueno. Sin este requisito no se podía celebrar el acto de investidura de Doctor.

Reverso del acta de Doctor.

Tesis doctoral de D. Ambrosio Moya de la Torre y Ojeda

D. Ambrosio Moya de la Torre y Ojeda, nacido en 1823, natural de Méntrida, provincia de Toledo, obtiene el grado de Bachiller en Filosofía en el Instituto de Segunda Enseñanza de Murcia, el 9 de septiembre de 1846. Realiza el primer ejercicio secreto para el grado de licenciado en la Universidad de Valencia el día 2 de febrero de 1850, aprobándolo por unanimidad del tribunal, siendo entonces Rector de la Universidad de Valencia D. Claudio Moyano.

Al tener que trasladarse a Madrid por motivos de salud y de trabajo, solicita poder continuar los siguientes ejercicios para la licenciatura en la Universidad de Madrid, petición que le es concedida tras los correspondientes trámites administrativos de solicitudes, certificados, etcétera. El segundo ejercicio lo realiza el 18 de enero de 1853, en Madrid, con la lectura del discurso titulado «De los centros de gravedad y medios empleados en su determinación», elegido entre los tres sorteados, según el reglamento vigente. El tercer y último ejercicio (el práctico), lo realiza el 21 de enero del mismo año, sobre el tema «Teoría general de las asíntotas y su aplicación a la hipérbola», aprobándolo por unanimidad del tribunal.



Certificado del secretario general de la Universidad de Valencia donde consta el aprobado por unanimidad del ejercicio secreto para el grado de Licenciado de D. Ambrosio Moya de la Torre.

Se licencia en la Facultad de Filosofía, sección de Ciencias Físico-Matemáticas, de la Universidad de Madrid, recibiendo la solemne investidura del grado de Licenciado el día 10 de febrero de 1853.

El 21 de junio de 1854 realiza el ejercicio correspondiente al grado de Doctor leyendo un discurso sobre el tema «Teoría completa de las estrellas fijas» elegido por él entre los tres obtenidos por sorteo.

El acto de la solemne investidura del grado de Doctor tiene lugar en la Universidad Central el 2 de julio de 1854, en dicho evento D. Ambrosio Moya de la Torre lee el discurso, previamente impreso para la ocasión por D. José M.ª Ducazcal, titulado «Sobre la importancia filosófica del cálculo de las probabilidades». Este discurso con un total de veinte páginas en un formato de 25 centímetros, es considerado como la primera tesis doctoral sobre cálculo de probabilidades leída en la Universidad de Madrid[3].

DISCURSO

LA UNIVERSIDAD CENTRAL

MADRID

Portada del discurso del acto de investidura de Doctor.

Esta tesis consta de veinte páginas en las que el autor intenta explicar la importancia del cálculo de probabilidades en aquella época. La tesis comienza dirigiéndose al ilustre claustro que le escucha, haciendo una llamada de atención a una teoría de trascendencia suma en la marcha progresiva de todos los conocimientos que contrasta lastimosamente con el sensible abandono en que se halla en esta

[3] Véase «Las matemáticas en España en la primera mitad del siglo XX», de SANTIAGO GARMA, publicada en *Actas de las XV Jornadas Luso-Espanholas,* Vol. VI. Didáctica e Historia da Matemática, págs. 3-65, Universidad de Évora.

época. A continuación el autor intenta definir brevemente la historia de este saber, que aunque moderna, nace de las grandes teorías.

Rompiendo el viejo yugo del dogmatismo escolástico y de la pedantesca escuela de la filosofía aristotélica[4].

Según D. Ambrosio Moya, la cuna del cálculo de probabilidades se encuentra en el siglo XVII, es decir, en una época de la historia que hace gran honor al espíritu humano, siendo su fundamento un problema sobre los juegos de azar.

Desde entonces se reconoce y se consigna entre las elucubraciones matemáticas que la probabilidad se halla comprendida en la noción general de la cantidad mensurable; que se puede expresar su generación en algoritmo y que le son completamente aplicables las leyes de los números. Desde entonces queda constituida la ciencia de las probabilidades, determinando el carácter transcendental de su fina lógica y manifiesto su método analítico por excelencia[5].

Con respecto a los fundamentos de las ciencias exactas, y la filosofía general de las matemáticas en relación con la ciencia de las probabilidades se remonta hasta las mismas funciones intelectuales diciendo:

Los demás ramos de las ciencias exactas reciben los primeros fundamentos que según su objeto particular les marca la filosofía general de las matemáticas, y sin remontarse jamás a la organización intelectual, deducen de ellos por vías puramente objetivas el conjunto de proposiciones ciertas de que constan; pero la ciencia de las probabilidades, dejando a la filosofía trascendente el cuidado de resolver su verdadero problema de la certidumbre absoluta, lleva el escalpelo de su fino análisis hasta las mismas funciones intelectuales, para deducir de este examen crítico las diversas y frecuentes causas de ilusión en la determinación de la probabilidad[6].

Después de intentar explicar los fundamentos de esta ciencia moderna, el autor hace un repaso por todas las aplicaciones a las demás ramas del saber, explicando cómo el cálculo de probabilidades puede ayudarlas, dando sentido a sus mismos fundamentos y encontrando causas que estaban escondidas a la razón.

En particular, es el complemento necesario a los métodos de las ciencias de la observación, desarrolla las matemáticas en general poniendo alternativamente en juego todos sus procedimientos, familiarizándose con sus dificultades y colocando en posición de dominación. En cuanto a las numerosas observaciones celestes, el cálculo de probabilidades ha convertido en certidumbre la probabilidad de sus cau-

[4] Discurso de investidura del grado de Doctor, página 6.

[5] Dentro del discurso de investidura, página 7.

[6] Véase página 8 del citado discurso de investidura.

sas. Con el auxilio del cálculo de probabilidades las ciencias conjeturales tienen el medio de apreciar las ventajas y los inconvenientes de sus métodos peculiares ya que con su auxilio se reconoce el mejor de los tratamientos para la curación de una enfermedad. Para las ciencias administrativas esta ciencia consigue el medio de comprobar el valor real de sus experimentos. La aritmética política no es otra cosa que el conjunto de diversas aplicaciones de la probabilidad a ciertas clases de sucesos morales.

Para finalizar, D. Ambrosio Moya recuerda y cita las palabras de Laplace que consideran los métodos analíticos que han dado origen a la Teoría de las Probabilidades, la verdad de los principios que le sirven de base, la lógica fina y delicada que exige su uso en la resolución de problemas, indicando el camino más seguro que debemos seguir en nuestros juicios preservándonos de las ilusiones que nos extravían en general y viendo que hay ciencia más digna de nuestras meditaciones, ni que más ventajosamente deba entrar en el sistema de instrucción pública. Así el autor se adhiere a la petición de Laplace para que el cálculo de probabilidades llegue a formar parte de las materias que se explican en los centros de enseñanza. Sin embargo, ni a él ni a la petición que reitera D. Antonio Aguilar y Vela, catedrático de Matemáticas y Astronomía y secretario perpetuo de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en su discurso reglamentario con motivo de la recepción de su grado de Doctor, leído un año más tarde en esta misma universidad[7], ya que la nueva Ley Moyano que se establece en 1857, y donde se crean las Facultades de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, no contiene ninguna materia estadística.

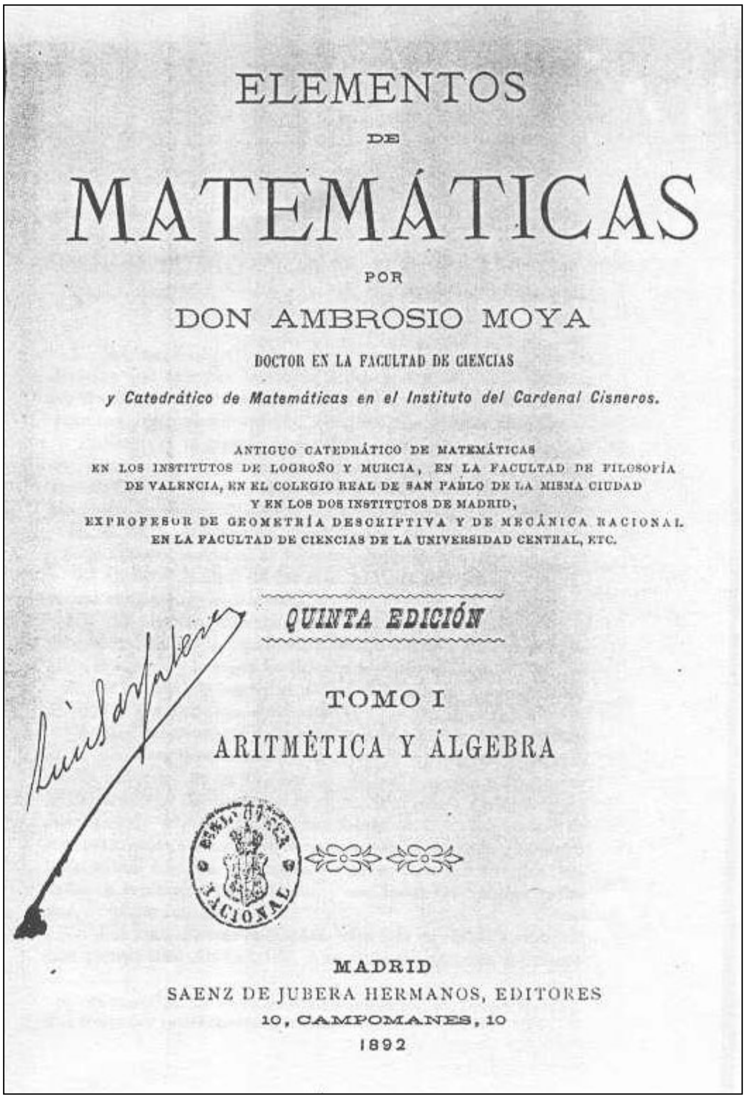
D. Ambrosio Moya a lo largo de su vida consiguió distintas cátedras en Institutos de Segunda Enseñanza y explicó algunas asignaturas en la universidad, podemos decir que fue catedrático de Matemáticas en los Institutos de Logroño y Murcia, en los Institutos San Isidro y Cardenal Cisneros de Madrid, en la Facultad de Filosofía de Valencia, en el Colegio Real de San Pablo de la misma ciudad. También fue profesor de Geometría Descriptiva y de Mecánica Racional en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid. En la apertura del curso 1871 a 1872 fue el encargado de leer la memoria acerca del estado del Instituto del Noviciado de Madrid durante el curso anterior. Esta memoria la imprimió Segundo Martínez, que era impresor del Instituto del Noviciado, y consta de treinta y nueve páginas en un formato de 22 centímetros, donde realiza un estudio detallado de la situación del Instituto.

Entre las distintas obras que escribió, resaltamos sus libros de texto *Lecciones de aritmética*, publicados en 1867 en la imprenta de Segundo Martínez en Madrid, y sus *Elementos de matemáticas* publicados en su primera edición en 1871, también en la imprenta de Segundo Martínez en Madrid, y posteriormente en dos tomos,

---

[7] MARTÍN PLIEGO (1997): «Notas sobre la historia de la probabilidad en España». *Zubía,* núm. 15, Logroño, pág. 161.

el primero de Aritmética y Álgebra, y el segundo de Geometría y Trigonometría, entre 1892 y 1898, en Saenz de Juberna Hermanos, Editores, hasta la quinta edición, realizándose la sexta edición en Hernández y Compañía entre 1897 y 1898.



ELEMENTOS
DE
MATEMÁTICAS
POR
DON AMBROSIO MOYA
DOCTOR EN LA FACULTAD DE CIENCIAS
y Catedrático de Matemáticas en el Instituto del Cardenal Cisneros.
ANTIGUO CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS
EN LOS INSTITUTOS DE LOGROÑO Y MURCIA, EN LA FACULTAD DE FILOSOFÍA
DE VALENCIA, EN EL COLEGIO REAL DE SAN PABLO DE LA MISMA CIUDAD
Y EN LOS DOS INSTITUTOS DE MADRID,
EXPROFESOR DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA Y DE MECÁNICA RACIONAL
EN LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL, ETC.

QUINTA EDICIÓN

TOMO I
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

MADRID
SAENZ DE JUBERA HERMANOS, EDITORES
10, CAMPOMANES, 10
1892

Portada del libro *Elementos de matemáticas.*

Conclusiones

La primera etapa del siglo XIX es una etapa de idas y venidas en el sistema educativo en general, y en el mismo grado o mayor en particular en el ámbito universitario, que no acaba de configurarse hasta la segunda mitad del siglo con la Ley Moyano.

El estudio del cálculo de probabilidades y de la estadística en general no se contempla en ningún lugar de ningún plan de estudios durante la primera mitad del siglo XIX.

La primera tesis doctoral sobre el cálculo de probabilidades leída en la Universidad de Madrid se realiza en 1854, en una época universitaria de tránsito desde el antiguo régimen universitario del siglo pasado y los vaivenes de este siglo, con la reciente imposición de ser la Universidad de Madrid la única universidad del Reino donde se consiga el grado de Doctor, a fin de transmitir un mismo criterio a las distintas universidades de provincia, haciendo que sus profesores tengan un mismo filtro de formación.

La concepción del cálculo de probabilidades de la época es completamente filosófica en España, aunque los principales investigadores coinciden en su relación y aplicaciones en todas las ramas del saber, y resaltando la favorable influencia que puede ejercer en sus progresos.

BIBLIOGRAFÍA

BUSQUETA, J. J. y PEMÁN, J. (2002): «Les universitats de la Corona d'Aragó, ahjir i avui», Estudis històrics, Pòrtic, Biblioteca Universitaria, Universitat de Lleida.

BUSTO CABALLERO, A. I. y ESCRIBANO RÓDENAS, M. C. (2002): «Primeros intentos para la organización de la enseñanza de la estadística en España: cursos de estadística y sus aplicaciones 1950-1952» en *Historia de la probabilidad y de la estadística,* A.H.E.P.E., Madrid, págs. 193-204.

ESCRIBANO RÓDENAS, M. C. y BUSTO CABALLERO, A. I. (2002): «La creación en España de la primera Escuela de Estadística» en *Historia de la probabilidad y de la estadística,* A.H.E.P.E., Madrid, págs. 205-220.

GARMA, S. (1990): «Las matemáticas en España en la primera mitad del siglo XX» en *Actas de las XV Jornadas Luso-Espanholas,* Vol. VI, Didáctica e Historia da Matemática, Universidad de Évora, págs. 3-65.

GARMA, S. y SÁNCHEZ RON, J. M. (1989): «La Universidad de Madrid y el Consejo Superior de Investigaciones Científicas» en *Revista Alfoz*, págs. 59-77.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): «Notas sobre la historia de la probabilidad en España» en *Revista Zubía,* núm. 15, Logroño, págs. 155-167.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): «Historia de la probabilidad en España» en *Revista de Historia Económica*, Año XV, núm. 1, Universidad Autónoma de Madrid, págs. 161-184.

MOYA DE LA TORRE, A. (1854): «Sobre la importancia filosófica del cálculo de las probabilidades», Discurso leído en la Universidad Central, Imprenta de José María Ducazcal, Madrid.

MOYA DE LA TORRE, A. (1894): *Elementos de matemáticas*, Saenz de Jubera Hermanos, Madrid.

VEA MINUESA, F. (1995): *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX,* Cuadernos de Historia de la Ciencia, Universidad de Zaragoza.

VIÑAO FRAGO, A. (1982): *Política y educación en los orígenes de la España contemporánea*, Examen especial de sus relaciones en la enseñanza secundaria, Editorial Siglo XXI.

CAPÍTULO 20

Indice des prix: histoire et controverses

MICHEL ARMATTE
Université Paris-Dauphine et Centre Koyré

Introduction

Nous sommes en 1707 dans un certain *college* d'université d'Oxford. L'évêque Fleetwood doit appliquer pour la gestion de ce *college* une règle de droit couchée 250 ans plus tôt dans ses statuts, et qui veut que toute personne jouissant d'un revenu de plus de 5£ s'engage à résilier son statut de Fellow (membre et boursier de l'institution)[1]. Compte tenu de l'érosion monétaire la règle est évidemment à adapter. Après une enquête faite sur le cours des prix de 4 biens essentiels —Blé, Viande, Boisson, Vêtements— durant les siècles précédents, Fleetwood, remarquant que pour acheter l'équivalent de 5£ de chacun de ces biens il fallait dépenser en 1700 respectivement 30£, 30£, un peu plus de 25£, et un peu moins de 25£, concluait que la limite de 5£ pouvait être remplacée par 28£ environ dans la réglementation pour 1700, un tel revenu pouvant être jugé compatible avec le statut de *Fellow* «avec le même innocence et honnêteté» que dans les voeux des fondateurs.

Cette histoire de Fleetwood est souvent placée à l'origine de la problématique des *index numbers* selon une historiographie figée par Maurice Kendall[2]. Elle est

---

1 Une autre version de cette histoire (A. DUPONT, 2003, p. 80) affirme que les 5$ seraient un revenu alloué par l'Eglise Anglicane à ses représentants et que ce revenu ne permettrait plus de conserver le même niveau de vie. Le problème de comparaison reste le même.

2 M. KENDALL (1977): «The early History of index numbers», *Studies in the History of Probability and Statistics*, Kendall et Plackett eds, London.

intéressante parce qu'elle révèle tout de suite les différentes facettes de la question que nous voulons traiter. Il s'agit bien de construire une *mesure* numérique d'une *notion* abstraite plus ou moins bien définie (l'érosion monétaire), fondée sur une série d'*observations* statistiques de grandeurs économiques (prix et quantités) dont les valeurs sont combinées en une *formule de calcul,* laquelle servira à *indexer des règles* ou des conventions sociales.

La construction d'un nombre indice, qui n'est guère enseignée[3] et peu discutée, est en effet au fondement même de la plupart des conventions qui règlent notre vie sociale si l'on songe à tous les raisonnements, les classifications, les droits (propriété, exploitation, succession) et les opérations de distributions (impôts, prestations) indexées sur l'indice des prix. Fleetwood lui même se serait également intéressé au montant d'un vol qui justifie une condamnation à mort, ou encore au revenu minimum qui définit l'électeur dans le suffrage censitaire. Sa construction est remarquable par la manière dont son calcul articule finement un souci de justice et un souci de *justesse*, c'est-à-dire une qualité qui se réfère au fondement éthique de l'économie sociale, et une qualité caractérisant un rapport épistémique d'un concept non observable à sa mesure. Dans les deux cas la construction ne va pas de soi car il lui faut se référer d'une part aux principes d'une morale politique commune qui permettent de définir ce qui est *juste*, et d'autre part aux principes d'une technique statistique d'observation qui mêle science administrative et calcul pour dire ce qui est *vrai*.

La question des indices, de leur construction et de leur usage, est donc à l'intersection de plusieurs historiographies. Un point de vue *théorique* situera le concept à mesurer (on verra qu'il y a plusieurs candidats) dans un champ conceptuel plus vaste qui est celui de l'économie théorique (théorie de la croissance par exemple) en cherchant à dériver sa définition formelle d'une axiomatique microéconomique de la formation des prix dans l'échange entre producteur et consommateur, ou d'une approche macroéconomique de la croissance. Un point de vue *empirique*, ou *statistique* au sens des institutions chargées de sa mise en œuvre, considérera plutôt que la mesure crée l'objet à mesurer et discutera des biens à intégrer dans le calcul, et de la façon d'en mesurer les prix et quantités, et de la fiabilité du résultat. Une approche *syntaxique* de l'indice, ou statistique au sens de la statistique mathématique, probabiliste ou non, s'intéressera aux manières de combiner en une certaine formule les évolution de prix des biens retenus, et cherchera à les discriminer par leurs propriétés formelles, hors de toute mesure numérique. Mais ces questions de forme (ou de formule) de l'indice peuvent difficilement être discutées indépendamment de sa *sémantique*, à savoir des significations qu'on peut lui donner, et d'une

[3] Les économistes et les mathématiciens la trouvent trop empirique et se rejettent mutuellement la responsabilité de son enseignement.

référence à ce qu'il est censé mesurer. Une approche *pragmatique* se consacrera pour l'essentiel aux usages sociaux et politiques de l'indice et cherchera à en améliorer ou en contester la pertinence et l'efficacité vis-à-vis d'objectifs politiques implicites ou explicites. On voit qu'il sera difficile de rendre compte des controverses sur les indices de prix que nous allons évoquer sans articuler plusieurs de ces approches.

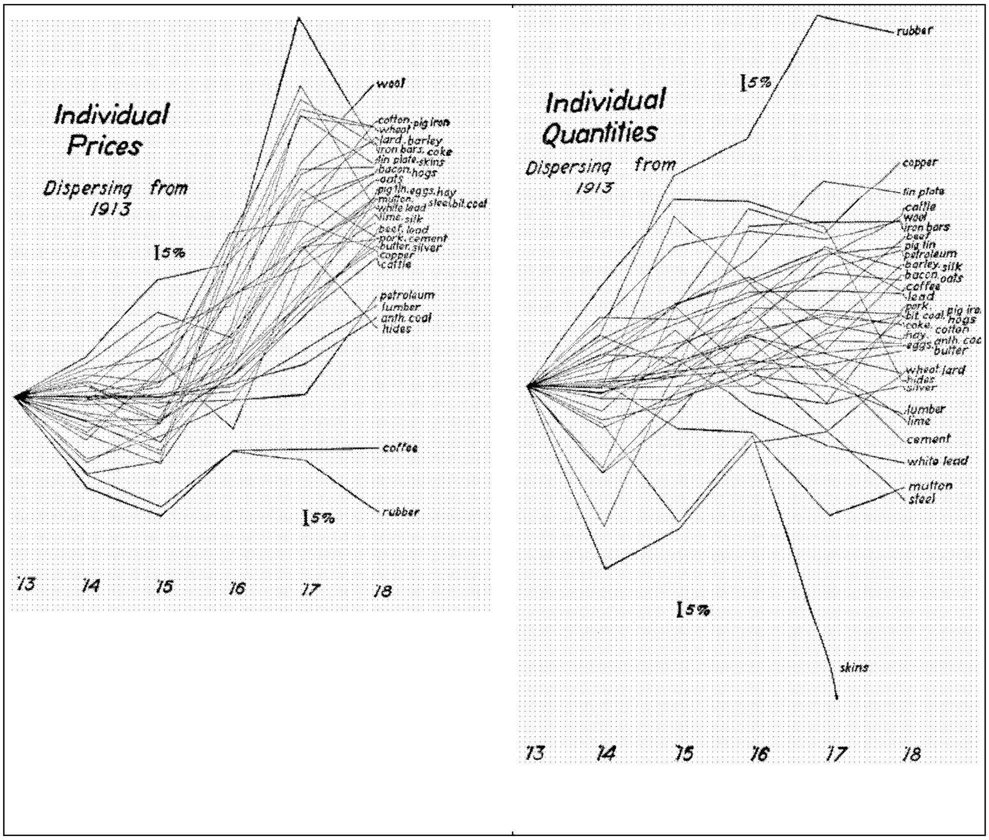
Dans la plupart des approches contemporaines de la notion d'indice des prix par les économistes, on s'aligne en général sur une typologie a-historique de Diewert[4], qui distingue approche statistique, approche microéconomique, approche axiomatique, mais fait peu de cas à la fois des techniques de mise en œuvre de la mesure par les instituts, et des dimensions sémantiques et sociales qu'elle peut prendre. Il semble pourtant qu'une histoire de l'indice des prix qui articulerait théorie économique, propriétés statistiques, mise en œuvre institutionnelle, et usages sociaux serait mieux à même de rendre compte de la succession des formes, justifications et usages qu'à pris cet objet de statistique économique dans les deux derniers siècles. En se centrant plus particulièrement sur quelques controverses à son sujet on verra mieux combien le débat porte sur des configurations de l'indice qui articulent ces dimensions.

L'indice comme résumé d'un éventail d'évolutions

Un *indice simple* des prix est tout simplement le rapport de deux prix, entre deux lieux A et B, ou plus souvent entre deux dates 0 et t. Considérons par exemple les prix p_{it} du bien i au temps t, et p_{io} du même bien à la période de base. Un indice de prix de la seule marchandise i, est donné par le quotient (pit / pio) que, depuis Sir Evelyn (1798) et pour des raisons de convenance on peut aussi exprimer sous forme d'un pourcentage $I_i = 100\,(p_{it} / p_{io})$. Un *indice synthétique* répond à la question autrement plus complexe de comparer les prix d'une série de biens (1, ..., *i*, ...*n*) d'un ensemble I entre deux situations de référence qui peuvent être également spatiales (2 pays) ou temporelles (deux dates 0 et t), mais il peut toujours s'exprimer comme une combinaison des indices simples que l'on vient de considérer. Comme la comparaison doit être étendue sur T périodes (ou pays) il s'agit en fait le plus souvent de considérer une suite d'indices bilatéraux pour t variant de 1 à T.

Résumer la variation des prix de biens différents entre 0 et t par un seul nombre relève d'une gageure quand on sait combien les prix des diverses marchandises varient de façon très différente, même sur une courte période, comme le révèle par exemple ci-dessous le graphique de Irving Fisher (1922) pour la période 1913-1918.

[4] DIEWERT (1987), DIEWERT et NAKAMURA (1993).



Il faut dire que cette période correspond à la première guerre mondiale, et est synonyme d'une inflation extraordinaire. Les conflits internationaux provoquent très souvent de graves désordres économiques qui nécessitent une réévaluation et un contrôle par de nouveaux outils. Judy Klein[5] raconte comment la guerre entre la France et l'Angleterre de 1793 à 1815 fut à l'origine d'une diminution drastique du stock d'or à la Banque d'Angleterre qui l'obligea à suspendre tous ses paiements le 24 février 1797, et cela dura jusqu'en 1821. Soumise à une enquête de la Chambre des Lords, la Banque du rendre compte de ses stocks. Elle le fit sous la forme détournée de la publication d'une clé qui évitait de révéler le niveau de ces stocks toujours tenus secrets et de les comparer avec les ordres de paiements effectués. Cette clé, dévoilée par l'actuaire William Morgan sous forme d'un multiplicateur (6060) s'apparentait à un indice simple.

5 KLEIN (1997), chapitre 4.

Au XVIIIe siècle, la question des comparaisons inter temporelles de sommes monétaires à l'aide d'un indice synthétique n'apparaît qu'épisodiquement dans les travaux de certains intendants, commis d'Etat, ministres des finances, ou ministres du culte. Il n'y a que très rarement publicité de calculs qui sont toujours occasionnels et jamais repris systématiquement. La question que tente de régler le calcul est toujours interprétée comme étant celle de la valeur de la monnaie. C'est ce que nous avons vu à propos de Fleetwood à Oxford en 1707. Une des premières constructions plus explicite signalée dans l'historiographie standard est celle de Dutot, un caissier de la Compagnie des Indes qui souhaitait comparer les revenus de Louis XV (100 millions de livres en 1735) avec ceux de Louis XII (7,6 Millions de livres 1515). Il a proposé en 1738 un indice qui est un *rapport des moyennes arithmétiques* des prix sur les deux périodes que l'on peut écrire:

$$I_{Dutot} = \frac{\sum_i \frac{P_{it}}{n}}{\sum_i \frac{p_{i0}}{n}} = \frac{p_{\cdot t}}{p_{\cdot 0}} = \frac{\sum_i p_{i0} \frac{p_{it}}{p_{i0}}}{\sum_i p_{i0}}.$$

Cet indice, que l'on peut aussi considérer comme une moyenne pondérée (par p_{i0}) des rapports ou indices simples a le grave inconvénient de ne pas être invariant des unités choisies pour les prix «unitaires»: dans un indice pour trois biens du genre pain, vin et fromage, passer du kilo à la tonne pour le pain ou du litre à l'hectolitre pour le vin revient à multiplier par 1000 ou 100 la pondération du pain ou du vin dans l'indice. La revue américaine *Bradstreet* utilise encore un indice de ce type en 1897, mais elle a pris soin d'exprimer tous les prix pour la même unité physique qui s'appelle la *livre avoirdupois.* On devine pourquoi il fallut dès 1898 supprimer le mercure de la liste des produits de cet indice.

Une autre tradition se rattache à l'historien et économiste Carli, par ailleurs professeur d'astronomie à Padoue. Cherchant en 1764 à mesurer le déclin de la valeur de la monnaie depuis la découverte de l'Amérique, celui-ci a proposé de prendre pour indice la *moyenne arithmétique des rapports de prix* pour chaque bien i:

$$I_{Carli} = \frac{1}{n} \sum_i \frac{p_{it}}{p_{i0}}.$$

Cet indice a l'avantage d'être invariant avec les unités choisies pour exprimer les prix unitaires p_{it} et p_{io} mais il accorde le même poids à chacun des biens i. Il sera utilisé par l'administration américaine en 1777 pour actualiser la paye des soldats de la guerre d'indépendance (les prix avaient été multipliés par 33 en 3 ans), il est encore celui que propose Sir Evelyn en 1798 pour établir à partir des prix d'une quinzaine de biens et services (une journée de labour) un indice calculé de 1050 à 1800. C'est la même formule qu'utilise Porter en 1838 pour bâtir un indice de 50 biens pour la période 1833-1837. Et c'est encore celui que construit Newmarch en 1859 sur la base de 41, puis 22 articles, indice dont les séries sont publiées dans l'Economist de Londres et les *Annual Reviews* du *JSSL*, avec une base qui est restée la même (une moyenne de prix des années 1845-50) jusqu'en 1911.

L'indice budgétaire

C'est dans le dernier tiers du XIXème siècle que la notion d'indice quitte la préhistoire pour entrer dans une véritable histoire qui est plus largement celle de la statistique économique. La question des indices progresse parce qu'un nouvel environnement économique et politique se produit. Les traités de commerce ouvrent une nouvelle ère de libéralisme qui profite aux échanges économiques européens et offre des débouchés à la seconde industrialisation. Cette croissance retrouvée s'accompagne d'une forte demande d'outils de gestion comptables et les économistes renouent avec la méthode statistique trop longtemps confondue avec la démographie et boudée par eux[6]. Mais cette croissance est aussi caractérisée par l'exaspération de la lutte des classes, et par la multiplication de crises endogènes qui ne sont plus d'origine agricoles mais propres au capitalisme industriel et financier. La Grande Crise de la fin des années 1880 débouche sur une demande renforcée de dispositifs statistiques d'observation, d'enregistrement et de régulation des cycles économiques. Dans la période (1885-1925), les *index numbers* deviennent à la fois des outils qui intéressent les institutions scientifiques et professionnelles des économistes libéraux comme la *Société Statistique de Paris* ou l'*Institut International de Statistique,* et des objets de la négociation collective qui accompagnent la mise en place d'un Etat-Providence très préoccupé par la condition ouvrière soumise aux fortes pressions du patronat. La *British Association for the Advancement of Science* appointe un Comité[7] pour la recherche de la meilleure méthode d'évaluation des variations de la valeur de l'unité monétaire, dirigé par Edgeworth, et publie trois documents de synthèse et de critique entre 1887 et 1889. Dès son tome II (1887), le *Bulletin de l'IIS* publie un article historique de Giffen sur les index numbers, et produit régulièrement des résolutions sur leur méthodologie.

Parallèlement à ce travail institutionnel, les initiatives privées se multiplient et vers la fin du XIXème, plusieurs indices de cette origine font référence dans le monde anglo-saxon: Le premier indice à être régulièrement publié, dès 1864, par

[6] Jusqu'en 1877 les congrès de démographie et de statistique sont communs. Et la résistance des économistes à la statistique est importante (VOIR MENARD, 1977).

[7] Ce Comité est constitué de Bourne, Edgeworth, Foxwell, Giffen, Marshall, Martin, Nicholson, Palgrave et Sidgwick.

The Economist est l'indice de prix de gros de Newmarch, moyenne de rapports des prix de 22 biens[8] dont la base remonte à 1845-50; le *Sauerbeck Index* créé par le négociant londonien du même nom est un indice de prix de gros annuel puis mensuel, moyenne arithmétique simple des prix de 35 articles (beaucoup de biens alimentaires), publié dans *the Statistic Journal* depuis 1886; L'indice de *Bradstreet* publié depuis mai 1897 repose sur une moyenne de prix d'une centaine d'articles pondérée par les quantités exprimées en «livre avoirdupois»; le *Board of Trade* utilise plusieurs indices construits par Sir Giffen à partir de données du commerce extérieur; l'indice du Docteur Soetbeer reflète les prix de détail de 114 articles, relevés pour l'essentiel à Hambourg; le journal financier *the Annalist* propose un indice des valeurs boursières; l'indice du *Comité Aldrich* du Sénat des Etats-Unis, construit par le professeur R. P. Falkner est fondé sur les prix de 223 produits, et la base en a été 1860 puis 1890-92.

En France le Conseil Supérieur de la Statistique, fondé en 1885, forme un Comité analogue sur les indices de la vie économique, animé par Lucien March. La SGF publie en 1912 un indice de 12 articles, qui deviendront 34 en 1930, après les travaux des Commissions d'étude relatives au coût de la vie mises en place par le gouvernement, puis 213 en 1949. Il s'agit d'un indice de temporelles des prix de détails avec les pondérations correspondant à une famille ouvrière et parisienne.

Ce n'est pas par hasard d'ailleurs si c'est dans l'Allemagne de 1870 que temporelles et temporelles retravaillent la question des indices et introduisent explicitement une pondération des prix élémentaires par des quantités consommées. Ces économistes appartiennent à l'école historique allemande de Schmoller qui attache la plus grande importance aux travaux d'économie empirique, et qui tire parti de la multiplication des enquêtes et monographies sur les budgets de famille (temporelles, Engel, Deparcieux) pour proposer un système de pondération par les coefficients budgétaires des dépenses ouvrières. Ces enquêtes qui systématisent les monographies de famille n'ont plus pour objectif une caractérisation de la condition ouvrière (VILLERMÉ, 1840) ou le tableau économique des comptes d'une cellule familiale traditionnelle (LEPLAY) mais un chiffrage de la décomposition de la dépense ouvrière sur les différents postes de dépense (ENGEL). Ce que l'on appelle alors *indice budgétaire*[9] cherche à mesurer un pouvoir d'achat de revenus monétaires correspondant à un certain budget dépensé d'une certaine façon par des salariés. Un tel indice, dit aussi *indice du coût de la vie,* se réfère à la fois à une population (pendant très longtemps les seules populations ouvrières des villes) et à un panier de biens de composition constante, supposé correspondre à la répartition des dépenses

[8] Café, sucre, thé, tabac, blé, viande, soie, chanvre, laine, indigo, huile, bois, suif, cuir, cuivre, fer, plomb, étain, et... quatre sortes de coton.

[9] JULIN, A. (1923-28).

d'un ménage type de cette population. En France, cette répartition a d'abord été l'objet d'évaluations plus ou moins réalistes et consensuelles faites par les commissions mises en place en 1911, avant que de profiter d'enquêtes budgets comme celle de Dugé de Bernonville (SGF) en 1914. Et c'est bien parce que ces enquêtes révèlent une certaine variabilité spatiale et temporelle de la composition de la dépense des ménages que l'hypothèse d'une invariance du vecteur des quantités d'un panier de biens ne tient plus.

L'indice comme moyenne pondérée

Les indices des prix de Laspeyres (1864) et de temporelles (1874), qui visent à comparer les prix de deux paniers de biens identiques (mêmes produits, mêmes pondérations) s'inscrivent dans ce contexte plus général de l'indice budgétaire. Leur formule permet de les interpréter soit comme un rapport de moyennes pondérée par les quantités (Dutot pondéré), soit comme une moyenne de rapports correspondants à des indices simples pondérés par les quantités (Carli pondéré):

$$I_3 = \frac{\sum_i q_i p_{it}}{\sum_i q_i p_{i0}} = \frac{\sum_i (q_i p_{i0}) \dfrac{p_{it}}{p_{i0}}}{\sum_i q_i p_{i0}} = \frac{\sum_i q_i p_{it} \Big/ \sum_i q_i}{\sum_i q_i p_{i0} \Big/ \sum_i q_i};$$

$$I_{Lapeyres} = \frac{\sum_i q_{i0} p_{it}}{\sum_i q_{i0} p_{i0}}; \qquad I_{Paasche} = \frac{\sum_i q_{it} p_{it}}{\sum_i q_{it} p_{i0}}$$

Une question majeure est alors de choisir les pondérations q_i. Si l'on choisit les quantités consommées à la période de base (soit q_{i0}) on obtient la formule utilisée en 1822 par Joseph Lowe pour son *Tabular Standard* lors du débat anglais sur le paupérisme et la récession qui suivirent les guerres napoléoniennes, et en 1833 par G. Poulett Scrope, membre du Parlement et de la R.S. Cet indice porte aujourd'hui le nom de l'économiste allemand temporelles qui l'a popularisé en 1864[10]. C'est un indice qui nécessite la définition d'un budget de référence, sous forme d'un budget-type conventionnel ou de résultats d'enquêtes, ou de données comptables sur les dépenses nationales. Il a l'inconvénient de se démoder assez vite, au point de ne plus représenter qu'une structure fictive lorsque t devient grand. Cette formule est de fait la plus couramment utilisée: c'est celle de la SGF en France, et du Bureau

[10] E. Laspeyres (1864).

du Travail aux Etats-Unis. Si l'on choisit au contraire pour pondération les quantités consommées de la période en cours (q_{i1}), ce qui est une information en général assez difficile à obtenir, on a la formule de son collègue temporelles[11] qui disposait exceptionnellement de données physiques du Bureau de la Statistique commerciale.

Face à cette alternative entre deux solutions insatisfaisantes, plusieurs auteurs ont cherché une troisième voie. Une solution assez naturelle mais incorrecte consiste à prendre pour indice des prix un indice de valeur $V = \frac{\sum_i q_{i1} p_{i1}}{\sum_i q_{i0} p_{i0}}$ dans lequel les prix de chaque période sont pondérés par les quantités de la même période (q_i est remplacé par q_{it} au numérateur et q_{ot} au dénominateur). C'est ainsi que Henri James rapporte en 1835 les «valeurs déclarées» en douanes aux prix courants aux «valeurs officielles» qui étaient établies d'après les prix de 1694. Mais nous n'avons plus à proprement parler un indice de prix. D'autres solutions consistent à actualiser en permanence la base: en France, Alfred de Foville a construit en 1879 ce qu'il a appelé un *baromètre commercial*[12] à partir des publications annuelles de la Direction Générale des Douanes en appliquant aux volumes enregistrés d'abord les prix de l'années passée, puis lorsqu'ils sont officialisés par la Commission permanente des valeurs, ceux de l'année en cours. En pondérant chaque marchandise par la part qu'elle occupe dans le commerce international, De Foville obtenait de proche en proche l'indice de son baromètre commercial. Alfred Marshall a popularisé une forme analogue d'indices chaînés dans lesquels la pondération n'est pas celle d'une année de base 0 mais de l'année t-1.

Le mathématicien allemand Drobisch a proposé en 1871 une double pondération par les deux structures de consommation des dates *o* et *t*, ce qui revient tout simplement à prendre la moyenne arithmétique des indices de temporelles et de temporelles, mais d'un point de vue historique sa proposition est antérieure aux deux autres. Cette idée fut reprise par Edgeworth et Marshall et recommandée par la *British Association.* Allyn Young, Irving Fisher, Pigou et Walsh ont proposé de prendre la moyenne géométrique des deux indices de temporelles et temporelles Dans un ouvrage de 1901, Correa Moylan Walsh propose après une longue discussion une pondération par les moyennes arithmétiques ou géométriques des deux quantités, c'est à dire de prendre $q_i = (q_{i1} + q_{i2})/2$ ou $q_1 = \sqrt{q_{i1} q_{i2}}$.

Les seules formules que nous avons donné correspondent au choix d'une moyenne arithmétique. Or, indépendamment des pondérations, cette *moyenne arithméti-*

[11] H. PAASCHE (1874).

[12] A. DE FOVILLE (1879 et 1882).

que donne un poids important aux fortes valeurs des indices élémentaires, c'est à dire aux biens dont la croissance de prix est élevée, ou aux biens dont les prix baissent lentement. La *moyenne harmonique* (inverse de la moyenne des inverses) a la propriété inverse mais n'a guère été utilisée, bien qu'elle puisse se justifier comme mesure d'un changement de pouvoir d'achat puisque celui-ci est, à revenu fixe, l'inverse d'un prix. Comme le faisait déjà remarquer Messedaglia en 1880[13], la moyenne arithmétique des prix correspond à une moyenne harmonique des quantités achetées avec la même quantité de monnaie. Ses propriétés ont été examinées par F. Coggeshall (*Quaterly Journal of Economics,* 1886) et par I. Fisher. La *moyenne géométrique* a été proposée pour la première fois par Stanley Jevons en 1863[14] dans ses recherches sur la valeur de l'or. Elle possède l'avantage d'occuper une position intermédiaire entre les deux précédentes, mais surtout, comme Jevons l'a bien vu, c'est une moyenne logarithmique qui pondère également les mêmes accroissements relatifs. Lucien March[15], Irving Fisher (1922) et Young[16] (1924) ont fait remarquer également que cette moyenne est réversible, c'est à dire que la moyenne géométrique des indices élémentaires de la période 2 par rapport à la période 1 est l'inverse de la moyenne géométrique des indices de la période 1 ramenée à la période 2. La *médiane* des indices élémentaires présente des qualités de robustesse qui l'ont fait adopter par Edgeworth (1896), Bowley dans ses *Eléments de statistique* (1901), et Mitchell (1915)[17]. Le mode, dit encore *dominante*, a été également proposé comme résumé plus robuste que la moyenne, mais n'est guère utilisé. La robustesse ayant d'ailleurs pour corollaire un manque de sensibilité, plusieurs auteurs ont rejeté ces milieux qui ne sont pas des moyennes: «ce sont des girouettes rouillées» dit A. Julin.

La question des pondérations et du choix des moyennes traitée uniquement d'un point de vue descriptif, sur la base de leurs seules propriétés formelles, peut recevoir ainsi un grand nombre de solutions sur lesquelles les auteurs dissertent à loisir. La littérature est abondante: 140 ouvrages sont cités par Walsh en 1900, et nous dénombrons 440 entrées dans la bibliographie de Julin mise à jour en juin 1928. La question des indices devient un chapitre central des text-books qui fleurissent aux Etats-Unis dans les années vingt. Dès lors un approfondissement théorique s'impose pour discriminer cette prolifération de formules empiriques. Plusieurs approches assez différentes vont se disputer le rôle de fondement d'une théorie des indices: une approche probabiliste, une approche formaliste, une approche microéconomique, une approche macroéconomique.

---

[13] MESSEDAGLIA, A. (1880).

[14] JEVONS, W. S. (1884, 1863, 1865).

[15] MARCH, L. (1921).

[16] YOUNG, A. (1924).

[17] MITCHELL, W. C. (1915).

Approche formaliste de Irving Fisher

On appellera approche formaliste une approche dans laquelle les formules de l'indice sont comparées et évaluées du point de vue de leurs propriétés formelles, syntaxiques, directement déductible de la formule mathématique qui les résume.

Le grand économiste américain, Irving Fisher a consacré deux ouvrages à la théorie des index-numbers. Dans le premier ouvrage[18], il comparait déjà 44 formules différentes d'index-numbers. Dans le second[19], l'auteur a exploré systématiquement toutes les formules possibles (134 formules distinctes) à l'aide de quelques principes simples de combinatoire. Fisher définit d'abord 6 types d'indices selon le choix qui est fait pour la moyenne: moyennes arithmétique, harmonique, géométrique, médiane, mode et «agrégative», c'est à dire par moyenne des prix réels (formule de Dutot) et non pas relatifs. Il y a ensuite 6 façons de pondérer les rapports élémentaires dans ces moyennes: uniformément, par les valeurs de base $(p_0 p_0)$, par les valeurs de l'année $(p_1 p_1)$, hybride $(p_0 p_1)$ et $(p_1 p_0)$, par une moyenne de ces deux pondérations ou des deux précédentes. Fisher définit deux tests, le premier de *réversibilité temporelle* que nous avons déjà évoqué pour la moyenne géométrique, le second de *réversibilité des facteurs* fondé sur le principe que le produit d'un indice de prix par un indice de volume doit redonner l'indice de valeur V. Un troisième test, celui de la circularité, que Fisher avait mis en avant en 1911 est disqualifié par lui en 1922: il peut être choquant de trouver que les prix de Norvège et d'Egypte diffèrent entre eux alors qu'ils sont tous deux égaux aux prix de la Géorgie, mais cela est une conséquence paradoxale des structures différentes des produits et des pondérations qui interviennent dans chaque comparaison. Dans le cas de comparaisons inter temporelles, la circularité d'indices à bases fixe n'est pas en général vérifiée. Une solution comme l'*indice chaîne* où la base change chaque année ne permet pas en principe des comparaisons sur de longues périodes. Les deux tests retenus permettent non seulement de qualifier les formules obtenues, et c'est ainsi que la formule «idéale» de Fisher émerge du lot, mais ils permettent aussi de dupliquer ces formules par «dérivation antithétique» en inversant le temps ou les facteurs. A tout indice de prix $P_{2/1}$, la première dérivation fait ainsi correspondre un indice $1/P_{1/2}$ et la seconde un indice $V/Q_{2/1}$ où Q est l'indice de quantités. La combinatoire se démultiplie encore par un dernier jeu de «croisement» de deux indices ou deux pondérations à l'aide d'une moyenne géométrique. Malgré les quelques redondances que produit cette combinatoire, il n'est pas étonnant dès lors que Fisher arrive à un si grand nombre de solutions, des solutions qu'il prend aussi le soin de chiffrer en temps de calcul et d'appliquer numériquement à une petite base de données.

---

[18] FISHER, IRVING (1911).

[19] FISHER, IRVING (1922).

Le point de vue formel selon lequel la construction, puis la comparaison des indices sont effectuées ne renvoie à aucune signification dans le domaine où ces indices doivent être appliqués. La perspective purement descriptive se heurte à la complexité combinatoire et à la perte du sens. A quelle essence ou à quelle substance renvoie un tel calcul? Pour y répondre, il faut quitter l'approche *générique* (en terme de genres et d'espèces) de ces formalismes, pour une approche *génétique*, proposant une genèse de l'indice à partir d'une matrice conceptuelle, qui permet de rattacher le signifiant des formules à un signifié, de se poser la question de leur *sémantique* possible, ou en d'autres termes de ce que mesurent ces indices.

La théorie (micro)économique de l'indice des prix

Comme le faisait remarquer Frisch en 1930, aucun indice bilatéral ne peut satisfaire tous les tests à la fois, et si l'on relâche les conditions, alors l'approche formaliste à la Fisher, que d'autres auteurs appellent approche par les tests, ou parfois approche axiomatique, ne suffit pas à discriminer toutes les formules possibles. Dès lors il faut trouver des raisons théoriques pour faire ce choix. De plus cette approche formaliste considère que les prix et les quantités sont des grandeurs indépendantes, or la théorie classique de la demande affirme que ces quantités sont liées par des lois d'offre et de demande. A cette approche parfois qualifiée d'atomiste, des auteurs comme Frisch (1936) vont opposer une approche fonctionnelle qui, prenant en compte des relations théoriques entre ces grandeurs vont permettre de sortir de ce formalisme en donnant un sens économique aux formules. La recherche d'une «bonne formule» de l'indice des prix devient dans les années 1920 un problème de théorie microéconomique.

En ce qui concerne l'indice monétaire, ...

En ce qui concerne l'indice du coût de la vie, l'approche dominante considère qu'il s'agit d'établir une comparaison temporelles paribus de deux revenus ou dépenses qui fourniraient la même satisfaction. Supposons que le consommateur maximise une certaine fonction d'utilité F, et minimise une certaine fonction de coût C pour une utilité donnée. Le russe A. A. Könus (1924) a établi sous certaines hypothèses qu'il existe alors un indice des prix optimal (dit «exact» ou «vrai» pour F et C) que l'on ne peut formuler comme rapport des coûts dans deux situations 0 et 1, mais que l'on ne peut pas calculer puisque ces fonctions F et C sont inconnues, mais que l'on peut chercher à encadrer par deux formules empiriques[20]. Haberler (1927), Bowley (1928), Keynes (1930), Bortkiewicz (1932) et Allen (1933) ont abouti de manière tout à fait indépendante à des conclusions analogues. Cependant, si l'on en croit la revue de Staehle (1935), l'apparence similitude des résultats cache

[20] DIEWERT, VOIR (1987).

une différence dans les conditions de cet encadrement qui sont pour Haberler et Allen celles de deux dépenses représentant une satisfaction équivalente, tandis que pour Könus il y aurait deux «vrais indices» différents selon que la satisfaction a augmenté ou diminué. Après son étude de 1932 sur «la mesure de l'utilité marginale de la monnaie» dans laquelle il mobilise l'indice des prix empirique comme approximation du prix d'un «bien général»[21], Frisch (1936) a cherché à l'inverse à fonder une théorie de l'indice sur la théorie du choix du consommateur et plus précisément sur la base des trajectoires des courbes d'indifférence (sentier d'expansion); il a introduit la notion de fonction homothétique pour F dans le cas où une transformation de F par une fonction continue croissante g conduit à des utilités proportionnelles (homothétiques) aux quantités. Sous cette condition, la fonction de coût peut être décomposée en un produit $g(u)\ c(p)$ et les deux conditions de Könus peuvent se résumer à un encadrement d'un «*indifference-defined index*» par les deux indices de temporelles et de temporelles L'indice «vrai» du coût de la vie, défini comme variation des dépenses monétaires assurant un même niveau de satisfaction (ou d'utilité), a pris le nom de COLI (*Cost Of Living Index*) dans la littérature anglo-saxonne et doit être distingué fortement d'un simple indice de dépenses ou de prix moyen parce qu'il cherche à mesurer le seul effet prix et pas l'ensemble des effets prix, quantité, qualité, lieux d'achat qui affectent la dépense d'un ménage. Il doit être distingué aussi d'un indice budgétaire qui ne se réfère au budget-type d'une certaine catégorie de consommateurs. Parce que cette expression de budget-type rappelle trop les méthodes normatives qui ont eu cours dans les années 1910-1930, et parce que certains postes importants de ces budgets sont exclus du calcul de l'indice des prix à la consommation (impôts, logement, ...), les statisticiens français rejettent l'assimilation américaine entre «indice du coût de la vie» et «indice à utilité constante». Comme nous le verrons l'ambiguïté de l'IPC aujourd'hui est bien d'être un hybride entre ces deux conceptions.

Modèles probabilistes de l'indice

Au lieu de chercher un fondement microéconomique à l'indice des prix, plusieurs auteurs de la fin XIXème ont cherché à le dériver de considérations probabilistes relatives à la valeur d'échange. C'est principalement à Jevons et Edgeworth que l'on doit l'introduction de l'approche probabiliste des indices. Mais on peut en chercher les racines plus loin, et remonter à l'influence de Ricardo et de Senior comme le fait John Aldrich[22], ou à Cournot comme le fait Keynes. L'idée de base est donnée par Ricardo:

[21] Voir la recension de ce travail et sa critique par Allen dans Dupont-Kieffer, 2003, Chap. 1.

[22] ALDRICH, JOHN (1992).

Si un bien A s'échange dans les mêmes proportions avec tous les autres biens (*X, Y, Z*, ...) alors qu'un bien B s'échange avec les mêmes autres biens (*X, Y, Z*, ...) dans des proportions qui varient dans le temps, alors «nous pouvons inférer avec une grande probabilité que la variation de prix a été dans ce bien (B) et non dans celui auquel nous le comparons (A)[23]».

Le raisonnement peut se poursuivre chez Senior qui définit la valeur intrinsèque d'une marchandise par la moyenne des valeurs d'échange avec les autres marchandises: «Les fluctuations de valeur auxquelles est soumise une marchandise, par altération de ce que nous avons appelé les causes extrinsèques de sa valeur, ou en d'autres mots, par altérations de la demande ou de l'offre des autres biens, ont tendance, comme toutes les combinaisons de chances, à se neutraliser les unes les autres. Tandis qu'elle garde la même utilité et est limitée dans son offre par les mêmes causes, une certaine quantité de cette marchandise, bien qu'elle puisse s'échanger contre une plus grande ou plus faible quantité de plusieurs marchandises spécifiques, se vendra contre la même quantité moyenne de la masse de toutes les marchandises. Ce qu'elle gagne ou perd dans un sens étant compensé dans l'autre. On peut dire alors que ce bien reste stable en valeur[24]».

En d'autres termes la valeur d'une marchandise A est une abstraction de même nature que la vraie valeur d'une grandeur physique et on peut l'approcher par la moyenne de ses mesures fussent-elles entachées d'erreurs, et de même nature que l'homme moyen, une transposition de cette théorie à la «physique sociale» de Quetelet. C'est une grandeur inobservable directement, qui s'apparente au centre de gravité du système des prix —exprimés en unités de A— de *toutes* les autres marchandises. Les propriétés intrinsèques de A jouent le rôle d'une cause constante, tandis que ses liens par le marché aux autres biens constituent autant de perturbations que l'on peut attribuer à des causes variables. «La rareté et la durabilité de l'or et de l'argent les rend particulièrement peu susceptibles d'altération dans leur valeur par des causes intrinsèques» précise Senior, ce qui prédispose ces métaux précieux à servir de signe monétaire. La valeur de la monnaie est alors dépendante de l'ensemble des biens, elle se donne comme le centre de gravité de tous les prix. Un petit groupe de prix peut dès lors être considéré comme un échantillon de cet ensemble et sa moyenne comme une estimation du centre de gravité. Le mouvement de l'ensemble des prix peut s'abstraire dans le seul mouvement de leur centre de gravité, à savoir la valeur de la monnaie. Tout indice n'est donc que l'estimation, l'approximation par une certaine moyenne de la *vraie* position de ce centre de gravité, de la *vraie* valeur de la monnaie.

---

23 RICARDO, D. (1821): p. 17.

24 SENIOR, N. W., 1965 (1836): notre traduction.

A la différence de Senior, W. Stanley Jevons s'est intéressé à la valeur de l'or d'une façon très empirique, mais son raisonnement est du même type. Par opposition à la «valeur naturelle» ou la «valeur travail» fondée sur les coûts qui est prônée par un bon nombre d'économistes (SMITH, RICARDO, MILL, CAIRNES), Jevons est l'un des promoteurs du marginalisme, c'est à dire d'une détermination de la valeur par le rapport d'échange, lui même déterminé par un principe d'égalisation des utilités marginales. Cette conception induit une définition de la valeur monétaire comme inverse du niveau général des prix qui excluait les «causes intrinsèques» à la marchandise «or». Ces facteurs intrinsèques, comme la découverte des gisements d'Australie et de Californie en 1849 et 1851, ou la modification des techniques d'exploitation, pouvaient être considérés comme analogues aux erreurs systématiques dont on sait que les écarts des observations doivent être purgés pour obéir à la loi des erreurs. Mais c'était maintenant, comme chez Quetelet, précisément ce glissement systématique de tous les prix donc de leur moyenne qui devenait signifiant d'un changement de valeur de la monnaie. De même qu'il est peu vraisemblable que toutes les erreurs fortuites soient de même sens, Jevons pense qu'il est «plus vraisemblable qu'un changement général des prix soit dû à la simple circonstance affectant la demande ou l'offre d'or seule, plutôt qu'à une variété de circonstances affectant séparément tous —ou presque tous— les biens[25]». Dès lors la moyenne fonctionne donc comme un dispositif de filtrage des causes constantes: «en déterminant la variation moyenne (average) de valeur, selon A, d'un nombre suffisant de biens B, C, D, E, etc., nous pouvons toujours mettre en évidence la modification commune probablement due à A. Car les variations particulières contradictoires de B, C, D, etc. se détruiront mutuellement plus ou moins totalement dans ce moyennage, et seules les variations qui souffrent toutes également de la comparaison avec A resteront sans réduction[26]».

Jevons fait ainsi la preuve, à partir d'une table de prix de 39 biens entre 1845 et 1862, qu'une augmentation générale des prix ne peut s'expliquer que par une baisse de la valeur de la monnaie, dont l'une des causes bien connue est la découverte des mines d'or. C'est à cette occasion d'ailleurs qu'il propose en 1863 et 1865 de recourir à une moyenne géométrique, essentiellement parce que «tout changement dans la valeur de l'or affectera tous les prix dans un même rapport».

Si l'acier a augmenté de 50 % et le blé de 20 %, la moyenne des ratios 150/100 et 120/100 n'est pas 135/100 = 1,35 mais $\sqrt{1,5 \times 1,2)} = 1,342$. Et plus généralement, tout indice synthétique est à construire par une moyenne arithmétique des logarithmes des (p_{it} / p_{i0}), qu'il assortit d'ailleurs d'un calcul d'erreur probable.

[25] JEVONS (1863): Op. Cit., p. 22.

[26] JEVONS (1863): Op. Cit., p. 20.

Ce genre de référence au calcul des probabilités est repris d'une façon beaucoup plus explicite dans les travaux de Francis Ysidro Edgeworth, au chapitre VIII de son *qui* de la *British Association*[27]:

> *Voici comment le problème peut être défini. Soit un nombre d'observations consistant chacune en un rapport entre les nouveaux prix et les anciens prix d'un article, trouver la moyenne de ces observations —la moyenne objective ou quasi objective— distincte des combinaisons prescrites dans les précédentes sections par des considérations d'utilité. Le problème ainsi posé appartient à cette haute branche du calcul des probabilités que l'on peut appeler la doctrine des erreurs. Deux sortes de problèmes reposent sur la théorie des erreurs; le premier est représenté par le méthode de détermination de la vraie position d'une étoile à partir d'un certain nombre d'observations séparées erronées, le second, par la méthode de construction de la taille typique d'un être générique, l'homme moyen, à partir de la mesure d'un grand nombre d'individus. A laquelle de ces analogies —la plus ou la moins «objective» des moyennes— notre cas correspond-il? C'est une belle enquête...*

Edgeworth ne répondra pas directement à cette question, qui est celle du réalisme ou de l'idéalisme de la mesure, mais il fournit dans ce texte tous les éléments d'une analogie de la théorie des indices avec la théorie des erreurs, ainsi que les limites de cette analogie. La première chose à faire pour justifier un milieu plutôt qu'un autre était de trouver un modèle de la distribution des prix. Etudiant plusieurs tableaux de données dont une table de Jevons, Edgeworth se persuade assez vite que la distribution est asymétrique et que le modèle normal de la théorie des erreurs doit être amendé. Sans que l'auteur rejette d'autres formes de distributions y compris symétriques, c'est la loi log-normale de MacAlister et Galton (1879) qui lui paraît le modèle le plus conforme aux données, sur la seule base de la dissymétrie, car il n'est procédé à aucune comparaison de fréquences et à aucun calcul d'une fonction d'écart[28]. Il s'en suit directement pour Edgeworth que «la valeur la plus probable de la moyenne est une moyenne géométrique pondérée». Mais il propose aussi au paragraphe suivant d'utiliser «la formule de la médiane pondéré, selon la méthode de situation, décrite par Laplace» dans le second Supplément de sa *Théorie Analytique.* Elle a l'avantage de coïncider avec la moyenne arithmétique en cas de symétrie, et de se rapprocher de la moyenne géométrique en cas de dissymétrie.

Mais les hypothèses de la théorie des moyennes qui en conditionnent les résultats sont-ils transposables et encore valides dans le champ des faits économiques? Edgeworth en rappelle les conditions:

---

[27] EDGEWORTH (1887-89).

[28] Le modèle lognormal est discuté par Maurice Olivier (1927).

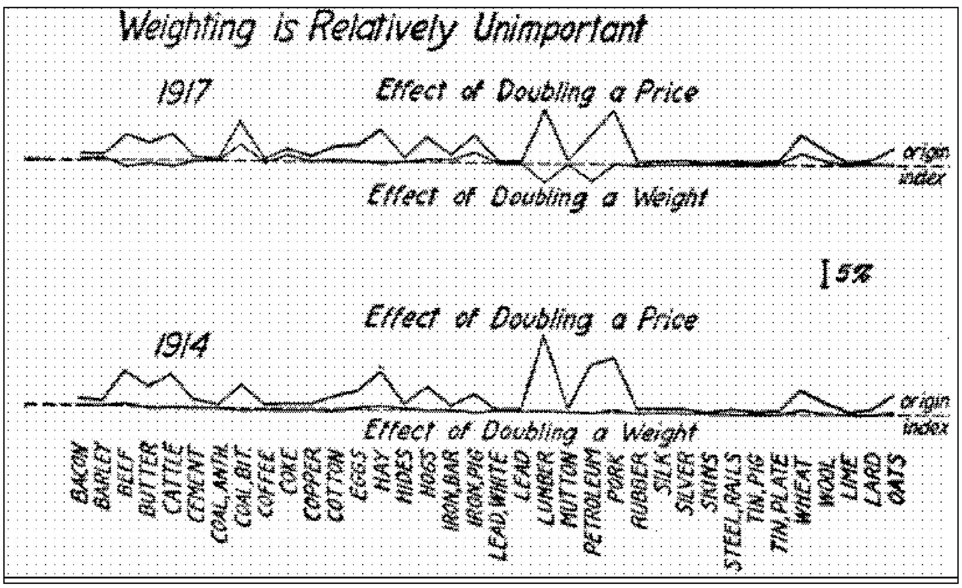
a) L'absence d'erreur constante est synonyme d'un rejet de toute série d'observations qui ne seraient pas les produits du jeu d'un marché parfait. Seuls les prix d'un tel marché sont assimilables à des erreurs accidentelles autour de la vraie valeur de l'ensemble des biens donc de la monnaie.

b) Les observations doivent être indépendantes. En dehors du fait que cela exclut qu'un indice puisse contenir des prix de détail et des prix de gros, ni Edgeworth, ni Julin, ni Keynes ne semblent trouver cette condition très raisonnable dans une économie où les biens ont souvent des utilités croisées ou complémentaires.

c) L'assimilation de l'échantillon de biens sur lesquels est calculé l'indice au résultat d'un tirage au hasard est la condition fondamentale de l'utilisation des résultats du calcul des probabilités. Car si l'on vise le centre de gravité des prix de tous les biens, la moyenne de l'échantillon le fera sans biais à condition que ces biens aient la même chance d'être tirés. Cette représentativité de l'échantillon se réfère à une population qu'Edgeworth appelle un «standard indéfini» de consommation parce qu'elle ne correspond à aucun groupe particulier de biens. Des standards de capital, de consommation, de revenu, de transactions monétaires, ou de production présupposeraient un «certain ensemble de référence» pour lequel le centre de gravité visé ne serait pas le même. En ce sens un indice monétaire n'est pas assimilable à un indice budgétaire.

d) la précision de la moyenne calculée dépend de deux conditions. L'une est classiquement la taille la plus grande possible de l'échantillon qui conduit les économistes à critiquer l'indice à 22 articles (dont 4 formes de coton!) de l'*Economist*. La seconde consisterait à pondérer les biens non pas par les quantités produites ou consommées mais par l'inverse de leur degré de fluctuation, donnant le plus de poids aux produits dont les prix sont les plus uniformes et les plus stables. «Dans ce sens M. March a eu raison d'écrire que dans un index monétaire les variations du prix du poivre peuvent être aussi significatives que celles du blé» dit Julin. oubliant de dire que l'exemple provient directement d'Edgeworth, et peut-être de Jevons qui avait compris le poivre comme l'un des 39 biens de son premier indice. Une pondération fondée sur ce critère n'a rien a voir avec l'importance du bien dans le panier du consommateur, et c'est encore ce qui distingue un indice monétaire d'un indice du coût de la vie.

Tout en recommandant l'usage d'une moyenne pondérée, le second Mémorandum de la BAAS souligne cependant que c'est «une précaution presque inutile pour assurer la précision de l'indice». Edgeworth y affirme que les erreurs sur les seuls poids sont responsables d'une erreur 20 fois plus petite sur l'indice, alors que les erreurs de relevé sur les prix seuls sont responsables d'une erreur 4,5 fois plus faible sur l'indice. Cette affirmation fit l'objet d'une vive controverse avec l'économiste hollandais Pierson dans l'*Economic Journal*[29]. A Pierson avait montré, sur des exemples simulés très simplistes qu'Edgeworth va rejeter comme improbables, que la pondération jouait un rôle très important qui disqualifiait à ses yeux les indices comme outil scientifique. La conclusion d'Edgeworth deviendra le credo de son meilleur élève Bowley —«nous en arrivons à ce principe très important qu'il faut dans le calcul des moyennes accorder tous ses soins à préserver les termes (les prix) de toute erreur et ne pas s'acharner à réaliser l'exactitude de la pondération.»— et de Irving Fisher dès 1911: «En fait dans la construction des nombres indices de prix, les poids sont de bien moins d'importance que les prix eux-mêmes». Dans Fisher (1922, p. 448), il exhibe un graphique montrant que la dispersion des indices est bien plus forte quand on double un prix que quand on double un poids.



Keynes va s'attaquer au même problème dans un mémoire (KEYNES, 1909) écrit en un mois pour l'obtention du prix Adam Smith. Il part des résolutions du comité la *British Association,* et des études de Jevons, Edgeworth et Walsh (1901). Comme il le dit lui-même (Lettre à C. P. Sanger du 23 juin 1909) —«Mes conclusions ne furent vraiment claires à mes yeux que lorsque j'eus fini d'écrire ce chapitre, et il est donc plutôt obscur et pas toujours cohérent»— il est passé d'une opinion bien-

[29] EDGEWORTH, F. Y., 1925 (1896), pp. 356-368.

veillante à l'endroit de la théorie probabiliste des indices à une position franchement critique, position qui se confirmera dans ses écrits ultérieurs comme le *Traité sur la monnaie* (1930).

Keynes résume bien l'argument probabiliste: «Nous devons regarder les variations de prix comme partiellement dues à des causes provenant des marchandises elles-mêmes, les unes augmentant les autres diminuant, toutes à des degrés divers, et, se surajoutant à ces variations dues à des causes hétérogènes, une variation supplémentaire affectant toutes les marchandises dans le même rapport et provenant de changements du côté de la monnaie. Ce rapport uniforme est l'objet de notre investigation. Quand nous avons un changement uniforme se superposant à des changements particuliers et indépendants, nous avons à première vue un problème de calcul des probabilités. Notre objectif est alors d'éliminer les changements indépendants par compensation mutuelle [dans une moyenne] pour faire émerger le changement uniforme comme résidu». Pourtant Keynes ne se suffit pas d'un tel raisonnement.

Il pense d'abord que la connaissance de la variation des prix n'est que d'une faible utilité pour connaître la valeur de la monnaie. Si *a, b, c..., m* sont les rapports des valeurs d'échange des biens *A, B, C* et de la monnaie entre deux périodes, il est impossible de déterminer m d'après les seuls prix *a/m, b/m, c/m.* La séparabilité des effets monétaires et des changements propres à chaque bien ne lui paraît pas possible. «Il y a un grand nombre de causes qui affectent les deux et ce qu'est la cause qui nous intéresse dépend de la définition de la valeur d'échange que nous choisissons. Toute méthode des probabilités qui prétend donc apporter une réponse unique, sans avoir réglé la question du sens particulier dans lequel est employée la valeur d'échange, ne peut être que fallacieuse»[30].

Sa critique porte ensuite sur les conditions d'un transport de la théorie des erreurs qu'il ne trouve pas satisfaites. Les conditions d'indépendance des observations et de non prépondérance de l'une d'entre elles lui semblent non réalistes: «le prix du poivre est sans doute indépendant de celui de la viande, mais la valeur générale d'échange du poivre n'est pas indépendante de celle de la viande». En second lieu, le type de moyenne dépend théoriquement de la loi de répartition des prix que nous ne connaissons pas, ce qui rend la question des pondérations insoluble. Un long appendice totalement mathématique sur la théorie des moyennes reprend de façon critique le lien établi par Laplace et Gauss entre loi normale et moyenne arithmétique, et cherche à déterminer (comme le faisait déjà Bertrand) la loi associée, par un critère du type maximum de vraisemblance, à toute forme de moyenne[31].

---

[30] KEYNES, LETTRE à SANGER, Op. Cit.

[31] Sous des hypothèses assez générales il trouve une solution générale, et, pour chacune des moyennes, les solutions particulières suivantes: une première loi de Laplace pour la médiane, une loi puissance ou log-normale pour la moyenne géométrique, une loi en exp (x^2) pour la moyenne harmonique.

En résumé, pour lui, «nous devons rejeter les canons de pondération du Professeur Edgeworth parce qu'ils sont fondés sur une analogie partiellement fausse avec la théorie des erreurs. (...) La simplicité apparente de la méthode est illusoire, et occulte la quantité importante d'information empirique que nous devons posséder [sur la loi de variation de la valeur d'échange] pour pouvoir l'appliquer avec succès. Il n'y a pas de méthode probabiliste a priori valable en toute circonstance pour la construction des nombres indices».

Comme Walsh quelques années avant lui, Keynes rejette à la fois le constructivisme de Quetelet —une valeur de la monnaie qui comme l'homme moyen serait construite a posteriori par la moyenne sans définition préalable— et le traitement de l'Economie comme une science physique. En toile de fond de ce rejet, il faut lire aussi une controverse plus profonde sur la probabilité. Keynes reproche à Edgeworth sa conception objective et fréquentiste de la probabilité qui ne lui semble pas de mise dans les sciences sociales, et qui conduit à une «analogie partiellement fausse avec la théorie des erreurs». Keynes développe dès cette époque une théorie logique de la probabilité qui trouvera son plein développement dans le traité de 1921[32] Cette théorie qui se fonde sur le «degré de croyance rationnelle» et la prise en compte d'une information préalable, se refuse à toute analogie physique, qui ferait émerger des objets aussi mythiques que «l'homme moyen» de Quetelet ou le «standard indéfini» de Edgeworth, sans qu'ils aient été préconçus.

Plusieurs auteurs ont vu dans la théorie probabiliste une arme de guerre contre la théorie quantitative de la monnaie. Vice versa, les partisans de la théorie quantitative de la monnaie ont souvent cherché à détruire ce raisonnement probabiliste. C'est le cas par exemple de l'ingénieur français François Divisia qui publie en 1925-26[33] dans la *Revue d'Economie Politique* un article sur les nombres indices qui devait faire à lui seul sa réputation malgré une carrière bien remplie. Divisia s'y livre à une attaque en règle contre la méthode probabiliste de Jevons et Edgeworth, qu'il appelle la détermination de l'indice par la loi des grands nombres, avec un argumentaire qui est proche de celui de Keynes. Divisia propose de reconstruire un indice en s'appuyant sur une définition opératoire (la somme des paiements), et sur une relation supplémentaire (la loi quantitative de la monnaie) pour lever l'indétermination du système des prix déjà soulevée par Keynes. Cette loi, conçue par lui indépendamment de Irving Fisher dans son Economique rationnelle de 1928 est considérée comme une définition opératoire de nature comptable qui relie la valeur monétaire $V = 1/I$, la circulation c (produit de la quantité utilisée de monnaie q par

---

32 KEYNES, JOHN MAYNARD (1921): *A treatise on Probability,* London, Macmillan, p. 458 (rééditions 1929, 1943, 1948, 1952, 1957)

33 DIVSIA, F. (1925): *L'indice monétaire et la théorie de la monnaie, REP*, pp. 842-861 et 980-1.008; 1.926, pp. 1.121-1.151; réédition, Paris, Sirey, 1926.

sa rapidité de circulation r), et l'activité des transactions *a : c = ka/V = kaI*. Comme par ailleurs c est la somme des paiements on peut écrire:

$$c = \sum_i n_i = nr = \sum_j p_j q_j \text{ donc}$$

$$\frac{dc}{c} = \frac{\sum_j p_j dq_j}{\sum_j p_j q_j} + \frac{\sum_j q_j dp_j}{\sum_j p_j q_j} = \frac{da}{a} + \frac{dI}{I}$$

Par identification des deux expressions de *dc/c* Divisia obtient un indice des prix I qui résulte de l'intégration de cette formule entre deux dates *t* et *t'*. Si sa forme n'est pas nouvelle, la démarche précédente en fournit une justification théorique, et indique clairement que les prix et les quantités qui interviennent dans cet indice théorique sont ceux de tous les paiements réalisés à l'aide de la monnaie nationale, et font donc intervenir tous les biens et services marchands. Elle indique en particulier qu'il faut inclure dans un indice monétaire les salaires ce qui était controversé, ainsi que tous les prix de détail *à côté* des prix de gros. Elle indique enfin que le prix moyen d'un article ne peut être défini lui même que comme un rapport du total des paiements au total des marchandises, donc de la forme $\sum q_j p_j \big/ \sum q_j$. René Roy, fondateur en France d'une première économétrie, a proposé[34] une décomposition de cet indice en 3 indices —prix de la production, prix du commerce, coût de la vie, le dernier à son tour éclaté en 3 indices reflétant les charges financières, les dépenses de main d'oeuvre et les dépenses de matières. Une application est faite aux indices de la production électrique et des transports. C'est tout l'intérêt d'une définition comptable que de se prêter à de telles décompositions, anticipant les filières de Chait ou les tableaux de Léontief.

Après guerre, de nouveaux usages: indexation et comptes nationaux

La seconde guerre mondiale marque un tournant important dans l'histoire des statistiques économiques qui s'inscrivent dans un contexte de reconstruction, et de croissance inflationniste à deux chiffres, dont une mesure par l'indice des prix devient un enjeu important. La société de consommation touche toutes les classes sociales. Sous l'influence de la pensée keynésienne ses politiques de relance par les dépenses publiques et par la consommation des ménages font suite à celles qui s'étaient inspirées du New Deal juste après la crise de 1930. L'Etat ne se contente plus d'arbitrer entre patrons et ouvriers et de couvrir les risque sociaux majeurs (santé, viei-

[34] ROY, RENÉ (1935): «Les Index Economiques», in *Etudes Econométriques,* Paris, Sirey.

llesse, accidents), il devient pour une part importante un Etat entrepreneur industriel et s'occupe directement de la régulation économique via le secteur public ainsi constitué et via de nombreuses institutions de régulation, et surtout via les deux outils de la Comptabilité Nationale et de la Planification. Les instituts de Statistique en particulier se modernisent et sont dotés de tâches importantes. En France, l'Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques créé en 1946 a absorbé les personnels militaires du SNS créé par Carmille en 1941, et on est passé de quelques dizaines de personnes à la SGF des années 30 à près de 7000 en 1945 puis 3000 en 1950. L'Institut doté de moyens mécanographiques importants, acquis aux nouvelles méthodes de sondage introduites par Pierre Thionet, et profitant de la nouvelle loi sur l'obligation et le secret (1951) se voit confier la tâche d'élaborer un nouvel indice. Des 34 articles de 1914, on passe en 1950 à l'indice des 213 articles, calculés selon une formule de temporelles, base 100 en 1949, qui utilise les prix observés par des enquêteurs de l'INSEE et les pondérations des enquêtes sur les budgets familiaux. La population de référence est d'abord celle des familles ouvrières ou employées de 4 personnes du département de la Seine, étendue dès 1956 à l'ensemble des ménages de toutes tailles dont le chef est ouvrier ou employé puis, en 1962, à toutes les agglomérations de plus de 2000 habitants, tandis que la liste des articles s'allonge à 250 en 1956 et 259 en 1962, incluant motocycles, carburants, radio, jeux, logement, et quelques services (réparation, hôtellerie...).

L'usage de l' indice des prix a changé vers la fin des années 1950. Dans un contexte d'inflation forte, son rôle dans le suivi des politiques anti inflationnistes et dans l'arbitrage des conflits salariaux est devenu prépondérant. Il ne s'agit plus d'évaluation de temps en temps le coût de la vie mais de calculer très régulièrement l'évolution du pouvoir des salariés. Ce lien s'est institutionnalisé dans une politique d'indexation non seulement de la plupart des contrats privés, des rentes et des prestations sociales, mais plus directement des salaires eux-mêmes. L'échelle mobile des salaires s'est inscrite dans la plupart des conventions collectives de branches, et le salaire minimum (SMIG) a été officiellement indexé sur l'IPC par une loi de 1952. Dès lors, il est devenu tentant pour le gouvernement de manipuler l'indice par blocage des prix de certains produits de l'indice, ce qu'il n'a pas manqué de faire à plusieurs reprises. Cette politique de l'indice[35] a même conduit l'INSEE, pris entre deux feux, à créer un second indice de 179 articles aux prix mieux contrôlés, servant uniquement de base à l'indexation du SMIG tandis que l'indice des 259 articles continuait son rôle d'indicateur d'inflation, ce qui génère une réponse du berger à la bergère par le syndicat CGT qui décide en 1972 de publier son propre indice, évidemment régulièrement supérieur à celui de l'INSEE.

Mais cette décision est aussi une réaction à la réforme entreprise par l'Institut dès 1970 pour contrer cette fâcheuse déconsidération de l'IPC. Le nouvel indice dit

---

[35] PIRIOU, VOIR (1992).

des 295 postes est en effet l'objet d'un montage plus complexe: si la liste des postes reste publique elle est éclatée en un millier de «variétés» qui restent secrètes (donc non manipulables) et la mesure des prix de ces variétés se fait par un double échantillonnage des séries (120 000) et des points de vente, donnant lieu au calcul d'un micro indice au niveau de chaque variété (calculé comme un rapport de sommes de prix si la variété est homogène, comme moyenne géométrique de rapports sinon), puis d'un indice de temporelles des postes et enfin d'un indice de temporelles d'ensemble, qui est en fait un indice chaîne (base en décembre de l'année précédente)[36].

Le champ de la consommation couvert par l'indice des prix est celui de la consommation finale des ménages telle que définie par la comptabilité nationale, excluant donc certaines dépenses comme par exemple les impôts, les cotisations sociales, les intérêts des crédits, les achats et constructions d'immeubles et dépenses de logement (qui relèvent de l'investissement), les autoconsommations pour lesquelles il n'y a pas de prix, les assurances et de nombreux services (domestiques, soins hospitaliers, éducation, juridiques, administratifs), pour les mêmes raisons.

Depuis les années 1960, la comptabilité nationale n'est pas seulement pourvoyeuse de nomenclatures (NAP) et de définitions des revenus et des consommations, mais elle est aussi une utilisatrice nouvelle de l'indice des prix. En effet l'IPC est utilisé dans les compte annuels pour passer de l'évolution de la consommation des ménages en valeur (en équilibrant par arbitrage ressources et emplois obtenus de différentes sources) à une connaissance en volume qui est la seule digne d'intérêt pour les comparaisons inter temporelles et internationales. Cela se fait par une simple division par un indice des prix qui est l'IPC pour la majorité des postes. L'IPC est donc la clé de ce que l'on appelle le partage volume-prix. Il faut savoir cependant que la Comptabilité Nationale utilise aussi un système d'élaboration de comptes aux prix de l'année (n-1) et aux prix de 1980 dont l'agrégation repose sur des indices implicites de temporelles qui fournit donc des résultats inférieurs à ceux de l'IPC.

Controverses autour du rapport Boskin

Ces usages variés de l'indice —pouvoir d'achat, indexation, comptes de consommation, évolution du PIB en volume— n'ont pas manqué de brouiller totalement, tout au moins aux yeux du public, le message d'information que l'indice des prix est censé fournir lorsque sa valeur est annoncée dans les médias. Cette situation a été aggravée dans les années 1990 par des débats houleux sur l'indice américain[37].

[36] Pour plus de détails voir INSEE, 1998.

[37] Voir sur ce point les développements plus longs de notre article dans *La Recherche.*

Le point de départ de la controverse est le rapport publié par le sénateur Boskin (1996) au nom d'une commission chargée d'établir le rôle de l'indice des coût de la vie construit et utilisé par le Bureau of Labor Statistics. La commission Boskin conclut qu'il ne fonctionne pas comme un indice du coût de la vie qui mesurerait des variations de prix de paniers de même utilité, et que par rapport à un «vrai» COLI, il accuse une série de biais:

— un biais de substitution des biens: il n'est pas pris en compte le fait que le consommateur modifie ses choix quand les prix relatifs changent.

— un biais de substitution des points de vente: les hypermarchés et les points de discount sont mal représentés dans l'échantillon.

— un biais dû à l'amélioration de la qualité des produits, mal prise en compte.

— un biais dû à l'introduction trop tardive des nouveaux produits du marché dans l'indice.

Le chiffrage des conséquences de ces biais est évidemment la partie la plus spectaculaire du rapport: 1,1 % (et même 1,3 % si on ajoute une autre erreur) de surévaluation d'un indice qui est à l'époque d'environ 2,5 %, ce n'est pas rien. Comme notre sénateur est plutôt un partisan de la dérégulation libérale, il dénonce essentiellement l'effet de ce biais sur le budget de l'Etat fédéral par le biais de l'indexation des tranches d'imposition et des prestations diverses, principalement celles des assurances sociales. Mais d'autres économistes en ont tiré d'autres conséquences en matière de mesure de la croissance: si l'indice est surévalué, alors les taux de croissance du PIB qui servent à évaluer les performances des différents pays, à les classer, etc... sont également faux, comme l'est encore le résultat du partage des fruits de cette croissance entre différentes catégories de population.

Plus de la moitié du biais relevé par Boskin est attribué aux deux dernières causes, celles du changement de qualité. Le principe de l'effet qualité est bien illustré par l'exemple suivant emprunté à la publication de l'INSEE (1998): si entre deux dates données les français consomment la même quantité de pain et que le prix des deux variétés «baguette» et «parisien» n'ont pas changé, l'indice des prix du poste «pain ordinaire» peut évoluer, en l'occurrence à la hausse, du seul fait que les français consomment davantage de «baguettes», plus chères au kilo, que de «parisiens», moins chers au kilo. Le partage volume-prix est alors biaisé du fait que l'indice du poste est surévalué par la surconsommation d'une variété qui est plus chère mais aussi de plus grande utilité (procurant en tout cas une plus grande satisfaction) que la variété observée l'année passée. Le volume de pain ordinaire consommé, qui combine quantité et qualité, sera ainsi sous évalué.

Dans cet exemple, le biais provient d'une modification des proportions de deux biens de qualités très différentes. Plus généralement si nous descendons au niveau de la variété, Il peut se faire aussi qu'un produit voit sa qualité changer sans lui-même changer de nom. C'est le cas depuis la fin des années 1980 avec les ordinateurs et plus généralement les produits et services des Technologies d'Information et de Communication. Ce n'est pas le même ordinateur portable que vous achetez d'une année sur l'autre. Ses caractéristiques ont changé et, en général, il vous offre des services supplémentaires et augmente votre satisfaction. Il peut se faire aussi qu'un produit totalement nouveau apparaisse et ne soit pas enregistré dans l'indice avant une année, voire quelques années si l'on attend les changements de base. On a par exemple utilisé quelques temps l'indice des postes de radio pour caler l'indice des premiers téléviseurs, et celui du livre au démarrage du livre de poche. Le cas n'est pas rare puisqu'en 1997 on a renouvelé 59 000 produits (dont par exemple les cédéroms, les appareils photo jetables, les lentilles de contact...) soit 46 % de l'échantillon.

Faut-il prendre en compte ces innovations? Si l'on se réfère au principe du panier de biens immuable, la réponse est non. Mais alors, au bout de quelques années, l'indice ne correspond plus à aucun standard of life. Si on se réfère au contraire à l'indice à utilité constante il faut évaluer la satisfaction nouvelle qu'apportent ces innovations. Comment le faire? Une première solution consiste à n'introduire un autre produit que s'il est très proche d'un ancien, ou encore dans le cas de variétés hétérogènes, à raccorder par chaînage les 2 indices. Dès les années 1930, des statisticiens comme Waugh dans le domaine de la production agricole, Court pour l'automobile, et Griliches pour les premiers ordinateurs, ont imaginé une autre solution qui mobilise des techniques économétriques. Elle consiste à régresser le logarithme des prix de chaque années sur une constante et une poignée de variables quantitatives ou qualitatives représentant les principaux éléments de qualité[38] des produits. De la différence logarithmique des prix à deux dates, on déduit un indice dit hédonique dans lequel l'effet des caractéristiques en question est éliminé. C'est ainsi que le BLS américain fut amené à corriger son indice pour l'automobile de +45 % à –55 %. L'appliquer aux ordinateurs dans les années 1990 conduit à réviser l'idée d'un prix constant, et à estimer que les prix baissent d'environ 13,5 % par an à qualité égale. Comme de plus cette croissance en volume des TIC est supérieure à celle des autres biens de capital, on a pu montrer[39] que les TIC ont généré un surplus de croissance de l'ordre de 0,3 %.

Malheureusement la méthode hédonique n'est appliquée que dans quelques cas. La généraliser serait très coûteux en données et en études. De plus elle n'est pas la

[38] Pour les asperges de Waugh c'était la taille moyenne, la proportion de vert, et l'homogénéité des bottes. Pour les voitures de Court ce pouvait être la taille, la puissance, la vitesse, la consommation..., et pour les ordinateurs de Grilliches, c'est la taille de la mémoire vive, la puissance de traitement, la capacité de stockage.

[39] MAIRESSE, CETTE et KOCOGLU (2000).

panacée car il semble difficile de l'appliquer à autre chose qu'aux biens manufacturés. Son application à certains produits comme les logiciels, les produits alimentaires, les vêtements.. fait douter que toute amélioration technique soit toujours associée à un accroissement de l'utilité. L'appliquer aux services semble illusoire car les caractéristiques à introduire ne semblent ni consensuelles ni mesurables. Or les services voient leur importance et leur modernisation se faire à très grande vitesse. Mais qu'est-ce que la quantité et la qualité d'un service dans le commerce, dans la banque, dans l'éducation? Est-on bien sûr que le déclin de productivité des services enregistré dans les dernières décennies ne soit pas un artefact de la non mesure des effets qualité de ces services? C'est ce que pensent plusieurs économistes. Les économistes de l'école française de la régulation[40] vont plus loin et pensent que le concept même de productivité est dépassé, et que l'on assiste à une crise majeure d'instruments statistiques comme l'indice des prix, totalement liés à une économie de type fordiste en pleine expansion comme elle l'était entre 1930 et 1970, mais incapables de prendre la mesure d'une économie contemporaine qui serait de plus en plus celle de la qualité, du service et de la connaissance.

Ce qui semble leur donner raison, c'est bien que tout au long du survol que nous venons d'effectuer, l'indice des prix est apparu comme bien autre chose qu'une simple technique de mesure d'un existant défini, mais plutôt comme un objet perpétuellement soumis à une tension entre le réalisme accepté des phénomènes économiques qu'il doit refléter et les multiples variations que ce réel reflété subit du simple fait du prisme des problématiques différentes auquel on lui demande de s'associer. Bien plus que par les propriétés formelles de sa formule, l'indice est configuré par l'ensemble des questions qui viennent de la conjoncture économique (croissance, inflation, chômage, pauvreté) et de l'agenda politique, et par la forme des conventions qui sont alors élaborées. Mais ces conventions peuvent très vite se retrouver mises en porte à faux par de nouveaux événements. L'irruption des TIC, le développement d'un marché des services, l'harmonisation européenne, et la mondialisation forment certainement une matrice de conditions qui nécessitent de nouvelles conventions.

BIBLIOGRAPHIE

AFTALION, A. (1928): *Cours de statistique, professé en 1927-28 à la faculté de droit,* recueilli et rédigé par J. L. homme et J. Priou, Paris, PUF.

ALDRICH, J. (1992): «Probability and Depreciation: a History of the Stochastique Approach to Index Numbers», *History of Political Economy,* 24-3, pp. 657-687.

[40] VOIR JEAN GADREY (2001) et notre article de *La Recherche.*

ARMATTE, M. (1992): «Conjonctions, conjoncture et conjecture. Les baromètres économiques», *Histoire et Mesure,* VII, 1-2, pp. 99-149.

ARMATTE, M. (1995): *Histoire du modèle linéaire. Formes et usages en statistique et économétrie,* Thèse EHESS, Chapitre 11.

ARMATTE, M. (2003): «Tempête sur l'indice des prix», *La Recherche,* Hors série n.° 13, «Petits et Grands Nombres».

BOSKIN, M. (1996): «Toward a more Accurate Measure of the Cost of Living», Final report to the Senate Finance Committee, 4 décembre 1996, *www.ssa.gov/history/reports/*

BOWLEY, A. L. (1928): «Notes on Index Numbers», *Economic Journal,* 38, pp. 216-37.

B.I.T. (ed.) (1924): *Les Baromètres économiques,* rapport présenté au Conseil Economique de la S.D.N., Etudes et documents série N, n.° 5, Genève.

DESROSIERES, A. (1996): «Du travail à la consommation: l'évolution des usages des enquêtes sur le budget des familles», in *L'évolution des enquêtes «conditions de vie» de l'INSEE du XIXè siècle à nos jours,* INSEE (cinquantenaire).

DESROSIERES, A. (2000): *La politique des grands nombres. Histoire de la raison statistique,* La Découverte.

DIEWERT, E. (1987): «Index Numbers», *Palgrave Dictionary.*

DIEWERT, E. et NAKAMURA, A. (dir.) (1993): *Essays in Index Number Theory,* Elsevier.

DIVSIA, F. (1926): *l'indice monétaire et la théorie de la monnaie, REP*, 1925, pp. 842-861 et 980-1.008; 1926, pp. 1.121-1.151; réédition, Paris, Sirey, 1926.

DUPONT-KIEFFER, A. (2003): *Ragnar Frisch et l'économétrie: l'invention de modèles et d'instruments à des fins normatives,* Thèse de doctorat Université Paris.

DUTOT, C. (1738): *Réflexions politiques sur les finances et le commerce,* La Haye.

EDGEWORTH, F. Y. (1909): «De l'aide que le calcul des probabilités peut prêter à la statistique», *BIIS*, XVIII, pp. 220-253.

EDGEWORTH, F. Y. (1925) (1887-1889): «Measurement of Change in Value of Money» et «Tests of Accurate Measurement», à partir de trois mémoires présentés à la *BAAS* en 1887-89, *Papers Relating to Political Economy,* London, Macmillan, Vol. I, pp. 195-335.

EDGEWORTH, F. Y. (1925) (1896): «A Defence of Index-Numbers», *Economic Journal,* mars 1896, et *Papers Relating to Political Economy,* London, Macmillan, Vol. I, pp. 356-368.

EDGEWORTH, F. Y. (1910): «Index Numbers», *Palgrave's Dictionary of Political Economy.*

FISHER, I. (1911): *The Purchasing Power of Money,* New York, Macmillan.

FISHER, I. (1922): *The Making of Index Numbers. A Sudy of their Varieties, Tests, and Reliability,* New York, Houghton Mifflin.

DE FOVILLE, A. (1879 et 1882): «Le mouvement des prix dans le commerce extérieur de la France», *L'économiste français.*

FRISCH, R. (1936): «Annual Survey of General Economic Theory: the Problem of Index Numbers», *Econometrica*, vol. 4, pp. 1-38.

GADREY, J. (2001): *Lettre de la Régulation,* 39, Décembre 2001. *http://www.upmf-grenoble.fr/irepd/regulation.*

GORDON, R. J. (2000): «The Boskin Commission and its Aftermath», NBER working paper, *www.nber.org/papers/w7759*.

HORVATH, R. (1989): «The Rise of Macroeconomic Calculations in Economic Statistics», in Krüger, Gigerenzer and Morgan (eds), *The Probabilistic revolution,* Tome 2, MIT Press, pp. 147-169.

HUBER, M. (1946): *Statistiques Economiques Générales. 2. Les coûts des produits et des services. 3. Conjoncture et prévision, in Cours de Statistique Appliquée aux affaires,* Vol. IV, Paris, Hermann/ISUP.

INSEE (1998): *Pour comprendre l'indice des prix,* Paris, INSEE-Méthodes, n.° 81-82.

JEROME, H. (1924): *Statistical method,* New York.

JEVONS, W. S. (1884) (1863, 1865): *A Serious fall of the Value of Gold Ascertained,* Londres, 1863, et "On the Variations of Prices and the Value of the Currencies since 1782, *JRSS*, 1865; réédités dans *Investigations in currency and finance,* H. S. Foxwell (ed), Londres, 1884, pp. 15-118 et 119-150.

JULIN, A. (1923-28): *Principes de Statistique théorique et appliquée,* tome 2: statistique économique; fasc. I: statistique du commerce extérieur et des transports, Paris, Marcel Rivière, 1923, p. 151; fasc. II: statistique des prix et méthode des index-numbers, Paris, Marcel Rivière, 1928, p. 338.

KENDALL, M. (1977): «The Early History of Index Numbers», *Studies in the History of Probability and Statistics,* Kendall et Plackett eds, Londres, pp. 51-62.

KEYNES, J. M. (1909): «The Method of Index Numbers with Special Reference to the Measurement of General Exchange Value», *Collected Writings of John Maynard Keynes,* D. Moggridge (ed), Macmillan Cambridge University Press, 1983, Vol. XI, pp. 49-173.

KEYNES , J. M. (1921): *A Treatise on Probability,* London, Macmillan, p. 458, rééditions 1929, 1943, 1948, 1952, 1957.

KLEIN, J. L. (1997): *Statistical Visions in Time,* Cambridge University Press.

KLEIN, J. and MORGAN, M. (eds) (2001): *The Age of Economic Measurement,* Annual Supplement to Volume 33 *History of Political Economy,* Durham and London, Duke University Press.

KÖNUS, A. A. (1939): «The Problem of the True Index of the Cost of Living, *Econometrica*, 7, pp. 10-29.

LASPEYRES, E. (1864): «Hamburger Waarenpreise 1850-1863 und die californisch-australischen Goldendeckungen seit 1848», *Jahrbücher für National Oekonomie und Statistique.*

LEJEUNE, J. (1935): *Les méthodes de construction des Index-Numbers,* Paris, Sirey.

LEQUILLER, F. (2000): «La nouvelle économie et la mesure de la croissance», *Economie et Statistique,* n.° 339-340, pp. 45-71.

LIESSE, A. (1905): *La Statistique. Ses difficultés. Ses procédés. Ses résultats,* Paris, Guillaumin et Alcan, p. 188 (2ème édition 1912, 3ème éd.1919, 4ème éd 1933).

MAIRESSE, J.; CETTE, G.; KOCOGLU, Y. (2000): «Les technologies de l'information et de la communication en France: diffusion et contribution à la croissance», *Economie et Statistique,* 339-340, págs. 117-146.

MARCH, L. (1921): «Les modes de mesure du mouvement général des prix», *Metron*, n.° 4, p. 73.

MARCHAL, A. (1944): *Economie politique et Technique statistique,* Paris, Librairie Générale de Droit et de Jurisprudence.

MESSEDAGLIA, A. (1880): «Il calcolo dei valori medii e le sue applicazioni statistiche», *Archivo di Statistica,* V, trad. fr. *Annales de démographie internationale.*

MENARD, C. (1977): «Trois formes de résistance à la statistique: Say, Cournot, Walras», *in Pour une Histoire de la Statistique,* Tome 1, Paris, INSEE.

MITCHELL, W. C. (1921) (1915): *The Making and Using of Index Numbers, Bulletin of the United States Bureau of Labor Statistic,* N.° 173; seconde édition *Bulletin,* n.° 284, 1921.

NEUMANN-SPALLART, 1887, «La mesure des variations de l'état économique des peuples», lue le 13 avril 1887, *Bulletin de l'I.I.S.,* II, p. 150.

OLIVIER, M. (1927): *Les Nombres-Indices de la variation des prix,* Paris, Giard.

PAASCHE, H. (1874): «Ueber die Preisentwickelung der letzten Jahre, nach den Hamburger Börsennotirungen», *Jahrbücher für National Oekonomie und Statistique.*

PERSONS, W. (1919): «An Index of Economic Conditions», *RES*, avril, pp. 111-205.

PETIT, P. (2002): «La notion de productivité, d'un régime de croissance à l'autre», *La lettre de la régulation, http://www.upmf-grenoble.fr/irepd/regulation.*

PIRIOU, J. P. (1992): *L'indice des prix,* Paris, La Découverte.

PRASCH, R. E. (1995): «The probability approach to index number theory, in RIMA Ingrid H., *Measuremet, Quatification and Economic Analysis: Numeracy in Economics,* New York, Routledge.

PRIME, M. et SAGLIO, A. (1995): «Indice des prix et prix moyen: une étude de cas», *Economie et Statistique,* 285-286, pp. 35-48.

REMPP, J. M. (1987): «les indices de prix à la consommation», in *Pour une Histoire de la Statistique*, INSEE, tome 2.

REMPP, J. M. (1996): «l'expérience française des indices de prix à la consommation», working paper, *www.insee.fr.*

RICARDO, D. (1821): *Principles of Political Economy,* 3ème éd., in *Works and Correspondance of D. Ricardo,* P. Straffa (ed), Londres, Cambridge Univ. Press.

ROY, R. (1935): «Les Index Economiques», in *Etudes Econométriques,* Paris, Sirey.

SENIOR, N. W. (1965) (1836): *An Outline of the Science of Political Economy,* New York, A. M. Kelley.

SPENCER BENZHAF, H. (2001): «Quantifying the Qualitative: Quality-Adjusted Price Indexes in the United States 1915-61, in Klein et Morgan», *The Age of Economic Measurement,* pp. 345-370.

STAEHLE, H. (1934): «International comparison of food costs, *in International Comparisons of Costs of Living»,* Etudes et rapports du BIT, n.° 20, BIT, Genève.

STAEHLE, H. (1935): «A development of the Economic Theory of Price Index Numbers», *The Review of Economic Studies,* LSE, vol. II, n.° 3, pp. 163-188.

VANOLI, A. (2002): *Une histoire de la comptabilité nationale,* Paris, La Découverte.

WALSH, C. M. (1901): *The measurement of general exchange value,* New York, Macmillan, p. 580.

YOUNG, A. A. (1924): «Index-numbers», in H. L. RIETZ (ed), *Handbook of Mathematical Statistics,* N. Y, Houghton Mifflin Cy., pp. 181-194.

ZIZEK, F. (1913): *Statistical Averages. A methodological Study,* trad. américaine W. M. Persons, New York, Henry Holt and Cy.

CAPÍTULO 21

Los comienzos de la estadística matemática (1914-1936)[1]

JOSÉ M. ARRIBAS MACHO
UNED

Introducción

Entre los especialistas de historia de la estadística está ampliamente aceptado que los años veinte fueron determinantes en el nacimiento de la estadística matemática. Donald Mackenzie, por ejemplo, concluye su ya clásico estudio *Statistics in Britain*, afirmando que «a mediados de los años veinte había ya signos claros del comienzo de una nueva era en el desarrollo de la estadística teórica en Gran Bretaña»[2]. Pero ¿cuáles son las características de esa nueva era que afecta al Reino Unido y al conjunto de los países europeos?[3] y sobre todo ¿de qué estadística se trata?

Estos años veinte son, desde todos los puntos de vista, un período de gran vitalidad para España. En este país, la estadística se desarrolla como en el resto de paí-

[1] Versión francesa: *Les debuts de la Statistique mathematique en Espagne* (1914-1936) Mathématiques et Sciences Humaines, CAMS, École des Hautes Études en Sciences Sociales, París, n.º 166, 2004.

[2] MACKENZIE, D. A. (1981), pág. 213.

[3] Además de los países europeos centrales, es interesante considerar el desarrollo de la estadística en Rusia, especialmente en las figuras de A. TCHOUPROV (1874-1926) y A. G. KOVALEVSKI (1892-1933). Este último publica en 1924 *Fundamentos de la teoría del método de sondeo,* Saratov. Véase BLUM, A. y MESPOULET, M. (2003).

ses europeos, en dos direcciones bien diferenciadas: la física matemática, y la econometría. Encontraremos igualmente en España los problemas ligados a la institucionalización de la disciplina y al cambio de paradigma que está asociado a los nombres de F. Y. Edgeworth y A. L. Bowley. Nuestro punto de partida será, por tanto, considerar ese cambio de paradigma que coloca a la teoría de muestras como centro nuclear de la nueva estadística, así como algunos problemas técnicos y metodológicos. Las condiciones sociales y políticas de este período harán finalmente posible el nacimiento de una nueva ciencia llamada estadística matemática.

El trabajo que presentamos comprende tres partes. En la primera, mostramos la influencia de la estadística inglesa y sobre todo, la vía representada por F. I. Edgeworth y A. Bowley, así como los problemas ligados a la aplicación de las nuevas técnicas. Es en el interior de otra nueva disciplina como la sociología donde se producen las críticas más interesante al respecto. En la segunda parte presentamos los hechos y los actores españoles de la estadística matemática, y en la tercera, algunos problemas metodológicos ligados a la enseñanza de la estadística, así como a la confusión de dos paradigmas: el modelo lineal, ya muy desarrollado, y la Teoría de Muestras que emerge.

¿Qué es la estadística matemática?

A mediados de los años veinte[4], la estadística jugaba ya un papel importante en actividades como la agricultura, la producción industrial, la investigación, la industria militar y la gestión de servicios públicos, mientras que algunos instrumentos estadísticos habían alcanzado un cierto grado de sofisticación[5], sobre todo, a partir de la aparición de los primeros manuales de estadística matemática. Como hechos significativos podemos destacar que Bowley ocupa en 1919 la primera Cátedra de Estadística de la Universidad de Londres, y que en 1928 se inaugura el Instituto Henri Poincaré, en cuyo interior se instala definitivamente el Instituto de Estadística de la Universidad de París (ISUP) creado en 1922[6]. En 1927, Schultz publica *Mathematical Economics and the Quantitative Methods*, Darmois publica *Statistique*

[4] Los años veinte son una época de extraordinaria vitalidad intelectual que algunos han llegado a considerar la más importante desde la época del pensamiento griego; sirvan como ejemplo las interpretaciones elaboradas por el Instituto de Física de Copenhague entre 1925-27 en torno a Bohr sobre el espacio la causalidad y el tiempo, o los artículos que pueden encontrarse en un mismo número de la *Revue Philosofique francesa* sobre la noción de causa (MEYERSON), sobre física cuántica (GOBLOT) o sobre estadística (HALBWACHS).

[5] «El momento fuerte de la tecnología de los barómetros se sitúa precisamente en los años 1920», *ARMATTE*, M. *Conjonctios, conjoncture et conjecture. Les baromètres économiques* (1885-1930), Histoire & Mesure, 1992, VII-1/2, pág. 99.

[6] Véase el número 67, marzo 2002 de *Gérer & Comprendre*. Annales des Mines, especialmente el artículo de Francis Pavé y las entrevistas de Georges T. Guilbaud y Bernard Bru.

Mathématique en 1928, y las traducciones, reediciones y adaptaciones de los manuales de Bowley (1901) y Yule (1911) se suceden. El primer manual español,[7] escrito por Antonio de Miguel verá la luz en 1924.

Aunque la estadística matemática irrumpe en los manuales y enseñanzas de estos años, resulta evidente que se gesta en las décadas anteriores. Para comprender el sentido de esta irrupción, vamos a servirnos del informe de Arthur L. Bowley, leído en 1906 ante la Sección de Economía y Estadística de la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia, y publicado ese mismo año en el Boletín de la Royal Statistical Society[8]. Dicho texto ha sido considerado la primera presentación pública del utillaje estadístico que más tarde se conocerá como Teoría de Muestreo[9] y que pasa a convertirse en el núcleo original de la estadística inferencial moderna.

Bowley asegura que a principios de siglo la enseñanza de la estadística no era todavía relevante en Gran Bretaña. En los planes de estudios de economía[10] de las universidades británicas las matemáticas ocupaban un pequeño lugar y no encuentra evidencias de que las aplicaciones estadísticas o la Teoría de la Probabilidad estuviesen incluidas en otros planes de estudios.

¿Qué se estudia entonces en las universidades inglesas de 1906? En las Facultades de Comercio de Manchester y Birmingham, las más avanzadas de la época, se estudiaban métodos simples no matemáticos, naturaleza de las medias y números índices, y en las reputadas Universidades de Cambridge y Oxford, nos dice Bowley, no había cursos ni exámenes sobre aplicaciones de la estadística. En la Facultad de Económicas de Londres, donde la estadística se había elevado al nivel de Birmingham o Manchester, existía un reconocimiento algo mayor, pero Bowley es concluyente al respecto, las universidades dedican a la estadística muy poco espacio en sus planes de estudios y la disciplina se enseña con un bajo nivel: «no hay

[7] DE MIGUEL, A. (1924): *Metodología estadística. Fundamentos de estadística matemática,* Madrid.

[8] BOWLEY, A. L. (1906), págs. 540-558.

[9] DESROSIERES, A. (1933): *La politique des grands nombres*, Editions la Decouverte, París, pág. 275, *El administrador y el científico* en ARRIBAS, J. M. y BARBUT, M. (2002): *Estadística y Sociedad*, UNED, pág. 143. ARRIBAS, J. M. (2002): Presentación del texto de A. L. BOWLEY, *La aplicación del muestreo a los problemas económicos y sociológicos,* EMPIRIA, n.º 5, UNED. págs. 195-199.

[10] En su exposición, Bowley comienza reconociendo el trabajo realizado por la sección F de la Asociación a Favor del Desarrollo de la Ciencia Estadística, al menos desde 1835, aunque señala que es a partir de 1856 cuando recibe el *curioso nombre* de Ciencia Económica y Estadística. También a nosotros nos resulta curiosa la asociación de estadística y economía, puesto que hasta ese momento la estadística había estado asociada al Estado, a la astronomía, o a la ciencia social. En ese mismo momento, Quetelet está impulsando en Bruselas un vasto programa de construcción de la estadística como ciencia social positiva. En Inglaterra, en cambio, la Royal Society ha vinculado ya la estadística a la economía, y la economía política y la hacienda pública comienzan a transformarse en «ciencia económica».

señales de que en titulaciones como la economía esté incluida la estadística o la Teoría de la Probabilidad». Tampoco era fácil encontrar en 1906 matemáticos capaces de aplicar sus conocimientos a los asuntos públicos, por lo que Bowley propone a la Asociación Británica para el Avance de la Ciencia desarrollar un vasto plan que vincule matemáticas y ciencias sociales, similar al que cuarenta años más tarde impulsarán las fundaciones americanas de los Estados Unidos.

Bowley recuerda que los métodos de la correlación desarrollados por Bravais (1846), Galton (1888), Edgeworth, Pearson y Yule, están ya generalizados antes de que se institucionalice la enseñanza de la estadística matemática y, sobre todo, mucho antes de que se comience a trabajar con muestras. También sabemos por Michel Armatte que a partir de 1880 comienza a definirse una estadística cuyos principios y técnicas son muy diferentes de la Teoría de las Medias que había caracterizado casi todo el siglo XIX y cuyo objetivo será la presentación de diferentes medidas de forma comparada[11]. En 1906, la medida mediante medias, así como las ideas de mediana, cuartiles, moda, media aritmética, dispersión, mediana y desviación típica, números índices, eran ya propiedad común de un pequeño grupo de estadísticos «avanzados» y se utilizaban normalmente en estadísticas oficiales de Gran Bretaña y Estados Unidos.

¿Cómo abordar entonces la emergencia de la estadística matemática? La primera tarea consiste en delimitar el campo, y en este sentido Bowley traza una clara barrera que separa las prácticas estadísticas anteriores, del corpus teórico-práctico que va a definir a la nueva ciencia, y que es definida por «el método»[12]. Un método de medida que permita discernir entre la verdad o la falsedad de los razonamientos en los que se basa la tabulación de datos estadísticos, y que enlaza con esa rica tradición británica, que desde el siglo XVII convierte el método en centro y fuente de legitimación de toda la ciencia experimental. La estadística está a punto de alcanzar dicho estatuto.

---

[11] «Este nuevo tema del método estadístico aparece también en los tratados de comienzos de siglo: Bowley, por ejemplo, que va a desarrollar la Teoría de las Muestras y de los Sondeos, aumenta significativamente las páginas dedicadas a la dispersión entre la segunda (1902) y la cuarta edición (1920) de su tratado. El vienés Zizek dedica un tratado completo en 1913 a las medias estadísticas y Ronald Fisher desarrolló en 1922 un programa de investigación que permite articular estadística descriptiva y Teoría de la Estimación». ARMATTE, M. (1992): *Conjonctios, conjoncture et conjecture. Les baromètres économiques (1885-1930),* Histoire & Mesure, VII-1/2, págs. 99-149.

[12] «El método» se convierte ya en el siglo XVII en el núcleo duro de la nueva ciencia experimental. Bacon, Descartes, Hobbes, Hooke y tantos otros tenían una confianza total en su capacidad para comprender la naturaleza a condición de que el espíritu fuese disciplinado por «el buen método». Véase SHAPIN, S. (1996): «La Révolution Scientifique», *Flammarión* 1998. Título original «The Scientific Revolution».

Bowley califica a las anteriores técnicas de recogida de información «arte estadístico», en tanto que a la nueva estadística la califica como «ciencia»[13]. De este modo, la estadística matemática se presenta como una ciencia equivalente al resto de las ciencias naturales, en el sentido de que sus desarrollos teóricos tienen también aplicaciones prácticas como la gradación de impuestos, o la estimación del consumo de los trabajadores. La aritmética estadística queda así reducida al mero papel de la tabulación de datos (*exactos*), es decir, a «contabilidad», mientras que la estadística matemática consistirá en aplicar los principios matemáticos a la medida de «lo inaccesible»[14] haciendo posible la observación desde bases inciertas. En definitiva, la estadística matemática va a utilizar los principios matemáticos al objeto de realizar «inferencias», en tanto que asigna a la vieja aritmética estadística los sistemas lógicos de clasificación puestos en marcha por las oficinas centrales de estadística, y especialmente por el Instituto Internacional de Estadística.

Bowley presenta así todo un programa para convertir la estadística en disciplina científica incorporando la idea de «precisión», para lo cual recupera una vieja herramienta de la astronomía, como es el concepto de «error probable». Hay que decir, no obstante, que su posición respecto a las posibilidades de la estadística matemática es muy moderada:

> *Hay que reconocer que muchas estadísticas son necesariamente aproximadas. En estadística, la exactitud y la precisión consisten en estimar el límite de error posible y probable, y el falso espectáculo de la llamada a sí misma seguridad matemática debe ser desenmascarado.*[15]

La «medida estadística», es, por tanto «aproximada y provisional», y del mismo modo que otras ciencias como la física recurren a los experimentos para mejorar su consistencia, la consistencia de las «estimaciones estadísticas» se mejora mediante «muestras» cuidadosamente seleccionadas. Aparentemente, Bowley era ya muy consciente de las posibilidades del método de muestreo para convertirse en poderosa arma de investigación.

La teoría se había desarrollado rápidamente, y una gran parte de los nuevos métodos estaban listos para su uso entre biólogos y botánicos. Sin embargo, apunta

[13] El término «científico», nos dice Esteven Shapin no se inventa hasta el siglo XIX y no pasa al lenguaje común hasta principios del siglo XX. En el siglo XVII, la palabra «ciencia» (scientia) significaba «conocimiento o inteligencia» y designaba cualquier conjunto de conocimientos establecidos.

[14] Pone un ejemplo familiar a la eugenesia como saber la altura de un animal a partir de la longitud del brazo.

[15] «It must be recognised that most statistics are necessarily approximate; and just as in other scientific measurements the quantity is given as correct to so many significant figures, so in statistics the possible and probable limits of error should be estimated, and the false show of so-called mathematical accuracy given up.» BOWLEY, A. (1906): pág. 543.

Bowley, no aparecieron aplicaciones importantes hasta que no se comenzó a tomar en serio «la relación de la frecuencia de las desviaciones con la Ley del Error». El método de las muestras contaba con los materiales necesarios para su desarrollo, al menos, desde los trabajos realizados por Edgeworth en 1885. El control de la naturaleza de la medida conduce a Bowley a proponer, por ejemplo, la estimación más probable de una media de salarios, y para ello, propone un tipo de enunciados del tipo 24 s. ± 6 d., adoptando la desviación típica como medida de seguridad (*en una curva normal de frecuencias, sobre dos tercios del área están en la desviación típica*). Cuando esto es aplicable, nos dice, constituye una medida de precisión completa.

El nuevo método contará así con dos vías de acceso: la propuesta de Pearson, es decir, ajuste de las observaciones determinando una curva de frecuencia que permita asignar a la probabilidad de las observaciones; y la de Edgeworth, que consiste en aceptar la Ley generalizada de los Grandes Números y determinar *a priori* cuándo puede esperarse dicha ley. Con un ejemplo, a partir de datos del *Investor's Record* y del *Almanaque náutico,* apunta que todas las posibilidades de selección han de ser las mismas para todos los ítems de un grupo. La precisión en ningún modo depende del tamaño del grupo muestreado, sino «sólo de su naturaleza y del número de muestras que tomamos». La precisión puede, por tanto, hacerse tan grande como se quiera, y el error probable «y posible» puede hacerse tan pequeño como queramos con sólo aumentar el tamaño de la muestra.

Bowley concluye afirmando que el uso de ese método deberá permanecer por un tiempo en manos de especialistas dado que la teoría aún no está completamente terminada, y que se trata de una más entre las diferentes formas de aplicación de la Teoría de la Probabilidad. Pero lo cierto es que a partir del reconocimiento oficial del método representativo por el Instituto Internacional de Estadística en el coloquio de Roma de 1925, pasará a convertirse en el método absolutamente dominante de la nueva estadística matemática.

Otro elemento importante a considerar, porque también va a influir decisivamente en la formación de la nueva ciencia estadística, es el creciente interés de los sindicatos y organizaciones obreras por los datos estadísticos, pero también el papel de la prensa[16] que comienza a publicar numerosos datos, contribuyendo así a la construcción de un nuevo discurso estadístico[17].

[16] Véase VALLEJOS, A. (2002): «El fiscal y el periodista: demanda estadística en los orígenes de la investigación social en España» en ARRIBAS, J. M. y BARBUT, M. «Estadística y Sociedad», Ediciones de la UNED, Madrid, págs. 65-79.

[17] Bowley, no obstante, condena la confianza ciega y a menudo equivocada que se concede a las declaraciones estadísticas (*certain blind and misguided confidence in statistical statements*) BOWLEY, Op. Cit. 542.

Estadística matemática y sociología

La estadística encuentra finalmente su método en la aplicación de la Teoría de Errores a los problemas sociales[18] e Inglaterra se convierte en el hogar privilegiado de la nueva ciencia[19], posiblemente debido a la existencia de una tradición que prima la utilización del método empírico y la inducción como filosofía de la naturaleza, y a que es el primer país que introduce el seguro de desempleo (1911)[20]. En 1923, cuando el Ministerio de Trabajo necesita una descripción detallada de los aproximadamente un millón doscientos cincuenta mil trabajadores registrados como parados, John Hilton, profesor de la Universidad de Cambridge, y a la sazón, director de estadísticas del Ministerio de Trabajo británico, se da cuenta (asistido por Bowley) de la utilidad del llamado método representativo, así como de la necesidad de entrevistar directamente a los parados[21]. Las encuestas sobre las condiciones de vida de la clase obrera y sobre desempleo constituyen el marco de los problemas prácticos que hacen posible el establecimiento de un nuevo método estadístico.

Los protagonistas, en cambio, no son sociólogos como podría pensarse, sino economistas, o mejor, matemáticos convertidos a la economía. Para entender este proceso desde el estricto campo de la sociología, hay que remitirse a los Estados Unidos, y en concreto, a dos figuras claves como F. Ogburn y Samuel A. Stouffer. El primero, autor de numerosas publicaciones sobre el estudio de la opinión pública, abre el debate sobre el método en 1929, en un discurso dirigido a la presidencia

[18] Desde el siglo XVII, el método se ha convertido en el mito de la ciencia, su capacidad para convertir en conocimiento cualquier cosa que toca, dará lugar a numerosas obras emblemáticas, baste recordar *Las reglas del método sociológico* de Durkheim, aparecida en 1885.

[19] La estadística que durante la segunda mitad del siglo XIX se denomina a sí misma «la ciencia social», se independiza de las otras ciencias a principios del siglo XX bajo el influjo de los estadísticos británicos. En España, a partir de 1844, por indicación de Pascual Madoz, José M.ª Ibáñez comienza a impartir clases en la primera Cátedra de Estadística. Ibáñez publica sus clases en un *Tratado elemental de estadística.* Ibáñez maneja la concepción alemana de la estadística de la escuela de Gottfried Achenwal: «por la voz Estadística debe entenderse la descripción de todos cuantos objetos concurren a formar lo que se llama estado», pero se decanta por la corriente francesa que considera la nueva disciplina como «ciencia de los hechos sociales expresados por números o en palabras de Dufau: ciencia que enseña a deducir de los términos numéricos análogos, las leyes de la sucesión de los hechos sociales». IBÁÑEZ, J. M. (1844): *Tratado elemental de Estadística, así en la parte filosófica y de teoría como en la aplicación de sus principios a la práctica,* Imprenta del Colegio de Sordomudos, Madrid.

[20] Todavía hoy día, las encuestas sobre desempleo gozan del mayor prestigio metodológico. En España, las estimaciones del paro realizadas por la EPA (Encuesta de Población Activa) cuentan con mucha más credibilidad que los datos aportados por el registro oficial del INEM (Instituto Nacional de Empleo).

[21] Véase HILTON, J. (1924): «Enquiry by Sample: An Experiment and its Results». *Journal of the Royal Statistical Society,* Vol. LXXXVII, págs. 544-570.

de la American Sociologial Society, en el que hace un llamamiento al abandono de los «procedimientos no científicos» en favor de una práctica estadística objetiva al servicio de la predicción y la ingeniería social. El segundo, PhD en 1930 por la Universidad de Chicago, y formado bajo la influencia de Thurstone y Ogburn, realiza una estancia postdoctoral en la Universidad de Londres con Pearson y Fisher. Durante la II Guerra Mundial dirigirá el Research Branch Information and Education Division del Departamento de Guerra, organismo responsable de la realización de una de las más impresionantes encuestas de opinión pública que se haya realizado nunca: The American Soldier. En ese trabajo contará entre sus colaboradores con Paul Lazarsfeld, el joven astrofísico vienés convertido en sociólogo y más tarde, estrella brillante de la nueva sociología cuantitativa.

En España se realizaron importantes encuestas sobre las condiciones de vida de la clase obrera en el seno del Instituto de Reformas Sociales, organismo pionero de la sociología empírica española formado por un nutrido grupo de sociólogos de formación jurídica que realizan excelentes investigaciones en la línea de las monografías de Le Play. Entre sus logros estadísticos fundamentales está el establecimiento de un índice del coste de la vida del obrero[22]. Por el lado de la sociología académica, tan sólo conocemos la explotación del censo de 1920, realizada mediante muestras por Severino Aznar, Catedrático de Sociología de la Universidad de Madrid[23] y colaborador de Corrado Gini en asuntos demográficos[24].

Es mucho más rica, sin duda, la situación de Francia, donde la figura de Maurice Halbwachs, recientemente recuperada por la *Revue d'Histoire des Sciences Humaines,* sobresale por encima de cualquier otra. Se ha generalizado, no obstante, la idea de que Halbwachs mantuvo respecto al uso de la estadística una actitud ambivalente. Así Olivier Martín, en su trabajo *Raison Statisque et Raison Sociologique chez Maurice Halbwachs* sostiene que a pesar de tratarse del sociólogo francés más interesado por las matemáticas, y el que contaba con mejor forma-

---

22 VID ARRIBAS, J. M. y VALLEJOS, A. (2002).

23 Había sucedido a Sales y Ferré, quien ocupa la primera Cátedra de Sociología en 1899.

24 Se trata de un análisis demográfico comparativo con datos de Madrid. A partir de registros de la Diputación Provincial se seleccionaron 7.775 fichas de familias de clase media (artesanos, pequeños industriales, comerciantes y agricultores); 18.670 fichas de familias de profesiones liberales (empleados públicos, privados, escritores, periodistas, actores, profesores, abogados); 524 fichas de familias acomodadas (aquéllos que tienen un salario entre 4.000 y 5.000 pesetas, que pagan de impuestos entre 7.501 a 10.000 pesetas, o alquiler de 3.000 a 8.000 pesetas; 387 fichas de clases nobles (familias que aparecen en la guía de la *Sociedad de Madrid* y de la *Grandeza de España,* en la que el jefe tiene un título de nobleza o pertenecen a una orden militar). Se trata de un estudio de estilo darwinista sobre la reproducción de las clases sociales medianas y altas; de hecho, la muestra se utiliza para calcular el porcentaje diferencial de nacimientos, mortalidad y de reproducción de las clases sociales. AZNAR, S. (1962): *La familia vista por un demógrafo*, Estudios Demográficos, n.º V, Instituto Balmes de Sociología, CSIC, Madrid, págs. 111-112.

ción estadística, concede a éstas un escaso valor. En palabras de O. Martín, para Halbwachs las matemáticas no sirven «más que para establecer hechos que el sociólogo debe enseguida interpretar y explicar, y que deben ser emplazados en su contexto social preciso»[25]. Nosotros, en cambio, creemos que la posición de Halbwachs es simplemente crítica de los excesos y abusos que empiezan a sucederse a partir de la introducción de las técnicas matemáticas en las ciencias sociales, y que su interés por la estadística está sobradamente demostrado con los estudios que realiza sobre las condiciones de vida de la clase obrera y su acercamiento a los problemas metodológicos y al cálculo de probabilidades.

Vamos a considerar su posición sobre la estadística a partir de un texto de 1935, pero no hay que olvidar que al menos desde 1912, Halbwachs había manifestado ya un gran interés por la estadística con su tesis complementaria para el doctorado en la Facultad de Letras de la Universidad de París. La tesis trataba sobre Quetelet y la estadística moral, y en ella, además de criticar la Teoría del Hombre medio[26], hacía una presentación del cálculo de probabilidades con referencias a Quetelet (*Instructions Populaires sur le Calcul des Probabilités*) y Borel (*Elements de la Teories des Probabilites*).[27] Él mismo publicará en 1924 con Frechet un tratado de divulgación (*Le Calcul des Probabilités à la Portée de Tous*).

En 1935 interviene en un seminario internacional sobre las aplicaciones de la estadística organizado por el Centro Internacional de Synthèse[28], como encargado de presentar los problemas derivados de la aplicación estadística a los hechos sociales. Comienza su exposición titulada «La Statistique en Sociologie», destacando que la estadística ha sido *descubierta* en el ámbito de las ciencias sociales, demografía, recursos del Estado, etcétera y que ha sido definida como ciencia de las medias. A

---

[25] «à établir des faits que le sociologue doit ensuite interpréter et expliquer, et qui doivent être replacés dans leur contexte social précis» *Revue d' Histoire des Sciences Humaines* (1999), págs. 69-103.

[26] A propósito de Quetelet, Halbwachs dice lo siguiente: «la base de su doctrina es que en las ciencias biológicas y sociales, a medida que se multiplican las observaciones, se ponen de manifiesto los tipos, es decir, los casos observados se reparten alrededor de una media, y la Ley de Distribución de sus probabilidades así como la curva puede determinarse mediante el cálculo». HALBWACHS, M. (1912): *La théorie de l' homme moyen. Essai sur Quetelet et la statistiqu moral,* Félix Alcan, París, pág. 14.

[27] También cita a Poincare: «Science et methode» y a Bertrand *Calcul des probabilités.*

[28] En ella intervienen: M. HUBER, director de la Estadística General de Francia con una ponencia titulada «La Estadística: su historia, su organización», E. BOREL con «La estadística. El instrumento matemático: el cálculo de probabilidades»; A. PIGANIOL y Ed. ESMONIN: «La estadística en Historia»; M. HALBWACHS: «La estadística en Sociología»; H. LÉVY-BRUHL: «La estadística y el derecho»; P. VAN TIEGHEM: «La estadística en historia literaria»; G. DARMOIS: «La estadística en Sicología»; G. TEISSIER: «La estadística en Biología»; M. BORN: «La estadística en Física»; P. LANGEVIN: «Estadística y determinismo».

Septième Semaine Internatione de Synthèse, 1935. Revue de Synthèse, 1944, París.

este respecto hace la diferencia entre las medidas utilizadas por las ciencias de la naturaleza y las ciencias sociales, lo que le permite hacer una primera afirmación importante: «cualquier recuento no es una estadística»[29], es necesario que el grupo presente cierta consistencia. La media de las tallas, de los precios recogidos al azar, de los salarios, de los alquileres, etcétera no son estadísticas, y aquí sigue a Simiand.

Se pregunta por las diferencias entre las observaciones hechas en el campo de la biología, donde los seres vivos son entidades reales, y las observaciones realizadas en el campo de los hechos sociales. Los hechos de observación en los seres vivos están formados por conjuntos cuyos elementos son casi idénticos, mientras que no sucede lo mismo en los grupos sociales: «En el fondo, no hay más conjuntos reales que los grupos sociales, precisamente porque están constituidos por elementos diferentes. Todos los otros conjuntos son colecciones»[30].

Visto así, el problema de la estadística se hace complejo porque la población de un departamento no es un grupo social; un período quinquenal o decenal no es un período social definido. Después de recordar que Simiand enunció el precepto de que hay que estudiar los fenómenos «de forma continuada», se pregunta si los grupos de edad, al modo como los utilizan los estadísticos, constituyen una realidad social. Podemos pensar, en principio, que el origen de esa desconfianza de Halbwachs respecto a la estadística es en realidad una desconfianza hacia la utilización hecha por ciertos matemáticos. Habla, por ejemplo, del excesivo «rigor aritmético» que comienza a extenderse en el campo de las ciencias sociales y que considera «un poco artificial y arbitrario».

Halbwachs se cuestiona cómo tener en cuenta la diversidad de clases sociales, de profesiones, del medio rural y urbano: ¿las pirámides de población son las mismas en un mismo país para la ciudad y el campo, en la industria y en la agricultura, en las clases acomodadas y en las pobres? Y añade: la proporción de adultos es la misma en Estados Unidos que en Francia, pero no porque la natalidad sea débil como sucede en Francia, sino porque en el país americano se ha producido una importante inmigración.

Después de todas estas consideraciones, veamos en qué consisten sus reservas hacia la utilización que hacen los matemáticos de la estadística. Hemos visto la defi-

---

[29] «... tout comptage n'est pas une statistique.» *Revue de Synthèse* (1944), pág. 115.

[30] «Tendencias, creencias y pensamientos colectivos se representan desigualmente por cada individuo, cada uno no representa más que una parte, o un aspecto. Es por ello que no hay más que un medio de alcanzar el estado colectivo que consiste en reunir todas las partes, de enumerarlas completamente, de manera que no se descuide ninguna, y de recomponer el conjunto. En el fondo, no hay más conjuntos reales que los grupos sociales, precisamente porque están constituidos por elementos diferentes. Todos los demás conjuntos son colecciones. Las especies vivas son colecciones de organismos, los órganos y los tejidos son colecciones de células, y el organismo mismo sólo es un individuo. Los grupos sociales son algo más, y otra cosa.» Op. Cit, pág. 116.

nición de estadística como ciencia de las medias y de las curvas, pero se trata de un punto de partida. A diferencia de las ciencias físicas, donde si se suprimen algunos aspectos fundamentales durante el experimento el fenómeno no se produce, en la estadística, dice Halbwachs, «las cifras se dejan siempre combinar con cifras».[31] Lo que plantea una vez más la cuestión de la relación entre modelos matemáticos y realidad: «Del mismo modo que el *homo oeconomicus*, un tal *homo demographicus* es una abstracción demasiado separada de la realidad para enseñarnos cualquier cosa que tenga que ver con lo real»[32].

Respecto a la utilización de curvas y gráficos, su posición es también muy clara: «En cuanto a las curvas, deben pasar por todos los pliegues del fenómeno, representarlo en todas sus fases, pero también abarcarlo en toda su amplitud y en todas sus partes».[33] Pero sobre todo, nos interesa la crítica a la utilización de la más famosa de las curvas, porque cita a Gibrat, antiguo alumno de la Ecole Polytechnique y reputado economista de la época, quien afirma a propósito de las desigualdades: «Nuestra ley es esencialmente estadística. Ella simplemente conduce las curvas de distribución económicas a una curva célebre, la curva en forma de campana, también llamada de Gauss, o de errores»[34].

Halbwachs se pregunta si «el ideal de la investigación estadística es llevar los hechos económicos y sociales, sus movimientos y sus variaciones, a tal o cual curva con la que los matemáticos está familiarizados». De este modo, anticipa una práctica que terminará por generalizarse y que en nuestra opinión ha impedido durante mucho tiempo la correcta interpretación del método de las muestras. La confusión de los métodos matemáticos en relación con los procesos sociales ha sido grande, y tal vez está en relación con las disputas académicas y corporativas:

> *Ciertamente la ingeniosidad de los algebristas y los geómetras es grande. Disponen de numerosos procedimientos de ajuste, saben introducir en sus fórmulas diferentes parámetros. Haciendo las convenciones necesarias siempre es posible llevar las curvas observadas a curvas teóricas de forma continua.*[35]

---

[31] Op. Cit., pág. 124.

[32] Op. Cit., pág. 123.

[33] «Quand aux courbes, elles doivent subire tous les replis du phénomène, le représente dans toutes ses phases, mais aussi l'embrasser dans toute son étendue, et en toutes ses parties: c'est ainsi qu'on représentera les mouvements su salaire par plusieurs courbes, continués autant que possibles, juxtaposées, aussi nombreuses qu'il a de donnes correspondant à des groupes différents, agriculture, industrie, et diverses espèces et formes d'industrie, grandes villes, villes moyennes, petites villes. Cela exige un effort d'attention multiple, à la fois abstraite et concrète. Mais cette méthode empirique est la seule qui permette de rester en contacte aussi étroit que possible avec la réalité.» Op. Cit., pág. 124.

[34] Ibídem.

[35] Op. Cit., pág. 25.

Tampoco se salva de las críticas Udny Yule, a quien atribuye algunos excesos como presentar las curvas de población de países tan diferentes como Inglaterra, Francia y Estados Unidos transformadas mediante ajustes, en una misma curva teórica, expresada en una única fórmula. Halbwachs es radical al respecto: las curvas de ese tipo no nos enseñan nada sobre los mecanismos internos, las relaciones entre diversas series nos proporcionan una representación aproximada, pero es, sin embargo, con el estudio de este juego de relaciones cómo comienza, y sólo comienza la investigación positiva.

Luego sigue el *Cours de statistique* de M. Aftalion, con quien establece una polémica a propósito de las alteraciones de los precios que se han producido desde el final del siglo. Pues Aftalion sostiene que dos ciclos y medio le parecen insuficiente para establecer una regularidad. Halbwachs, por el contrario, sostiene siguiendo a Simiand, que «una o dos repeticiones son suficientes para establecer la realidad de estos grandes ciclos». Esto es así, dice Halbwachs, porque Simiand los observa en sus mecanismos complejos, con lo que dos experiencias pueden ser suficientes cuando ponen en juego todo un conjunto de numerosos factores medidos con precisión.

> *Es, a decir verdad, de un modo diferente como hay que concebir la utilización de los métodos estadísticos en sociología cuantitativa. Los métodos estadísticos no nos aportan teorías sino instrumentos de observación y de comparación, a la vez precisos y objetivos, y es en esta dirección en la que habrá que desarrollarlos*.[36]

A este respecto propone examinar *sin entrar en los detalles técnicos* los procedimientos conocidos como coeficiente de dependencia y coeficiente de correlación.

La estadística matemática en España: 1914-1936

El 14 de abril de 1931, se proclama la II República española, y cinco meses más tarde, el 15 de septiembre de 1931, el Instituto Internacional de Estadística celebra en un Madrid ya republicano, su sesión número XX. La reunión estaba prevista desde 1929, por lo que hay que suponer que, al menos desde esa fecha, la estadística española contaba con cierta presencia internacional. Desde el punto de vista de las aportaciones teóricas, la reunión no fue importante, no tendrá la trascendencia de las celebradas en París en 1909 o en Roma en 1925, pero nos sirve para presentar las principales figuras de la estadística matemática española. Asisten personalidades relevantes de la estadística internacional, detalle que es aprovechado para la presentación del nuevo régimen republicano.

[36] Op. Cit., pág. 127.

Las sesiones fueron inauguradas por el presidente de la República D. Niceto Alcalá Zamora, y en ellas participaron, entre otros, Albert Delatour, presidente del Instituto Internacional de Estadística, M. Huber, director de estadística general de Francia, los también franceses Lucien March, Francois Sismiand y M. Girard, profesor, este último de la Escuela de Ciencias Políticas de París; Corrado Gini, profesor de la Universidad de Roma, M. A. Julin, jefe de la delegación estadística belga, John Hilton, profesor de la Universidad de Cambridge y director de estadísticas del Ministerio de Trabajo británico, Arthur L. Bowley, profesor de estadística en la Universidad de Londres, y A. Wilcox, profesor de economía y estadística en la Universidad de Cornell, entre otros.

El grupo de españoles estaba formado por Honorato de Castro, Director del Instituto Geográfico, Catastral y de Estadística y presidente del comité organizador; Joaquín Gichot, jefe del servicio de Estadística del Ministerio de Comercio; Olegario Fernández Baños, vicepresidente del evento, además de profesor de geometría en la Universidad de Santiago de Compostela y subdirector del recién creado Servicio de Estudios del Banco de España; Antonio de Miguel, matemático y director de los servicios estadísticos de la Dirección General de la Deuda Pública; así como José Antonio Vandellos, director del Instituto de Estudios de Barcelona. La mayor parte de ellos son jóvenes profesionales que podemos encuadrar en la generación de 1927, aún cuando alguno de los mayores pertenezcan a la de 1914. Muchos están ya ligados a las actividades de la Junta de Ampliación de Estudios y a ese ambiente intelectual que hace posible la aparición de personalidades como el filósofo Ortega y Gasset, el físico Esteban Terradas, el matemático Rey Pastor, (generación de 1914), los más jóvenes Fernández Baños y Antonio de Miguel, o celebridades de la talla del poeta García Lorca, el pintor Dalí, el cineasta Luis Buñuel, el biólogo Severo Ochoa, etcétera... y tantos otros que caracterizan esta brillante generación de 1927[37].

La II República representa la culminación de un proceso —aunque pronto frustrado por la guerra— de modernización de la sociedad y de las instituciones españolas, que cuenta con el protagonismo de dos generaciones emblemáticas: la de 1898, año de la pérdida de Cuba y Filipinas en guerra desigual con Estados Unidos, repre-

[37] El final de la I Guerra Mundial significó un cambio de era, y la década de los veinte representan en nacimiento de un modelo de sociedad que va a caracterizar todo el siglo XX. Desde el punto de vista económico implicaba la sustitución de los mercados autorregulados por políticas económicas en la que el Estado comienza a intervenir los factores económicos (la tierra —mercados agrícolas—, el trabajo —reglamentaciones laborales— y el capital), participando activamente en la creación de monopolios de servicios como electricidad, comunicaciones, petróleo, etcétera, que coincide con el nuevo liderazgo económico norteamericano. Es también el nacimiento del consumo de masas y de lo que más tarde se llamará sociedad de consumo. Para el caso español, véase: ARRIBAS, J. M. (1994): «*Antecedentes de la sociedad de consumo en España: de la Dictadura de Primo de Rivera a la II República, Política y Sociedad*», 16, págs. 149-168.

senta el inicio de un amplio movimiento intelectual de regeneración del país que contará entre sus filas con personalidades como Antonio Machado o Miguel de Unamuno; la generación de 1927 será la otra generación protagonista del cambio, aunque mucho mejor preparada que la anterior para afrontar los cambios de tipo técnico y profesional que el país necesita.

Los años veinte representan una coyuntura favorable para estos cambios debido al estatuto de neutralidad del que disfruta el país durante la guerra europea. La producción industrial y la economía crecen de forma considerable; la población aumenta en dos millones de personas (a partir de los 21,3 millones de 1920), y en 1930, el 42% de la población vive ya en núcleos urbanos superiores a los diez mil habitantes, mientras Madrid se acerca al millón de habitantes y Barcelona los supera[38]. El inicio de las reformas sociales en materias como vivienda, seguros, condiciones de trabajo, regulación de conflictos, etcétera, permiten contemplar el futuro con moderado optimismo.

En este contexto aparece la estadística matemática española, en medio de una profunda renovación general de las matemáticas[39] impulsada por Rey Pastor. Dicho proceso contará con la aparición de asociaciones y revistas matemáticas, la creación del Laboratorio Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios, y el establecimiento de amplios contactos internacionales[40].

Los antecedentes hay que buscarlos en la Sociedad Matemática Española. Creada en 1911, contó con una interesante revista, en cuyo primer número aparecieron artículos de Esteban Terradas y Rey Pastor. La publicación, a pesar de que llegó a contar con 423 suscriptores y una economía saneada desapareció seis años

[38] Nuevas pautas demográficas caracterizadas por el descenso de la natalidad y la mortalidad caracterizan a la población. Estamos ante una transformación del tejido social que algunos historiadores han considerado equivalente a la de los años sesenta.

[39] Sobre la situación de las matemáticas véase HORMIGÓN, M. (1998): *Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX,* en SÁNCHEZ RON, J. M., *Ciencia y sociedad en España,* Ediciones El Arquero, CSIC.

[40] A propósito del programa de renovación de las matemáticas puesto en macha por Rey Pastor, Sixto Ríos dice lo siguiente: «bastaron 25 años de labor ejemplar para que el anatema que pareció existir sobre la capacidad del *homo hispanicus* para hacer matemáticas quedase desvirtuado. Puede afirmarse objetivamente que por los años treinta en España existe ya una cultura matemática contemporánea, con aportaciones originales de nivel europeo, pues Rey Pastor y sus discípulos directos o indirectos, publican trabajos importantes en las principales revistas internacionales: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, *Acta Matematica*, *Ergebnisse eines Mathematischen kolloquiums* de Viena, *Abhandlungen* de Hambourg, *Rendiconti* de Palermo, *Mathemastische Zeitschrift,* etcétera. Nombre de théorèmes et de théories issus de ces travaux passent dans les livres des universités européennes, comme dans les travaux de Doetch, S. Mandelbrojt, A. Denjoy, W. Hurewizc, Wilder, W. Blaschke, Menger, etcétera. PASTOR REY (1988): *Selecta*, Fundación Banco Exterior.

más tarde con motivo del primer viaje de Rey Pastor a la Argentina.[41] A su regreso en 1918, Rey Pastor retoma el proyecto, y en 1919 lanza un nuevo proyecto editorial: la *Revista de Matemática Hispano-Americana,* que, a pesar de notables colaboraciones argentinas, será fundamentalmente española, dando lugar a la publicación de artículos por parte de la generación más joven. Junto a las firmas de algunos matemáticos ya veteranos como Terradas o Álvarez Ude, aparecen en las páginas de la revista los más jóvenes Fernández Baños, Santaló, Orts, Aracil o extranjeros como Hadamar, Hilbert, Klein, Levi-Civita, etcétera. La revista consigue cierto reconocimiento internacional, y con la llegada de la II República ve la luz una segunda publicación: *Matemática Elemental,* revista destinada a los círculos matemáticos de estudiantes de Argentina y España.

El pionero de la estadística matemática es sin ninguna duda Esteban Terradas. Catalán cosmopolita, de formación físico e ingeniero, es el principal introductor de la física nuclear en España (la física atomística, se decía entonces). Hombre de biografía extraordinaria, codirector con Rey Pastor del Laboratorio Matemático de la Junta para la Ampliación de Estudios, profesor de la Escuela Superior Aerotécnica, director general de la Compañía Telefónica, director de los trabajos de soterramiento del ferrocarril de Barcelona, profesor de la Facultad de Ciencias, miembro de la Asamblea Nacional... sólo son algunas de las actividades desarrolladas por esta personalidad sorprendente. El alcance de su figura aparece también recogido por historiadores de la matemática como Mariano Hormigón: «primera figura importante de la estadística matemática española, uno de los más importantes científicos españoles de la primera mitad del siglo, etcétera»[42].

Nace en Barcelona en 1883 (es cinco años mayor que Rey Pastor), y hace sus primeros estudios cerca de Berlín, lo que le permite dominar la lengua alemana desde temprana edad. Regresa a Barcelona y estudia ingeniería industrial y ciencias físico-matemáticas. En 1904 obtiene en Madrid el título de Doctor en Ciencias Exactas y en Ciencias Físicas, la primera sobre *Movimientos de hilos según curvas* y la segunda sobre *Absorción de la luz por cuerpos cristalinos.* Ese mismo año, es profesor auxiliar en la Universidad Central de Madrid y al año siguiente Catedrático de Mecánica Racional en Zaragoza. En 1907 gana la Cátedra de Óptica y Acústica de la Universidad de Barcelona donde trabaja durante veinte años. Comparte su actividad académica y científica con la gestión de proyectos y empresas de ingeniería; crea un Seminario Físico-Matemático y un Instituto de Electri-

[41] El joven matemático riojano, alumno de Eduardo Torroja y Zoel García de Galdeano, comienza a fustigar a partir de 1915 (con tan sólo 27 años) las conciencias de sus colegas matemáticos, proponiendo un amplio programa de renovación de la matemática española que, a partir de 1918, comenzará a dar importantes resultados. Vid. HORMIGÓN, M.: *Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX,* Op. Cit.

[42] HORMIGÓN, M., Op. Cit., pág. 274.

cidad y Mecánica en la Universidad de Barcelona, y publica en la *Enciclopedia Espasa* artículos científicos (por ejemplo, la voz *probabilidad*) que son auténticos tratados.

A partir de 1926 comienza a dar cursos en las Escuelas de Ingenieros de Madrid, en 1927, en Argentina, Uruguay, Chile, Perú. Ese mismo año es nombrado miembro de la Asamblea Nacional por el gobierno de Primo de Rivera, lo que le obliga a pasar más períodos de tiempo en Madrid. En la capital da cursos y conferencias en la Academia de Ciencias, en la Sociedad Matemática Española, participa en las actividades de la Junta de Ampliación de Estudios, e invita a profesores extranjeros como Levi-Civita, Weyl y Einstein, quien da su famosa conferencia en la Residencia de Estudiantes de Madrid. Miembro de asociaciones científicas de Europa y América, contaba entre sus admiradores al propio Einstein, y H. Weyl le dedicó su obra *Mathematische Analyse des Raumproblems.*

Respecto a sus orientaciones ideológico-políticas, su dedicación a la acción social y la instrucción de jóvenes obreros en instituciones como el Patronato de la Sagrada Familia de Barcelona y el Patronato de San José de Madrid, indica una clara adscripción ideológica al catolicismo social. Su contribución a la enseñanza de la estadística matemática está bien documentada debido a que es el primer profesor que imparte cursos de estadística matemática en la Universidad Central y a que es, en cierto modo, el responsable de que se convoque la primera Cátedra de la Facultad de Ciencias que obtendrá por concurso Olegario Fernández Baños en 1934. En 1931-32 imparte un curso en la Universidad Central en el que utiliza referencias bibliográficas de Darmois y Rietz, así como los textos de Von Mises y Fry[43]. Ese mismo año es elegido vocal de la Unión Matemática Internacional, y en 1933 da otro curso en la Facultad de Derecho de Madrid sobre Teoría de Muestras.

Olegario Fernández Baños y el nacimiento de la econometría

La economía matemática es el otro dominio en el que va a desarrollarse la estadística matemática, y especialmente, los estudios sobre las fluctuaciones del cambio de la peseta realizados por la Comisión del Patrón Oro. Olegario Fernández Baños es la figura principal, no la única, pero sí la más emblemática.

Hijo de modestos labradores riojanos, nace en 1886 y estudia entre 1902 y 1906 en el Seminario de Logroño como era habitual entre agricultores que carecen de medios para enviar a sus hijos a estudiar. Obtiene excelentes calificaciones y termina los estudios de teología en la Universidad Pontificia de Burgos, pero la falta de vocación religiosa le conduce al abandono del proyecto eclesiástico. En 1908 regre-

[43] RÍOS, S. D. y ESTEBAN TERRADAS (1833-1950): en Trabajos de Estadística, CSIC, V.I, cuaderno II, 1950. pág. 315.

sa a Logroño donde cursa estudios de bachillerato en el Instituto General y Técnico y un año más tarde aprueba una oposición para el Cuerpo de Telégrafos que le obliga a trasladarse a Madrid, instalándose definitivamente en la capital. Termina el bachillerato en Madrid y comienza en 1910 la carrera de ciencias exactas en la Universidad Central.

En Madrid conoce a Rey Pastor, el discípulo de los matemáticos Zoel García de Galdeano, Ventura Reyes Prosper y Eduardo Torroja que va a renovar la matemática española del siglo XX. Comparten mesa y discusiones matemáticas en una pequeña pensión de la capital, y Rey Pastor termina por convertirse en su protector y principal mentor. Después de haber pasado dos años en Barcelona (donde conoce a Torroja) como estudiante y telegrafista, regresa a Madrid en 1914 para ser nombrado ayudante de clases prácticas de análisis matemático.

En 1915, comienza a enseñar álgebra y ampliación de matemáticas en la Escuela Industrial de Valladolid, y ese mismo año obtiene el título de Doctor en Ciencias Exactas con una tesis en la línea de la geometría fundamental de Hilbert, titulada *Construcción de espacios complejos contenidos E_n y sus representaciones reales.* Dos años más tarde marcha a Zurich, con una beca de la Junta Superior de Ampliación de Estudios. En 1917, trabaja en el Seminario Matemático del Instituto Politécnico de Zurich, el mismo instituto en el que trabaja Einstein. Allí se matricula en un curso de Geometría Proyectiva, otro de Teoría de Seguros, y uno más de Ecuaciones Diferenciales, pero también asiste a cuantos coloquios se celebran sobre física matemática y Teoría de la Relatividad. Ello le lleva a visitar a uno de los máximos exponentes de la matemática del momento como Weil, y a concertar una entrevista con Hilbert y un auxiliar de Kleim, en la que ambos le recomiendan estudiar física matemática (mecánica electrodinámica). Finalmente convence a Rey Pastor y a la Junta de la necesidad de ir a Bolonia para estudiar geometría no euclídea con el profesor Enríquez.

A su regreso, en enero de 1918 continúa con la enseñanza en Valladolid y comienza a preparar el concurso de la Cátedra de Geometría Analítica de la Universidad de Santiago de Compostela, que obtendrá en 1921. La residencia en Galicia no le impide participar en las actividades del Laboratorio Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios donde publica su tesis.

En 1920 realiza una nueva estancia en Bolonia y allí frecuenta tertulias científicas de matemáticos, juristas, sociólogos e historiadores de la matemática. Asiste a los congresos del Partido Popular y del Partido Socialista, comenzando a interesarse por los temas políticos y sociales. En 1923 es pensionado para estudiar economía matemática y economía financiera en París y Burdeos, y entre 1923-24 realiza un nuevo viaje por Italia con el objeto de estudiar estadística matemática y cálculo de probabilidades. Su memoria final justificativa de la estancia en Roma se titula *Notas para un primer estudio de la Teoría del Riesgo.*

A historiadores del pensamiento económico como Salvador Almenar les desconcierta el tránsito que realiza Fernández Baños de la matemática a la economía. No parece fácil imaginar que una persona de sus características estuviese dispuesta a tirar un brillante futuro profesional, simplemente porque el maestro Rey Pastor decide irse a vivir a Buenos Aires, o porque existan peleas con los matemáticos más antiguos de la universidad. Tal vez es más razonable pensar que, realmente, Fernández Baños no abandona nunca las matemáticas, sino que se hace estadístico en un período en el que emerge la estadística matemática con dos campos de aplicación básica: la física matemática y la econometría. Esteban Terradas, vicedirector del Laboratorio Matemático jugará un papel fundamental en el lado de la física, en tanto que Fernández Baños lo hará en el de la economía. Para comprender el interés por lo social de cualquiera de estos personajes, basta pensar en las convulsiones de la época: la I Guerra Mundial, el nacimiento del Estado soviético, la creación de los partidos comunistas, el auge del fascismo y de los frentes populares, etcétera. Un ejemplo del interés por la economía es la creación de centros de investigación económica cuantitativa, sobre todo el Centro de Estudios Económicos Valencianos de 1929, así como el Institut de Investigacions Economiques de Barcelona y el Servicio de Estudios del Banco de España creados en 1930.

Sus primeras producciones económicas datan de 1924-1925[44]: *Nociones fundamentales de economía matemática y algunas de sus aplicaciones* (según Almenar, síntesis de las ideas de Barone) y *Nota sobre la descomposición de las curvas representativas de los fenómenos económicos en sus componentes parciales simples;* la primera es una síntesis de la economía marginalista neoparetiana y la segunda, una aplicación del análisis armónico basado en las series de Fourier[45].

En los artículos de 1926 aborda la distribución de la renta, un tema ligado al interés de los estados europeos por la reorganización de la fiscalidad, de ahí la importancia que se concede a los debates teóricos sobre la distribución de los ingresos, o a la distribución de la renta (Pareto). En el primer artículo sobre el problema tributario, Fernández Baños defiende la progresividad en la imposición sobre la renta siguiendo los fundamentos teóricos de Enrico Barone. Utiliza la Ley de Distribución de Pareto, llegando a la conclusión de que sin crecimiento económico, las políticas redistributivas pueden agravar la pobreza y la desigualdad.

Entre octubre y diciembre de 1927, realiza otra estancia en Suiza e Italia y comienza a publicar trabajos sobre la peseta, los precios y la paridad económica, que le servirán para obtener el puesto de subdirector del Banco de España en 1930.

---

[44] En 1924 Antonio de Miguel publica *Introducción a la metodología estadística* y en ese mismo año se introduce la enseñanza de la estadística matemática en la Escuela de Ingenieros Industriales. José Antonio Artigas obtiene una plaza de profesor titular e imparte estadística fundamental y aplicada.

[45] ALMENAR, S.: Op. Cit., pág. 594.

En este año le suceden las ofertas de la administración, el Ministerio de Economía le requiere como jefe del servicio de Índices Económicos, y en 1931, el de Trabajo y Previsión le reclama para formar el personal del Cuerpo Nacional de Estadística dedicado a la elaboración de tablas de mortalidad.

A partir de 1927, se aproxima de forma «acelerada y sorprendente»[46] a la literatura anglosajona (Henry L. Moore, Irving Fisher, Henry Schultz, Griffith C. Evans, Roos, etcétera). Ese mismo año publica *Recientes progresos de la ciencia económica,* al parecer deudor del trabajo de Henry Schultz: *Mathematical Economics and the Quantitative Methods,* y del texto de Charles F. Roos: *A Dinamical Theory of Economics*[47].

La economía matemática dinámica y la estadística constituyen a partir de ahora los pilares básicos de la economía, además de señalar otras líneas de interés científico como la cinemática económica (Teoría Monetaria de Fisher), el análisis de las oscilaciones económicas (barómetros de Harvard), números índice, etcétera.

Si los estudios sobre las fluctuaciones del cambio de la peseta junto al dictamen de la Comisión del Patrón Oro constituyen el nacimiento de la econometría en España, los años 1930-31 marcan una auténtica divisoria, pues a partir de esa fecha, en sus textos se suceden las reflexiones y consideraciones metodológicas sobre temas teóricos como la correlación, el estudio de la distribución de los errores, ajustes con series temporales, noción de causalidad, etcétera[48]. En 1932 participa en el congreso que celebra la *Econometric Society,* en París con la ponencia titulada «Contribution aux Index Numbers», y aunque no está probada su condición de miembro fundador como él afirma, a partir de 1934 aparece junto a Antonio de Miguel y José Antonio Vandellos como miembro de la Sociedad Econométrica[49].

La enseñanza y algunos problemas metodológicos

La enseñanza del cálculo de probabilidades había ya comenzado en el interior de las academias militares (D. Diego Ollero) y en las Escuelas de Ingenieros (José Antonio de Artigas), pero es en la Facultad de Ciencias de Madrid donde va a comenzar la enseñanza de la estadística matemática. En 1931, Esteban Terradas comienza a impartir cursos, y es en 1934 cuando Olegario Fernández Baños obtiene por concurso la Cátedra de Estadística matemática de la Facultad de Ciencias de Madrid.

[46] Op. Cit. pág. 603

[47] Ibídem.

[48] ALMENAR (2002): pág. 608.

[49] Respecto a las relaciones de Fernández Baños con el mundo académico anglosajón, Juan Velarde apunta la posibilidad de que Fernández Baños enviase la estimación de la renta nacional de 1937 a A. BOWLEY. AHEPE (2002): pág. 302.

En la memoria preparada para el concurso, Fernández Baños utiliza en su favor las cartas que le dirigen dos grandes estadísticos del momento como Corrado Gini y Roland Fisher. Allí podemos comprobar la existencia de dos concepciones diferentes de la disciplina: la consideración de la estadística como ciencia, posición anglosajona, y la consideración de la estadística como conjunto de herramientas matemáticas para el uso de todas las ciencias, posición francesa e italiana.

Para Gini, la disciplina es sobre todo un conjunto de herramientas, aunque da por hecho que se trata de una disciplina ya consolidada: «A mi modo de ver, no existe una disciplina que se pueda llamar estadística matemática. Existe solamente una estadística metodológica, la cual, para tratar a fondo muchos de sus problemas, necesita el uso de las matemáticas[50]». Distingue entre los alumnos de las Facultades de Ciencias, léase Matemáticas, Física y Química, con los que puede utilizarse ampliamente el recurso a las matemáticas, aunque matiza: «sería muy peligroso tratar solamente los problemas matemáticos que presenta la estadística, separándolos de los problemas lógicos y de las nociones técnicas y prácticas que son indispensables al estadístico[51]». Para los alumnos de las carreras de humanidades y ciencias sociales recomienda un curso de introducción matemática a la estadística.

Ronald Fisher, en la línea de Bowley y el empirismo inglés, pondrá el acento en el método inductivo de la estadística, así como en su vocación de ciencia exacta: «la Estadística matemática tiene de común con otros estudios matemáticos que tiende a desarrollar un método de razonamiento desde luego exacto, conciso y general»[52]. El método deductivo propio de las matemáticas puede ser utilizado, «porque nuestro pensamiento va de la multitud al individuo, pero siempre de modo subalterno».

Propone familiarizar a los estudiantes con esta distinción fundamental por medio de tests de significación, como la t de Student, la $\chi 2$ y la z; es, en general, un programa que Fernández Baños va a seguir en sus cursos y que podemos ver en su *Tratado de Estadística* publicado después de la guerra. Fisher comienza por la descripción de los fenómenos colectivos como principal objeto de la estadística, para pasar inmediatamente al cálculo de probabilidades[53]; no hay todavía un apartado

---

50 FERNÁNDEZ BAÑOS, O. (1941): pág. 21.

51 *Ibídem*.

52 Op. Cit., pág. 22.

53
I. Propiedades o conocimientos matemáticos de colectivos o universos.
II. Afirmaciones de probabilidad deducibles de estos conocimientos.
III. Distribuciones simultáneas de grupos de observaciones independientes.
IV. Estadísticas o funciones de las observaciones, adecuadas para estimar los parámetros colectivos.
V. Problemas de la distribución exacta de las estadísticas calculadas sobre ejemplos finitos.
VI. Empleo de distribuciones exactas en el cálculo de los criterios o pruebas de significación.
VII. Criterios de consistencia, eficacia y suficiencia, por los cuales puede juzgarse el valor de las estimaciones estadísticas.
VIII. Ideas de precisión, exactitud intrínseca y cantidad de información aplicadas a la estimación estadística.
IX. Probabilidad matemática y sus propiedades, incluyendo una crítica de la probabilidad inversa.

que explique de forma independiente la teoría, o la técnica del muestreo, como en el manual que publica Fernández Baños en 1944, pero hay epígrafes como «estadísticas(...) adecuadas para estimar los parámetros colectivos; consistencia(....) de las estimaciones estadísticas; precisión, exactitud y cantidad de información aplicadas a la estimación estadística».

En general Fisher, como Gini, considera que no es necesario dedicar mucho tiempo a la estadística en los programas de ciencias físico-químicas, con la excepción de la mecánica estadística, y termina con una recomendación sorprendente: «para el estudiante de matemáticas, reviste especial importancia que el campo de sus ejemplos comprenda material biológico y sociológico, desde el momento en que el razonamiento inductivo es el que más se emplea en las ciencias biológicas y sociales»[54].

La cuestión de considerar la estadística como ciencia o simplemente una técnica auxiliar del resto de las ciencias es un largo debate. Durante la segunda mitad del siglo XIX la estadística era sinónimo de ciencia social, pero a media que se convierte en una disciplina matemática imprescindible para ciencias como la biología o la física, comienza a reivindicar un estatuto de ciencia independiente. La polémica continuará hasta nuestros días, aunque hoy pueda parecernos un debate estéril, pero no hay que olvidar que estamos en un momento constitutivo de la disciplina, y que el liderazgo en la construcción de una nueva ciencia implica grandes cuotas de poder académico y político.

Es la concepción anglosajona la que impulsa esa concepción de la estadística como ciencia —podemos comprobarlo en la carta de Fisher, pero también es la posición de Bowley—, al contrario de la posición francesa[55] —también podríamos decir continental, pues es la posición de Corrado Gini—, más inclinada a considerar la estadística matemática como una simple herramienta de las otras ciencias. La posición de Fernández Baños está más cerca de la concepción de Fisher a quien dedicará su *Tratado de estadística.*

En España, el primer manual de estadística matemática lo escribe en 1924 Antonio de Miguel. Licenciado en Ciencias Exactas por la Universidad de Madrid, y estadístico facultativo que jugará junto a Fernández Baños un papel determinante en el establecimiento de la econometría española. Velarde Fuertes, Catedrático de Economía le dedica grandes elogios, a pesar de los comentarios que le dedica Flores de Lemus. Además de sus trabajos sobre la renta española, Velarde le atribuye los

---

[54] *Ibídem*.

[55] Henri Berr, en la presentación de la VII Semana Internacional de Synthèse, celebrada en 1935 aunque editada en 1944 bajo la ocupación, comienza con estas palabras: «La statistique n'est pas une science: c'est une méthode, un méthode applicable aux objets les plus divers» («La estadística no es una ciencia: es un método, un método aplicable a los objetos más diversos.»).

cálculos que están en la base de la reconversión de la peseta republicana en peseta de Franco, además de la participación en los trabajos de construcción de las series de la renta nacional posterior a la Guerra Civil[56].

Hasta el manual de De Miguel existían tratados de estadística que abordaban la disciplina en la línea de la estadística administrativa y, en todo caso, planteaban la forma en la que el Estado debe organizar la información estadística. También existían tratados sobre cálculo de probabilidades donde se aborda su relación con la astronomía, los problemas de tiro en artillería, o la construcción de tablas de mortalidad. Merino Melchor, director del Observatorio Astronómico de Madrid y secretario de la Academia de Ciencias, había publicado en 1866 *Reflexiones y conjeturas sobre la Ley de Mortalidad en España,* y en 1868 hace su discurso de entrada en la academia *Sobre la aplicación del cálculo de probabilidades a los sucesos humanos.* Entre los manuales que tuvieron mayor repercusión estaba el *Tratado de cálculo de probabilidades* de Ollero, publicado en 1879, o el del Catedrático de la Escuela Superior de Magisterio y Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas, Gabriel Galán Ruiz (1869-1938): *Cálculo de las probabilidades* (1923) que obtuvo en 1909 el Premio de Academia de Ciencias.

Estos manuales utilizaban autores clásicos, sobre todo de lengua francesa y alemana, por el contrario, el manual de Antonio de Miguel tiene ya todas las características de un manual de estadística matemática de estilo anglosajón y utiliza como referencia los textos de A. L. Bowley y G. U. Yule. Probablemente por esto, el libro no agradó en exceso a Flores de Lemus (1876-1941), el economista más importante del momento. En la introducción, Flores utiliza el término un tanto despectivo de «obrita» para referirse al libro, y aunque hace algunas críticas pertinentes como afirmar que está demasiado atenuada la conexión de los métodos estadísticos con los principios fundamentales de la Teoría de la Probabilidad, no por ello deja de parecernos injusta su valoración general del libro, dado que está en la línea de los principales manuales de estadística matemática,[57] y el reconocimiento oficial del método de las muestras no se produce hasta el coloquio de Roma de 1925.

---

[56] VELARDE FUERTE, J. (2001): «Aportaciones de los estadísticos españoles al análisis de la economía del siglo XX». AHEPE, *Historia de la Probabilidad y de la Estadística,* I Jornadas de Historia de la Estadística, Madrid pág. 300.

[57] A nosotros, el tratado de Antonio de Miguel nos parece una excelente introducción a la estadística matemática del momento, dirigido a profesionales de la economía o de las ciencias sociales que no tienen una formación matemática. El texto está organizado del siguiente modo. Comienza con los criterios de clasificación en estadística, sigue con un capítulo dedicado a las frecuencias donde concede una gran importancia a las variables de tipo nominal, y ya el segundo capítulo lo dedica a la asociación. En el Capítulo III aborda la probabilidad para variables nominales siguiendo los planteamientos de Karl Pearson, pasa después a las series temporales y las medias, para continuar con los números índices, la variabilidad y las medidas de dispersión, la interpolación y la correlación. Hay una última parte en la que vuelven a abordarse los mismos temas para datos ponderados.

En realidad, más que una presentación del libro, las palabras de Flores de Lemus parecen un crítica malhumorada. Tal vez, las disputas entre economistas que no tienen formación matemática (Flores era jurista de origen) y la irrupción de matemáticos en el ámbito de la economía como De Miguel, pueda aclarar esta extraña presentación del libro. Flores, después de echar de menos en el texto referencias a las investigaciones germano-rusas y referirse a las inglesas como «alguna vaga referencia» concluye que estamos todavía muy lejos, muy lejos de poseer una sistematización aproximadamente satisfactoria de esta magnífica creación del espíritu humano. Cita el éxito del manual de Yule, al que también reprocha que las fórmulas sobre el error aparezcan al final, y concede gran importancia al hecho de poder apreciar si las diferencias entre cifras son o no significativas. Hace también un crítica del texto de Davenport *Statistical Methods* (1904), a quien atribuye haber sido el primero en utilizar el «artificio de suministrar fórmulas para cada serie de problemas, indicando las condiciones de aplicación», con lo que los manuales de estadística se convierten en una «colección de instrumentos para el uso de específicos, cuya naturaleza y valor quedan en el misterio»; algo con lo que también estarían de acuerdo los actuales estudiantes de estadística. Y aunque elogia los resultados de Pearson, Schuster y Fourier, concluye que todavía «está muy lejos la posibilidad de establecer, en términos asequibles al lector no matemático, las condiciones de aplicación de nuestros métodos y las instrucciones para su uso»[58].

La confusión de paradigmas

En 1933, Fernández Baños publica en la revista *Economía Española* un artículo que nos sirve para comprobar el alcance de las críticas realizadas por Halbwachs y Flores de Lemus. El artículo se titulaba «Aplicación del análisis estadístico a un problema económico»,[59] y en él, Fernández Baños trataba de mostrar el alcance del método estadístico. El motivo aparente del trabajo era el análisis del cambio y de la paridad económica de la peseta respecto al franco francés, pero en realidad se trataba de mostrar el funcionamiento de las nuevas técnicas de estadística matemática.

Tres tablas constituyen la base empírica del estudio: una con índices de los precios al por mayor de Barcelona (que toma como representativos de España), otra, con los índices de precios al por mayor de Francia, y una tercera con el precio del franco en pesetas. En cada tabla aparecen los índices relativos a los doce meses del año desde 1913 hasta 1933, y a partir de las tres primeras tablas, elabora una cuarta con las diferencias entre el cambio y la paridad expresadas en %. Cálculo que, aunque no es explícito en el artículo, se realiza dividiendo el índice español por el

[58] De Miguel, A. (1925): pág. V.

[59] Fernández Baños, O. (1933).

francés, referidos ambos a la misma base, y multiplicando el cociente por la constante dada por el cambio medio de ambas monedas en 1913 (año base)[60].

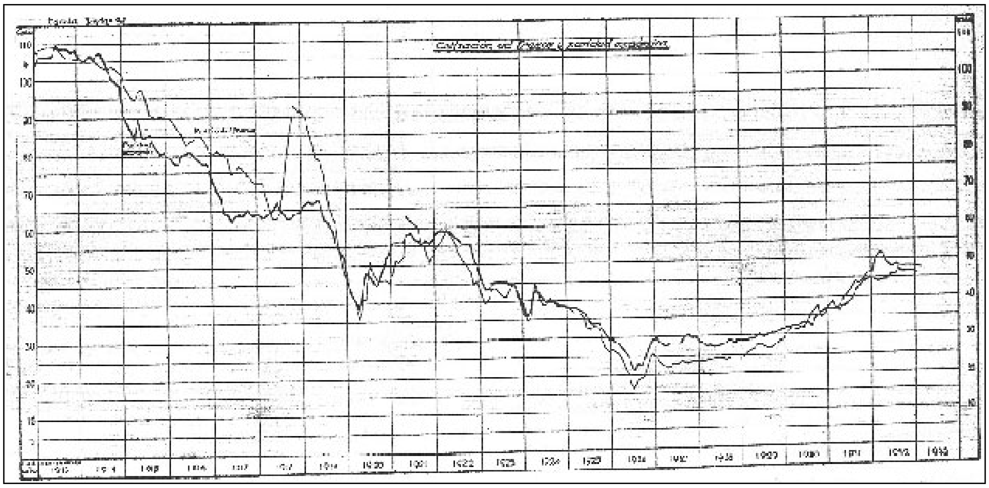
Una vez presentada la base de datos, Fernández Baños calcula los estadísticos fundamentales: media, mediana, desviación estándar, para hacer una primera observación: no se trata de una distribución al azar, dado que no coinciden la media y la mediana. Los valores teóricos, así como los parámetros K_1, K_2 de Pearson que indican el grado de apuntamiento de la curva empírica muestran que la distribución empírica se halla cerca de la curva normal. A partir de aquí surgen toda una serie de observaciones que hoy nos parecen algo sorprendentes, pero que constituyen el *habitus* de la estadística matemática de la época. El momento es crucial, pues estamos en el tránsito de la estadística matemática basada en los modelos lineales y la correlación, a otro en el que se impone como núcleo de la disciplina, la Teoría de las Muestras y la Teoría de la Decisión.

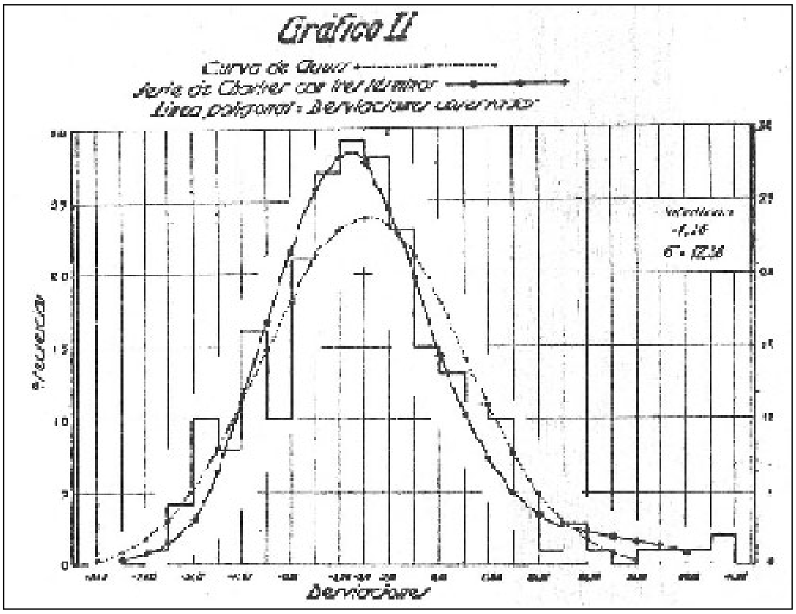
Veamos, por tanto, cómo se produce dicho tránsito en el discurso de nuestro protagonista. Ya la primera operación: «con sólo prescindir de cinco observaciones esporádicas, de las que ya hablaremos, y que son las cinco mayores desviaciones positivas, (...) aparece claro que la curva normal de Gauss está muy indicada», nos remite a las crítica dirigidas por Halbwachs a Gibrat.[61] Pero la curva normal no se utiliza aquí como hace Bowley en el texto de 1906 para comprobar si la elección de muestras proporciona datos fiables en relación al conjunto del que han sido extraídas, sino que todavía se está a la búsqueda de leyes que hagan posible prever tendencias futuras. Fernández Baños lo dice explícitamente en la nota número tres, y lo subraya en las conclusiones.

El procedimiento, en todo caso, resulta barroco: los parámetros de la curva teórica sirven para concluir que «no se trata de una ley pura de probabilidad», para pasar luego a buscar las causas de dicho comportamiento en acontecimientos de naturaleza política y social que perfectamente pueden vislumbrarse en las representaciones gráficas anteriores a la utilización de la curva de Gauss. Los gráficos de las páginas 6 y 7 del artículo reflejan el cambio de paradigma que se está produciendo. El de la página 6, que podemos ver a continuación, está construido con la lógica del modelo lineal, en tanto que en el de la página 7 (a continuación), anuncia la Teoría Muestral, aunque el utillaje estadístico se aplique a un conjunto de datos del que no se desea extraer ninguna muestra.

[60] FERNÁNDEZ BAÑOS, O. (1930): *Técnica del cálculo de la paridad económica de la peseta,* Servicio de Estudios del Banco de España, Industrial Gráfica, Madrid, pág. 4.

[61] «Nuestra ley es esencialmente estadística. Conduce simplemente las curvas de distribución económica a una curva célebre, llamada también de Gauss, o de errores.» Cfr. nota.





Así, dos lógicas se mezclan dando lugar a un discurso bastante confuso:

La razón fundamental para rechazar una ley de probabilidad pura, *es decir, una ley que corresponda a una urna de composición tal que al hacer una extracción de ella haya una cierta probabilidad de obtener una desviación dada, es que las desviaciones que nos da la experiencia vienen a veces dadas a verdade-*

> *ras rachas, es decir, en bloques o racimos (...). Estamos ante un fenómeno de* herencia *propiamente dicho, con todas las dificultades que esto entraña.*[62]

La herencia no es otra cosa aquí que las alteraciones de precios debidas a fenómenos como la guerra, la estabilización de la moneda realizada por un país, u otro tipo de factores de carácter político-social. El propio Fernández Baños tiene serias dudas sobre el significado real de los ajustes:

> *¿qué significan las dos constantes de los términos de corrección considerados? Es evidente que aumentando suficientemente tales términos (de la serie de Charlier) se logra cualquier aproximación deseada. Pero, aparte el error inherente a ellos, ¿no es evidente que mientras ignoremos su significado nada concreto y eficaz habremos conseguido, fuera de un formalismo sin contenido real?*[63]

Lo que nos conduce de nuevo hacia los problemas de conexión entre modelos matemáticos y realidad planteados por Halbwachs. Estamos, no obstante, en una época de euforia metodológica que va fijando las propiedades del método estadístico, y en cuyo lugar central está la ya famosa curva de Gauss: «Todo esto indica, a nuestro juicio, que hemos conseguido una primera aproximación muy aceptable respecto al fenómeno que estudiamos; aproximación que tiene su expresión en una Ley de Frecuencia normal»[64].

La perplejidad de comprobar que son los fenómenos político sociales los que producen mayores alteraciones en la curva de los precios empuja a Fernández Baños hacia la correlación, pues no debemos olvidar que su objetivo último es, como probablemente para la mayoría de estadísticos de la época, descubrir leyes que den cuenta de los fenómenos, y sobre todo, que permitan hacer previsiones futuras:

> *Sin embargo, no hay que hacerse ilusiones a base de tal valor dado por el criterio de la x2, porque ni estamos frente a un problema con probabilidad* a priori*, ni ante un colectivo respecto al cual sean tan numerosas las experiencias hechas que dispongamos ya de una probabilidad empírica. La experiencia más importante conocida es quizá la que nosotros presentamos aquí, y su alcance es verdaderamente muy grande, a nuestro juicio, pero no lo suficiente para quedar tranquilos de que estamos en posesión de una Ley Empírica*[65].

Para la explicación de las leyes se recurre de nuevo a la correlación múltiple: «El medio de adentrarse en la explicación de esta clase de fenómenos consiste en intro-

---

[62] FERNÁNDEZ BAÑOS, O. (1933): pág. 12.

[63] Op. Cit., pág. 13.

[64] *Ibídem*.

[65] Op. Cit., pág. 12.

ducir nuevas variables, y en lograr para cada una el cuánto de la explicación que acerca del fenómeno nos suministre». Prácticas que se han prologado hasta la actualidad, aún cuando su eficacia se haya mostrado en ocasiones dudosa.

Otra práctica que indica una insuficiente comprensión del método de las muestras es el hecho de que se calcule el coeficiente de correlación lineal empleando tan sólo veinte datos anuales. El procedimiento consiste en utilizar una parábola de tercer orden como línea teórica y calcular el correspondiente coeficiente de correlación, con lo cual consigue elevar el coeficiente de correlación de 0,95 a 0,96 (sic) aunque, añade, «para la total explicación del fenómeno nos falta la susodicha introducción de nuevas variables».

La conclusión no puede ser más pretenciosa y abstracta:

> *Que para España hemos obtenido una magnífica explicación de las variaciones del cambio por medio de las de los precios (y recíprocamente), a condición de emplear bien la técnica estadística: lo elevado de la correlación en unión de la curva de frecuencias hallada autoriza para hablar de una uniformidad constitutiva de una primera aproximación de una Ley Empírica en España*.[66]

Halbwachs no estaba descaminado al denunciar el exceso de rigor un tanto artificial y arbitrario que comenzaba a extenderse en el ámbito de las ciencias sociales. Así como el gusto por las abstracciones que a menudo indican muy poco de lo real.

Conclusiones

La estadística matemática se configura como ciencia estadística durante la década de los años veinte. Es durante esta década cuando aparecen los manuales de estadística matemática de estilo anglosajón. La estadística matemática estará marcada por los desarrollos de Pearson que van a dar lugar a la generalización del modelo lineal y de la correlación, pero también a los trabajos de Edgeworth que, junto a los de Bowley, serán la base de la Teoría de Muestras. Durante los años veinte se produce un cambio de paradigma, la estadística matemática que tiene sus comienzos en el descubrimiento de leyes empíricas, y sobre todo en el análisis de los problemas de coyuntura económica, comenzará a centrar su atención en la medida de cuestiones concretas como el paro o la opinión pública, haciendo posible la irrupción de la Teoría Muestral.

La estadística matemática se desarrolla por parte de matemáticos que comienzan a interesarse por la economía y las cuestiones sociales. En el ámbito de la sociología hay que acercarse a los Estados Unidos para contar con figuras importantes

[66] Op. Cit., pág. 16.

como F. Ogburn y Samuel A. Stouffer que van a aplicar el método de las muestras a los estudios de opinión pública. En Gran Bretaña, los estudios sobre las condiciones de vida de la clase obrera y los problemas del paro permiten a A. Bowley y J. Hilton desarrollar el método de las muestras.

En España, la estadística matemática se desarrolla en medio de un amplio movimiento de renovación de las matemáticas dirigido por Rey Pastor. Las vías fundamentales de ese desarrollo son la física matemática que tiene en Esteban Terradas su máximo exponente, y la econometría que cuenta con Fernández Baños como figura principal. El primer manual español de estadística matemática aparece en 1924 y su autor es Antonio de Miguel; un tratado influenciado por los manuales de Bowley y Yule, que supone un ruptura con los anteriores dedicados al cálculo de probabilidades.

La enseñanza de la estadística matemática comienza en las Escuelas de Ingenieros (Terradas, Artigas) y en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, donde se crea en 1934 la primera cátedra universitaria. La aplicación de los nuevos métodos matemáticos suscita algunos problemas que son puestos de manifiesto por Bowley, Sismiand y Halbwachs y, en cierto modo, por las dificultades de Fernández Baños.

La generalización del Modelo Lineal y la búsqueda de leyes empíricas retrasaron el reconocimiento del método de las muestras, mientras que las rivalidades profesionales en el proceso de construcción de la disciplina han contribuido a la generalización de prácticas oscuras y a una cierta dificultad en su enseñanza.

BIBLIOGRAFÍA

Ahepe (2002): *Historia de la probabilidad y de la estadística.* I Jornadas de Historia de la Estadística organizadas por la Asociación de Historia de la Estadística y de la Probabilidad de España, Madrid.

Almenar, S. (2002): *Olegario Fernández Baños: de la geometría a la econometría,* en Fuentes Quintana, E. *Economía y economistas españoles,* Vol. 6; *La modernización de los estudios de economía,* Fundación de las Cajas de Ahorros Confederadas, Círculo de Lectores, Madrid.

Armatte, M. (1992): *Conjonctions, conjocture et conjecture. Les barometres économiques (1885-1930),* Histoire et Mesure.

Armatte, M. (2002): *El coeficiente de correlación y los economistas (1910-1940),* en Arribas, J. M. y Barbut, M. *Estadística y sociedad,* UNED.

Arribas, J. M. (1994): «Antecedentes de la sociedad de consumo en España: de la Dictadura de Primo de Rivera a la II República», *Política y Sociedad*, 16.

ARRIBAS, J. M. y BARBUT, M. (2002): *Estadística y sociedad.* UNED.

ARRIBAS, J. M. y VALLEJOS, A. (2002): *Los orígenes de la estadística social en España: los trabajos de la Comisión y del Instituto de Reformas Sociales, en AHEP, Historia de la Probabilidad y de la Estadística.* Madrid.

BLUM, A. y MESPOULET, M. (2003): *L'anarchie bureaucratique. Statistique et pouvoir sous Staline.* La Découverte, París.

BOWLEY, A. L. (1906): «Presidential Address to the Economic Section of the British Association for the Advanced Sciences». *Journal of the Royal Statistical Society.*

___________, (1936): «The Application of Sampling to Economic and Sociological Problems», *Journal of the American Statistical Association,* September, vol. 31, n.º 195. Traduction à l'espagnol: EMPIRIA, n.º 5, 2002.

FERNÁNDEZ BAÑOS, O. (1933): *Aplicación del análisis estadístico a un problema económico.* Economía Española, oct.-nov.-dic., n.º 10, 11, 12.

________________, (1934): *Sobre la correlación, medida de enlace directo o indirecto en los fenómenos economicos.* Comunicacion al IV Congreso de la Econometric Society, Stresa. Septiembre, Banco de España.

________________, (1941): *Programa, concepto, método y fuentes de estadística matemática,* Talleres Gráficos Marsiega, Madrid.

HALBWACHS, M. (1944): *La Statistique. Ses applications. Les problèmes qu'elles soulèvent.* Septième Semaine Internationale de Synthèse, 1935.

HORMIGÓN, M. (1998): *Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX,* en SÁNCHEZ RON J. M., *Ciencia y sociedad en España,* Ediciones El arquero, CSIC.

ISI (1983): *El congreso de Madrid en 1931.* INE, Madrid.

MACKENZIE, D. A, (1981): *Statistics in Britain 1865-1930,* Edimburgh University Press.

MARTÍNEZ LÓPEZ, V. (1995): *Olegario Fernández Baños,* Gráficas Ochoa, S.A.

MIGUEL, A. DE (1924): *Metodología estadística. Fundamentos de estadística matemática,* Madrid.

REVUE D'HISTOIRE DES SCIENCES HUMAINES (1999): n.º 1. *Maurice Halbwachs et les sciences humaines de son temps.* Septentrion, Presses Universitaires.

REY PASTOR (1988): *Selecta,* Fundación Banco Exterior.

SHAPIN, S. (1998): *La Révolution Scientifique,* Flammarion.

CAPÍTULO 22

Fisher y los económetras estadounidenses

DAVID TEIRA SERRANO
CEES - Universidad Carlos III
ÁLVARO FERNÁNDEZ BUENDÍA
Universidad San Pablo CEU

¿Es posible datar el nacimiento de la estadística matemática estadounidense? Stephen Stigler propuso una vez construir un intervalo de confianza en torno a 1933, el año en el que la vieja econometría, representada por Horace Secrist, cae ante los argumentos de Harold Hotelling (STIGLER, 1996). Armado con el análisis de la varianza, Hotelling supo diagnosticar las *falacias* cometidas por Secrist con sus regresiones, tal como enseñaba su ya colega y amigo Ronald Fisher en sus *Métodos estadísticos para investigadores.* El objeto de este ensayo es explorar uno de los extremos de este intervalo, remontándonos a una controversia anterior que enfrentó en 1928 a Hotelling y Holbrook Working con Henry Schultz, el discípulo más aventajado de Henry Ludwell Moore[1]. Pretendemos ilustrar, por una parte, la significación epistemológica que percibió originalmente Hotelling en las tesis de Fisher y, por otra, la incapacidad de un económetra orientado por Pearson (SCHULTZ) para aprehenderla.

Harold Hotelling y la estadística estadounidense en 1933

Había ido a Chicago en 1933 interesado por la economía matemática y la estadística. Henry Schultz estuvo fuera el primer año que pasé allí. Volvió al siguiente y

[1] Sobre Moore, cf. FERNÁNDEZ & TEIRA (2003); sobre Schultz, FERNÁNDEZ & TEIRA (2001).

muy pronto descubrí que no tenía nada que hacer con él (*he was hopeless*) en lo que al aprendizaje de la estadística se refiere. No habían pasado más que unas semanas desde su vuelta y ya estaba yo buscando dónde ir a estudiar estadística el curso siguiente. De este modo conocí a Milton Friedman. Homer Jones me sugirió que fuese a hablar con él. Había estudiado en Chicago el curso 1932-33 y en Columbia el de 1933-34 —mi primer año en Chicago—, para volver después a Chicago en el de 1934-35. Así que le consulté. Convino en que Chicago no era lugar para estudiar estadística: había que ir a Columbia. En aquel momento Hotelling era prácticamente la única persona en los Estados Unidos que enseñaba estadística tal como hoy la entendemos (W. A. WALLIS *apud* OLKIN, 1991, pág. 123)[2].

Con independencia de lo poco que pudiese ofrecer Henry Schultz a un estudiante ansioso de cálculos como Allen Wallis, conviene considerar *en contexto* su testimonio —comparándolo, por ejemplo, con el de Paul Samuelson[3]— para poder apreciar el nivel de un económetra tan cuidadoso como Schultz respecto al del Departamento de Economía en su conjunto y al de la propia Universidad de Chicago: a diferencia de Columbia, el programa de un Curso de Sociología Estadística impartido en Chicago en 1932 consistía en «métodos de recolección, tabulación y análisis de datos sociológicos, cuestionarios, distribución de frecuencias, gráficos, interpolación, interpretación de estadísticas, la naturaleza de la evidencia estadística, introducción al muestreo, a las falacias estadísticas y a las medidas de variabilidad»[4].

La comparación es aún más favorable a Schultz si consideramos el conjunto de la estadística estadounidense en 1930. Pese a que por entonces cumplía ya casi un siglo de existencia la American Statistical Association —fundada en 1839; su *Journal* cumplía también 38 años (HUNTER, 1996, pág. 13n.)— los intereses científicos de sus miembros se concentraban mayoritariamente en la recopilación y tabulación de datos (HUNTER, 1996, pág. 12). Ésta había sido la opinión predominante en la déca-

---

[2] Correlativamente, valga el testimonio de Friedman: «The year at Columbia widened my horizons still further. Harold Hotelling did for mathematical statistics what Jacob Viner had done for economic theory: revealed it to be an integrated logical whole, not a set of cook-book recipes. He also introduced me to rigorous mathematical economics». Extraído de la autobiografía redactada para la Fundación Nobel: disponible en *http://www.nobel.se/economics/laureates/1976/friedman-autobio.html.*

[3] Cf. SAMUELSON, 1991, pág. 334. Samuelson inició sus estudios de economía en Chicago en 1932, el mismo año que Friedman, y se trasladaría a Harvard tres años después. Su profesor de estadística en Chicago fue Aaron Director. Baste ahora decir, con Samuelson, que su competencia estadística era escasa y sus clases se basaban en MITCHELL 1927. En suma, según su propio testimonio, Samuelson se convirtió en Chicago en un autodidacta en estadística —situación que no mejoraría después en Harvard.

[4] *Announcements of the University the Chicago,* vol. 32/12 (1932), pág. 416 citado en BUCK & ROSENKRANTZ, 1984, pág. 379.

da de 1920, tal como se desprende de la discusión en torno al informe del Committee on Educational, Scientific and Professional Standards constituido por la ASA en 1924 (*íbid*.), pese a que ya aparecían voces —como las de Harry Carver— en favor de una mayor matematización de la disciplina. No era para menos: pese a los esfuerzos de Pearson y su escuela, los cursos de estadística impartidos por Departamentos de Economía, Pedagogía o Administración de empresas superaban ampliamente a los ofertados por los de matemáticas, y aún entre éstos sólo once de los cincuenta y siete cursos exigían conocimientos de análisis (*íbid*.; cf. también HUNTER, 1999).

Ahora bien, Wallis estaba comparando a Schultz con un estadístico de muy distinta orientación que la mayoritaria entonces en los Estados Unidos. Recordemos nuevamente la tesis de Stigler, «La estadística matemática comienza allí su andadura disciplinar en 1933» (STIGLER, 1996), cuando los Annals of Mathematical Statistics se independizan de la American Statistical Association. Dos años después, se funda el Institute of Mathematical Statistics que asume como propia la publicación de los Annals. Ronald Fisher, Jerzy Neyman, Egon Pearson, Georges Darmois y Harald Cramer se contarían entre los miembros de su consejo editorial en los años siguientes. En apenas una década, la inferencia estadística germina intelectualmente en los Estados Unidos. Su consolidación institucional, como veremos después, tardaría aún otra. Todo ello sería inexplicable sin la contribución de Harold Hotelling desde su Cátedra de Columbia.

Formado inicialmente en el periodismo, Eric Bell le anima a dedicarse a las matemáticas, disciplina en la que obtiene su Master of Science en 1921 (Washington) y el doctorado en 1924 (Stanford). Ya en esa época Hotelling se interesaba, al parecer, por la economía matemática —se dice que al no encontrar a nadie que le enseñase, decide doctorarse en topología (DARNELL, 1988, pág. 58). Lo cierto es que nada más doctorarse comienza a trabajar en el Food Research Institute de la Universidad de Stanford entre economistas agrícolas. No resulta extraño que en tales circunstancias Hotelling descubriese la obra estadística de Ronald Fisher, originada precisamente en su trabajo sobre experimentación agrícola en la Rothamsted Agricultural Experimental Station[5]. En el curso 1925-26 Hotelling comienza a enseñar estadística en Stanford (SMITH, 1978, pág. 1.174) y posteriormente, entre junio y diciembre de 1929, Hotelling viajará a Rothamsted para trabajar con Fisher (*íbid*) cuando éste todavía era prácticamente desconocido en su propio país (PEARSON, 1974). Desde entonces se convertirá en el principal expositor en los Estados Unidos de su obra magna, *Statistical Methods for Research Workers* (cuya

[5] Iremos enumerando puntualmente las referencias sobre Fisher de las que nos servimos en este capítulo. Una introducción general es todavía FISHER BOX, 1978.

primera edición data de 1925[6]) y durante algunos años, además, prácticamente el único (STIGLER, 1999)[7]:

> El reconocimiento de sus novedosas ideas fue lento en Inglaterra, y más aún en los Estados Unidos. Quizás el director de una publicación científica no deba aceptar el envío de reseñas, pero fue así como llegaron las de las primeras ediciones de *Statistical Methods for Research Workers* y *The Design of Experiments at Journal of the American Statistical Association.* Exceptuando éstas, no encuentro cita alguna de *Statistical Methods for Research Workers* en ningún libro o revista estadounidense en los cinco años que siguieron a su publicación, y solamente algunas alusiones a Fisher (HOTELLING, 1951, pág. 45).

Hotelling, en cambio, emprendió su divulgación con enorme ímpetu (*e.g.,* HOTELLING, 1930 y 1931 o sus reseñas de las distintas ediciones). Además, en esos mismos años desarrolla trabajos originales de tanta importancia como el dedicado al estadístico T^2, y otros estudios de estadística económica (ARROW, 1987). En 1931 Hotelling es contratado para suceder a Henry Ludwell Moore en su cátedra de Columbia, y al año siguiente inicia su colaboración con Schultz[8].

Como bien indicaba Wallis, en los Estados Unidos pocos cursos presentaban la estadística «tal como hoy la entendemos». También hay que decir que fueron los propios estudiantes de Hotelling (además de Friedman y Wallis, mencionemos sólo a S. Wilks, A. Wald y H. Mann, que se contaron entre sus ayudantes) los encargados de transformar la disciplina en lo que hoy tenemos por estadística, y consolidarla institucionalmente. Aún cuando la reconstrucción de este proceso tendrá que ser aún objeto de estudios detallados, un buen punto de partida para aproximarnos a la formación de esta generación de estadísticos de Columbia nos la ofrecen los *Métodos estadísticos para investigadores* de Fisher. Al menos, si aceptamos el cualificado testimonio de Leonard Jimmie Savage:

> *Mis mentores estadísticos, Milton Friedman y W. Allen Wallis, sostenían que quienes se interesaban seriamente por la estadística debían aprenderla con los*

---

[6] Utilizaremos en adelante una reimpresión de la de 1973 (XIII edición), que cotejamos con la edición más antigua que hemos podido consultar, la tercera de 1930. Hay traducción castellana de la décima edición a cargo de Julio Ruiz Magán y Juan J. Ruiz Rubio.

[7] HENRY LEWIS RIETZ (1875-1943): un matemático que enseñaba en Iowa desde 1918 advirtió pronto la importancia de los trabajos de Fisher y supo introducir en ellos a sus discípulos (Wilks, Fischer, Craig). George W. Snedecor, como director del Laboratorio de Estadística del Iowa State College, invitó a Fisher a impartir allí un curso en 1931, e incorporó sus técnicas a su propia enseñanza e investigación (YOUDEN, 1951, pág. 47). Cf. también DAVID, 1998. A través de H. A. Wallace, Snedecor contribuyó a difundirlas en el Ministerio de Agricultura estadounidense. Mordecai Ezekiel contribuiría de un modo igualmente decisivo, a través de sus *Methods of Correlation Analysis* (1930) que fue utilizado como manual por el *Bureau of Agricultural Economics, el U.S. Department of Agriculture Graduate School* (DUNCAN & SHELTON, 1992)

[8] Sobre Moore, cf. FERNÁNDEZ & TEIRA, 2003.

Métodos estadísticos para investigadores de Fisher[9]. *Compartían esta opinión con su muy admirado profesor Harold Hotelling. Ellos tres y algunos más —por supuesto, no todo el mundo— solían dar un mismo consejo: «Para convertirte en un estadístico, practica la estadística y medita sobre Fisher con paciencia, respeto y escepticismo».* (SAVAGE, 1976, págs. 441-42)

Baste pensar, por otra parte, en los manuales de estadística disponibles a principios de los años 1930 (DAVID, 1998), para comprobar que Fisher tampoco tenía alternativa: tal y como afirma el propio Radhakrishna Rao, «hasta la II Guerra Mundial, *Métodos estadísticos para investigadores* fue el único manual de metodología e inferencia estadística» (RAO, 1992, pág. 39). Nos interesa ahora detenernos en algunas ideas epistemológicas que Hotelling pudo aprender en ellos.

Fisher: verosimilitud e inducción

Comencemos, por tanto, recordando algunas de las contribuciones de Fisher, y tratemos de evidenciar, a continuación, su significación filosófica. El de Fisher será el primero de los tres enfoques metodológicos asociados a la estadística de los que nos ocuparemos en esta sección.

Como es sabido, en su clásico artículo de 1922, Fisher estableció dos de las distinciones fundacionales de la inferencia estadística (*población/muestra, parámetro/estadístico*) y enunció los tres problemas que constituían su objeto: especificación del parámetro u del que depende la distribución poblacional; «estimación» de este parámetro a partir de la distribución de la muestra; y estudio de la «distribución muestral» del estadístico empleado para la estimación. Desde un punto de vista técnico, algunos autores consideran la introducción de un «criterio de optimalidad» en la estimación del parámetro como el mayor logro de Fisher (EFRON 1998, pág. 96). Fisher introdujo, en efecto, criterios para la selección de estadísticos tales como los de «consistencia, eficiencia y suficiencia» —cf. GEISSER, 1991, págs. 2-3, aunque con variaciones respecto a su sentido actual: cf. RAO, 1992, págs. 39-ss—, en los que ahora no nos detendremos.

Además, Fisher propuso el Método de Máxima Verosimilitud para la Estimación de Estadísticos[10]: tomando la función de probabilidad o densidad de la muestra como función de u para unos valores dados de la muestra, obtendremos una *función de verosimilitud.* Se debe estimar entonces el parámetro —mediante el valor que maximiza tal función. En ciertas condiciones —no tan universales como Fisher

[9] El sabor de la cita original quizá se pierda en la traducción: «My statistical mentors, Milton Friedman and W. Allen Wallis, held that Fisher's *Statistical Methods for Research Workers* was *the serious man's introduction to statistics*».

[10] Para un examen de sus antecedentes, cf. EDWARDS, 1974.

creyó— los estimadores de máxima verosimilitud son *óptimos* según los tres criterios antes enunciados. Probó, además, en 1925 su convergencia asintótica con el parámetro en grandes muestras. Con independencia de sus propiedades matemáticas, conviene apreciar ahora el sentido epistemológico que estos estimadores tenían para Fisher.

En primer lugar, advirtamos que la máxima verosimilitud representaba para él una alternativa al enfoque bayesiano clásico (GEISSER, 1991, págs. 3-7): al parecer, Fisher pretendía construir una «lógica inductiva» tan incontestable en sus conclusiones como la deductiva, para lo cual las probabilidades *a priori* le parecían superfluas (EFRON, 1998, pág. 97) —técnicamente, esta falta de coherencia se ponía de manifiesto en que los estimadores bayesianos no resultaban invariantes por cambios de escala. Como diría años después:

> *Los que trabajamos en la ciencia aspiramos, en realidad, a métodos inferenciales que sean igualmente convincentes para todo espíritu que razone libremente* (all freely reasoning minds), *con plena independencia de cualquier proyecto que pudiera desarrollarse utilizando el conocimiento inferido.* (FISHER, 1973b, pág. 107)

Por otra parte, el poder de convicción de la inferencia estadística no era para Fisher estrictamente probabilístico: la verosimilitud expresaba, en realidad, «las frecuencias relativas con las que los valores de la hipotética cantidad u dan lugar, de hecho, a la muestra», pero con independencia de consideraciones asintóticas tales como las del «frecuentismo»[11]. Se trataba de razonar a partir de las muestras extraídas, aprovechando toda la «información» que en ellas se contiene. En este sentido, la verosimilitud era antes una medida del «grado de racionalidad» de una creencia que una probabilidad (SAVAGE, 1976, págs. 461 y siguientes): expresaba la transferencia de la frecuencia poblacional al caso individual extraído de la muestras (ZABELL, 1992, pág. 374). En palabras del propio Fisher:

> *Durante algún tiempo, se supuso erróneamente que la renuncia a la Teoría de la Probabilidad Inversa implicaba que nada podía inferirse a partir del conocimiento de una muestra sobre la población correspondiente. Esta opinión negaría por completo la validez* (validity) *de toda ciencia experimental. Ahora está ya claro que, en los casos en los que no se dispone de probabilidad fiducial*[12]*, el concepto de probabilidad matemática es inadecuado para expresar nuestra confianza o desconfianza subjetiva* (mental) *ante tales inferencias, y que la cantidad matemática que normalmente resulta apropiada para medir nuestro orden*

[11] «Probability is defined in terms of hypothetical frecuencies, not a limit of actual experimental frequencies, because we have no knowledge of the existence of such inifite experimental limits» (ZABELL, 1992, pág. 374).

[12] Sobre este concepto, cf. *infra* cap. 5.2.

> *de preferencias entre las diferentes poblaciones posibles no obedece, en realidad, las leyes de probabilidad. Para distinguirla de ésta, he usado el término «verosimilitud»* (likelihood) *para designarla.* (FISHER, 1973a pág. 11/pág. 11 de la versión española; traducción nuestra).

La posibilidad de interpretar la verosimilitud en un enfoque bayesiano se encontraba justamente en el centro de la controversia de Fisher con Pearson[13]. Si para Pearson la estadística daba cuenta de cómo se operaba la constitución de nexos causales entre los fenómenos por asociación entre observaciones (FERNÁNDEZ y TEIRA, 2003), Fisher abogaba más bien por una estadística como lógica inductiva que «justificase» nuestras creencias, con independencia del proceso cognitivo que las originaba.

Más allá de las dificultades epistemológicas de esta pretensión[14], nos interesa constatar aquí cómo Hotelling pronto supo comprender la singularidad de esta posición, y la expuso en el congreso de la American Statistical Association en 1930:

> *Recientemente se han hecho grandes progresos en temas de gran interés filosófico. Han sido abordados los mismísimos fundamentos de la lógica de la inferencia estadística, proponiéndose nuevas bases. Cada vez está más claro que, al intentar medir los grados de creencia racional* (rational belief), *debemos emplear otras varas de medida que las de la probabilidad matemática tradicional, e inconmensurables, además, con éstas. La idea de que la probabilidad de cualquier proposición incierta puede ordenarse linealmente con un número entre 0 y 1, a poco que tuviéramos la inteligencia necesaria para ello, es uno de esos grandes fantasmas que, como el Sacro Imperio Romano, han dominado durante siglos el espíritu humano, impidiendo la aparición de mejores sistemas. Hoy día empezamos a darnos cuenta de que la probabilidad matemática, tal como se define en los libros, solamente basta para lo que podría denominarse «inferencia probabilística deductiva», tal como la predicción de los límites entre los cuales se encontrará el número de bolas blancas extraídas de una urna cuya composición conozcamos. La inferencia inductiva, la estimación de una población con la ayuda de una muestra es otra cuestión.* (HOTELLING, 1931a, págs. 84-85)

De acuerdo con Hotelling, dos eran las nuevas medidas propuestas por Fisher para cuantificar la creencia racional: la ya mencionada «verosimilitud» y «el nivel de significación» (*ibid*.; cf. también HOTELLING, 1931b) y será esta última la que más nos interese por las consecuencias metodológicas que su aplicación al análisis de regresión tuvo para la economía.

---

[13] Un estudio de la obra de Fisher como vía media entre ambas alternativas se encuentra en EFRON, 1998.

[14] Una exposición introductoria de los enfoque estadísticos examinados en este capítulo puede verse en HACKING, 2001, págs. 151 y siguientes. Entre nosotros, la discusión de referencia es RIVADULLA, 1991.

Según Hotelling, la significación nos proporciona una medida de la «razonabilidad» (*reasonableness*) de nuestra decisión cuando debemos escoger entre dos hipótesis alternativas sobre el valor teórico de un parámetro a partir de la desviación respecto a éste observada en una muestra. La significación, nos advierte, no se basa en «vagas probabilidades *a priori*», como el enfoque bayesiano, pues «depende solamente de las observaciones» (HOTELLING, 1931a, pág. 86).

Hasta entonces, la significación se basaba en la idea gaussiana de que es posible estimar exactamente la desviación típica poblacional a partir de la desviación típica muestral. Pearson y Filon aplicaban este principio en el cálculo del error estándar del coeficiente de correlación, aproximándolo a partir de la fórmula $(1-r^2)/\sqrt{n}$. Pero, como demostraron William S. Gosset (*Student*) y Fisher, esta aproximación quedaba en suspenso si se trataba de muestras pequeñas —de aquí arrancó su controversia con Pearson—, para las cuales desarrollaron nuevas distribuciones (a partir de una estimación de máxima verosimilitud del coeficiente de correlación) y contrastes de significación (FISHER BOX, 1978, Cap. 5).

Como advertía el propio Fisher, los estadísticos experimentales —como él y Gosset— no trabajaban los datos del mismo modo que los biómetras: por un lado, estaba la diferencia de tamaño muestral y, además, el experimentador debía a menudo establecer correlaciones no sobre el conjunto total de los datos, sino entre estos datos «agrupados» (FISHER, 1973a, pág. 183). A estos efectos, Fisher se basó en la distinción entre «correlación interclases» (*interclass correlation*) y «correlación intraclase» (*intraclass correlation*) y presentó el análisis de la varianza como una técnica que simplificaba el contraste de significación del error estándar (o «desviación típica muestral») de esta última (FISHER, 1930a, Cap. VII, § 40; 1949, Cap. VII, § 40; 1973a, Cap. VII, § 40).

Supuesta una serie de datos de una misma clase dividida en n familias con sus correspondientes «media» y «desviación típica», la «correlación intraclase» mediría el grado de asociación observado en cada una de ellas. Fisher desarrolló un primer contraste de significación a partir de la transformación en z que lleva su nombre, pero las dificultades de este enfoque le inclinaron por un planteamiento alternativo basado en el cálculo abreviado de r desarrollado por J. A. Harris. La idea central era que la variabilidad indicada por la suma del cuadrado de las diferencias de cada uno de los datos de la clase y su media era un producto de «dos grupos de factores» (FISHER, 1930a, pág. 190; 1949, pág. 243; 1973a, pág. 223): por un lado, las diferencias entre «la media de cada familia» y la «media de la clase», y las diferencias entre los datos de cada familia y su media correspondiente, por otro. Estos dos componentes son mutuamente independientes (ortogonales). Cabe desarrollar, entonces, un contraste general de significación sobre la descomposición de la varianza, que popularizaría después Snedecor con su F en los Estados Unidos.

Fisher aplicó estos principios al contraste de la significación del ajuste de una regresión lineal. Aquí para un conjunto de valores de la variable independiente (X) se recogen distintas series de valores de la variable dependiente (Y), que constituirían las distintas «familias» de una «clase», cuya variabilidad podría analizarse según la descomposición en factores anteriormente apuntada con independencia del valor de X. En este caso, se trata de analizar la varianza entre familias, supuesto que ésta se descompone en una parte representada por la regresión y una parte constituida por las desviaciones respecto a ésta. Así, dependiendo de la magnitud de esta desviación —su significación— se puede apreciar en qué medida es posible un ajuste lineal de los datos.

Fisher, Hotelling y Schultz

Como vamos a ver después, este sería el punto de partida del Análisis Econométrico de Datos, tal y como lo concebirán algunos estudiantes de Hotelling —señaladamente Friedman (TEIRA, 2003). En 1928, un año antes de visitar Rothamsted, aplica la idea de significación fisheriana en el estudio que presenta con Holbrook Working[15] al congreso anual de la American Statistical Association: un estudio del error estándar de las regresiones empleadas para eliminar la tendencia de una serie temporal[16]. El caso analizado, como corresponde a dos estadísticos del Food Research Institute, era el de una serie correspondiente a la producción estadounidense de patatas en el período 1890-1925, a la cual aplicaban un enfoque característicamente fisheriano: se trataba de obtener una estimación del error estándar, siendo su «valor verdadero» desconocido, a partir de la información contenida en una muestra pequeña[17]. La novedad que Working y Hotelling introducían radicaba en el análisis de la correlación entre los datos, dividiéndolos en «grupos independientes». Nuestros dos autores ajustaron la tendencia a sus correspondientes medias, y desarrollaron una estimación del error estándar de sus dos parámetros por separado y después otra conjunta —el propio Fisher se referiría a estos resultados sus *Métodos estadísticos*[18].

---

[15] Cf. supra, cap. 3.1.3.

[16] No era, sin embargo, el primer trabajo estadístico de Hotelling, que venía publicando desde 1925: cf. su bibliografía en DARNELL, 1990, págs. 29-37.

[17] «The shortness of most time data series leads to two weaknesses in the traditional treatment of probable errors. The standard error of the result must be large; this is unavoidable with limited data. In addition, there is a difficulty resulting from the fact that the true standard error is really unknown, and can only be estimated from the data, the estimate being itself subject to error. Attempts have indeed been made to use a probable error of the probable error; but this quantity in turn will require a probable error […] All this structure of uncertainty is swept away by the methods developed by "Student" and R. A. Fisher.» (HOTELLING & WORKING, 1929, págs. 76-77).

[18] La cita aparece en nuestra edición —la decimocuarta (FISHER, 1973a, pág. 135)— y ya en la décima, de 1946 (FISHER, 1949, pág. 125); pero todavía no en la tercera, de 1930.

El comentarista de esta comunicación no fue otro que Henry Schultz, formado como estadístico con Karl Pearson en Londres, por inspiración de su propio maestro en Columbia —Henry Moore. Su réplica puede servirnos como medida de la novedad radical que representaba el enfoque desarrollado por Hotelling y Working respecto a la tradición econométrica de los años 1920. En realidad, a Schultz no le preocupaba tanto la comunicación de Hotelling y Working, que apenas comenta, cuanto las pretensiones de originalidad del propio Fisher, que éstos defendían. Centrándose así en el parágrafo 29 de sus *Métodos estadísticos*[19], afirma:

> *La contribución más importante de Fisher a la Teoría Estadística es su demostración de que la solución que daba Pearson en 1900 a la distribución del* x^2 *es, en realidad, equivalente a la distribución de la varianza* (s^2) *estimada a partir de muestras normales, y de que el artículo de Pearson contenía un grave error. Pero la práctica de computar errores estándar de una tendencia disminuyendo el número de «constantes» en su ecuación viene siendo el procedimiento mínimo-cuadrático ordinario desde los tiempos de Gauss, y no se le debe atribuir a Fisher.* (SCHULTZ, 1929)[20]

A Schultz le importaba dejar constancia de que la fórmula empleada por Fisher y retomada por nuestros dos autores para calcular el error estándar de una regresión se reducía enteramente a la obtenida por mínimos cuadrados[21]. Evidentemente, Schultz no percibía la diferencia entre ambos enfoques —principalmente, las distinciones población/muestra y estadístico/estimador—, confundido quizá por la coincidencia entre la estimación de «máxima verosimilitud» del error estándar desarrollada por Fisher y la tradicional[22].

Y lo cierto es que aún persistió en la confusión algún tiempo: un año después, en 1929, Schultz desarrollaba un tratamiento general «enteramente mínimo-cuadrá-

---

[19] «The steps illustrated in *paragraph 29 of his book* are essentially equal to the first (…)» (SCHULTZ, 1929, pág. 88; cursivas nuestras). Schultz no especifica qué libro pero el parágrafo 29 del libro de Fisher, en la tercera edición de 1930, se dedica precisamente a «Regression with several Independent Variates» (FISHER, 1930a, pág. 132), epígrafe que se refunde en sucesivas ediciones.

[20] No obstante, Schultz ya empleaba ideas de Fisher en su *Statistical Laws of Demand and Supply* (1928, pág. 151): «When the observations are as few as those on which these correlations are based, it is not advisable to give "probable errors", though recourse may be had to the powerful tools provided in R. A. Fisher´s *Statistical Methods for Research Workers* (London, 1925), for testing the significance of constants computed from small samples. Such conclusions as are attached in the following pages from the various correlations for supply are based more on the variety of methods and data used than on the significance of any coefficient of correlation (or other constant) with respect to its probable error.»

[21] «Fisher's procedure is the least square procedure, and was not intended to be taken as anything else» (SCHULTZ, 1929, pág. 88).

[22] Cf. FISHER, 1922, comentado en ARMATTE, 1995, págs. 560-562.

tico» del error estándar de una predicción en una comunicación ante la American Mathematical Society y la American Association for the Advancement of Science que publicaría en el *Journal of the American Statistical Association* al año siguiente (SCHULTZ, 1930b). Dos años después aplicaría este procedimiento al análisis de la elasticidad de la demanda (SCHULTZ, 1933a).

Como explica Hotelling en su obituario[23], Schultz no fue de los primeros en apercibirse de la importancia de los resultados de Fisher, aunque luego no dudase en incorporarlos a su obra magna de 1938 sobre la demanda, incluyendo, además, los desarrollos subsiguientes de Neyman y Egon Pearson[24]. En este sentido, enviar a Milton Friedman a Columbia a estudiar con Hotelling en el curso 1933-34, apenas un año después de iniciar su relación con éste, y contratarle un año después como ayudante es un buen indicio del espíritu de superación intelectual que animó toda la carrera de Schultz[25].

Esta pequeña «escaramuza» nos servirá, por tanto, para ilustrar un aspecto más en la constitución de la estadística matemática estadounidense: cómo también en este proceso desempeñaron un papel las disputas epistemológicas. Frente a quienes como Schultz —siguiendo a Pearson— pretendían establecer esquemas causales sobre el coeficiente de correlación, Hotelling —con Fisher— les recordaba que no podían aspirar a más que a justificar sus creencias inductivas. En menos de diez años la disputa era ya otra: sí existían reglas para el «comportamiento inductivo», tal como pretendía Neyman. Pero éste es ya otro episodio.

BIBLIOGRAFÍA

ARMATTE, M. (1995): *Histoire du modèle linéaire. Formas et usages en statistique et économétrie jusqu'en 1945,* Tesis doctoral, EHESS.

ARROW, K. J. (1987): «Hotelling, Harold», en EATWELL, J., MILGATE, M. y NEWMAN, P. (eds), *The New Palgrave: A Dictionary of Economics,* Macmillan, Londres, i. v.

[23] «At first, Schultz used perforce the inefficient statistical methods then current, deriving demand functions from link relatives and percentage deviations from trend without adequate tests of significance in terms of probability. But as the light of modern developments of theory and technique began to spread he was quick to utilize it» (HOTELLING, 1939, pág. 99).

[24] Cf. especialmente SCHULTZ, 1938a, págs. 211-ss y págs. 732 y siguientes.

[25] «Professor Schultz treated me as an equal and was concerned only with getting it right, not with who erred. Ate the time, I regarded the number of errors I found, and on occasion the difficulty he had in understanding the argument, as evidence of limited intellectual capacity —and indeed, sheer analytical ability was not his forte. Only later did I come to appreciate that his disinterested pursuit of truth and his persistence in digging deep in a narrow field enabled him to contribute far more to economic understanding than many an abler but less disciplined and less tolerant scholar» (FRIEDMAN & FRIEDMAN, 1998, pág. 52).

BARTLETT, M. S. (1965): «R. A. Fisher and the Last Fifty Years of Statistical Methodology», *Journal of the American Statistical Association,* v. 60/310, págs. 395-409.

DARNELL, A. (1988): «Harold Hotelling 1895-1973», *Statistical Science,* v. 3/1, págs. 57-62.

_________, (1990), «The Life and Economic Thought of Harold Hotelling», en HOTELLING, H., *The Collected Economic Articles of Harold Hotelling,* Springer-Verlag, N. York, págs. 1-28.

DAVID (1998): «Statistics in U.S. Universities in 1933 and the Establishment of the Statistical Laboratory at Iowa State», *Statistical Science,* v. 13/1, págs. 66-74.

DAVID, H. A., y EDWARDS, A. W. F. (2001): «The Origins of Confidence Limits. Comments on Fisher (1930)», en DAVID, H. A. y EDWARDS, A. W. F., *Annotated Readings in the History of Statistics,* Springer, N. York, págs. 187-93.

DE GROOT, M. (1987): «A Conversation with C. R. Rao», *Statistical Science,* v. 2/1, págs. 53-67.

DUNCAN, J., y SHELTON, W. (1992): «U. S. Government Contributions to Probability Sampling and Statistical Analysis», *Statistical Science,* v. 7/3, págs. 320-38.

EDWARDS, A. W. F. (1974): «The History of Likelihood», *International Statistical Review,* v. 42/1, págs. 9-15.

EFRON (1998): «R. A. Fisher in the 21st Century», *Statistical Science,* v. 13/2, págs. 95-122.

EPSTEIN, R. (1987): «*A History of Econometrics*», Elsevier, Amsterdam.

FERNÁNDEZ, A. y TEIRA, D. (2001): «¿Qué demuestran las curvas estadísticas de demanda?», en MARTÍN PLIEGO, F. J., SANTOS DEL CERRO, J. y GARCÍA SECADES, M. (eds), *Actas de las Primeras Jornadas de Historia del cálculo de probabilidades y la estadística*, págs. 271-86.

___________________________, «Henry Ludwell Moore y la introducción del positivismo estadístico en econometría»; Aceptado para su publicación en un volumen editado por Wenceslao González *et al.* para la Sociedad Iberoamericana de Metodología Económica (FCE, 2003).

FISHER, R. A. (1922): «On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* v. 222A, págs. 309-68.

__________, (1930a), «*Statistical Methods for Research Workers*», Oliver and Boyd, Londres-Edimburgo, 3.ª edición.

__________, (1930b), «Inverse Probability», *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* v. 26, págs. 528-35.

__________, (1934), «Discussion of on the Two Different Aspects of the Representative Method of Stratified Sampling and the Method of Purposive Selection, by J. Neyman», *Journal of the Royal Statistical Society,* v. 97, págs. 614-19.

__________, (1946), «*Statistical Methods for Research Workers*», Oliver and Boyd, Londres-Edimburgo, 10.ª edición. Versión castellana de J. Ruiz Magán y J. J. Ruiz Rubio: *Métodos estadísticos para investigadores,* Aguilar, Madrid, 1949.

__________, (1971), «*The Design of Experiments*», Hafner Publishing Company, N. York, 8.ª edición.

__________, (1973a), «*Statistical Methods for Research Workers*», Hafner Publishing Company, N. York, 14.ª edición.

__________, (1973b), «*Statistical Methods and Scientific Inference*», Hafner Press, N. York, 3.ª edición.

GEISSER, S. (1922): «Introduction to Fisher (1922). On the Mathematical Foundations of Theoretical Statistics», en KOTZ, S. y JOHNSON, N. L. (eds) (1991): *Breakthroughs in Statistics. Vol. 1: Foundations and Basic Theory,* Springer Verlag, New York, págs. 1-10.

HACKING, I. (2001): *An Introduction to Probability and Inductive Logic,* Cambridge University Press, Cambridge.

HANDS, D. W. y MIROWSKI, P., «Harold Hotelling and the Neoclassical Dream», en BACKHOUSE, R., HAUSMAN, D., MÄKI, U. y SALANTI, A. (eds) (1998): *Economics and Methodology: Crossing the Boundaries,* Macmillan, Londres, págs. 322-397.

__________________________, «A Paradox of Budgets: The Postwar Stabilization of American Neoclassical Demand Theory», en MORGAN, M. y RUTHEFORD, M. (eds) (1999): *The Transformation of American Economics,* Duke University Press, Durham, págs. 260-92.

HANSEN, M. H., DALENIUS, T. y TEPPING, B. J.: «The Development of Sample Surveys in Finite Populations», en ATKINSON, A. C. y FEINBERG, S. E. (eds) (1985): *A Celebration of Statistics,* Springer Verlag, N. York, págs. 326-54.

HOTELLING, H.: Reseña de R. A. FISHER (1927): *Statistical Methods for Research Workers, Journal of the American Statistical Association,* v. 22/159, págs. 411-12.

____________, (1930), «British Statistics and Statisticians Today», *Journal of the American Statistical Association,* v. 25, págs. 186-90.

____________, (1931a), «Recent Improvements in Statistical Inference», *Journal of the American Statistical Association,* v. 26, págs. 137-75

____________, «Frequency Distributions», en SELIGMAN, B. (ed) (1931b): I*nternational Encyclopedia of the Social Sciences,* McMillan, N. York, i. v.

____________, (1932), «Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions», *Journal of Political Economy,* v. 40, págs. 577-616.

____________, (1933), Reseña de H. Secrist, «The Triumph of Mediocrity in Business», *Journal of the American Statistical Association,* v. 28, págs. 463-65.

____________, (1934), «Letter to the Editor», *Journal of the American Statistical Association,* v. 29, págs. 198-99.

____________, (1935), «Demand Functions with Limited Budgets», *Econométrica*, v. 3, págs. 66-78.

___________, (1938), Reseña de H. Schultz, «The Theory and Measurement of Demand», *Journal of the American Statistical Association,* v. 33, págs. 744-47.

___________, (1939), «The Work of Henry Schultz», *Econométrica*, v. 7/2, págs. 97-103.

___________, (1940), «The Teaching of Statistics», *Annals of Mathematical Statistics,* v. 11, págs. 457-71.

___________, (1951), «The Impact of R. A. Fisher on Statistics», *Journal of the American Statistical Association,* v. 46, págs. 35-46.

Hotelling, H., Bartky, W., Deming, W. E., Friedman, M. y Hoel, P. (1948): «The Teaching of Statistics [a Report of the Institute of Mathematical Statistics Committee on the Teaching of Statistics]», *Annals of Mathematical Statistics,* v. 19, págs. 95-115.

Hotelling , H., y Working, H. (1929): «Applications of the Theory of Error to the Interpretation of Trends», *Journal of the American Statistical Association,* v. 24, págs. 73-85.

Hunter, P. W. (1996): «Drawing the Boundaries: Mathematical Statistics in 20th Century America», *Historia Mathematica,* v. 23, págs. 7-30.

__________, (1999), «An Unofficial Community: American Mathematical Statisticians before 1935», *Annals of Science,* v. 56, págs. 47-68.

Morgan, M. (1990): *The History of Econometric Ideas*, Cambridge University Press, Cambridge.

Olkin, I. (1991): «A Conversation with W. Allen Wallis», *Statistical Science,* v. 6/2, págs. 121-40.

Pearson, E. S. (1974): «Memories of the Impact of Fisher's Work in the 1920s», *International Statistical Review,* v. 42/1, págs. 5-8.

Rao (1992): «R. A. Fisher: The Founder of Modern Statistics», *Statistical Science,* v. 7/1, págs. 34-48.

Samuelson, P. (1991): «Statistical Flowers Caught in Amber», *Statistical Science,* v. 6/4, págs. 330-38.

Savage, L. J. (1976): «On Rereading R. A. Fisher», *The Annals of Statistics,* v. 4/3, págs. 441-500.

Schultz, H. (1929): «Discussion», *Journal of the American Statistical Association,* v. 24, págs. 86-89.

Smith, J. (1978): «Harold Hotelling. 1895-1973», *The Annals of Statistics,* v. 6/6, págs. 1.173-83.

Stigler, S. (1996): «The History of Statistics in 1933», *Statistical Science,* v. 11/3, págs. 244-52.

________, (1999), «The Foundations of Statistics at Stanford», *American Statistician,* v. 53, págs. 263-266.

Teira, D. (2003): *Azar, estadística y economía en la obra de Milton Friedman*, Tesis doctoral, UNED.

YOUDEN, W. J. (1951): «The Fisherian Revolution in Methods of Experimentation», *Journal of the American Statistical Association,* v. 46, págs. 47-50.

ZABELL, S. L. (1994): «A Conversation with William Kruskal», *Statistical Science,* v. 9/2, págs. 285-303.

__________, (1992), «R. A. Fisher and the Fiducial Argument», *Journal of the American Statistical Association,* v. 7/3, págs. 369-87.

CAPÍTULO 23

Parámetro de Hurst: un parámetro que hace historia en la investigación española

CONSUELO GARCÍA TEJEDOR
Universidad Autónoma de Barcelona

La aparición del Parámetro de Hurst en 1951 ha marcado una señal en la historia de la estadística: «El azar con *memoria larga*». Las repercusiones y consecuencias del estudio de la memoria larga en la estadística afectan, en la actualidad, a muy diversos campos de investigación y en ámbitos muy diferentes: ámbitos naturales (hidrología, meteorología, geofísica...), ámbitos médicos (la red vascular, el árbol bronquial, la red de neuronas, la mucosa intestinal, la disposición de las glándulas...), ámbitos financieros (mercado de activos financieros, índices bursátiles...), ámbito de la comunicación (tráfico telemático, filtros digitales...). Es difícil encontrar un campo de interés actual que no incorpore un estudio estadístico, mediante el Parámetro de Hurst, de cómo la interacción entre acontecimientos producen efectos en los acontecimientos en el futuro lejano.

Hurst abogó por los modelos de variabilidad a todas las escalas de tiempo, por tanto con estructuras fractales, y lanzó un reto a todos los profesionales de procesos: «la *metodología* para una estimación ajustada e insesgada del parámetro capaz de *analizar la persistencia* de un comportamiento».

Mi interés con este trabajo radica en presentar una concisa exposición de cómo se ha recogido este reto a lo largo de sus 40 años de historia, por líneas de investigación de fuentes europeas y americanas, para posteriormente particularizar en investigaciones españolas. Desde el método *rango rescaled range R/S* iniciado por Hurst hasta las propuestas de aplicación de Wavelet para analizar la autosimilitud.

Hurst. La herencia de Hurst

Su biografía nos presenta a un británico gran observador de la realidad con una interesante capacidad de perseverancia y realismo en sus investigaciones. Estas aptitudes, pese a sus limitados recursos académicos, le permitieron realizar importantes estudios exploratorios de series temporales fundamentalmente hidrográficas que se prolongarían hasta bien pasados los 70 años de edad.

Sería el análisis de la serie temporal del caudal mínimo anual del Nilo (motivado por la observación de la insuficiencia de los almacenamientos en la baja presa de Asuán realizados para años secos) el que dirigiera sus investigaciones y principales publicaciones sobre la capacidad (1951) y métodos (1955) de almacenamiento a largo plazo en embalses.

Estudió esta serie para 847 años (desde el 622 hasta el 1469) con datos proporcionados por los registros guardados por los egipcios con el propósito de analizar de qué manera el rango del nivel del caudal fluctuaba alrededor del nivel medio:

Sea $x_1, x_2, ..., x_n$ son los caudales del río en n años sucesivos. Un buen estimador del caudal deseado en la presa es la media muestral de los datos de este período de tiempo $1/n\ X_n$ donde X_n es el caudal acumulado en los n años.

La fluctuación al nivel medio de la presa en el transcurso de k años del período en estudio es $(X_k - k/n\ X_n)$ donde X_k es el caudal acumulado hasta el año k.

El rango de estas fluctuaciones representa la capacidad del embalse para garantizar un caudal regular en la presa, tomando como muestra k observaciones entre 1 y n:

$$R_n = \underset{k \leq n}{\text{máx}}\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right) - \underset{k \leq n}{\text{mín}}\left(X_k - \frac{k}{n}X_n\right)$$

Para conseguir independencia de las unidades de medida, Hurst normalizó este rango con la empírica desviación típica de los n caudales anuales:

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}X_n\right)^2}$$

Si los caudales anuales fueran variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, este rango R_n/S_n se debería incrementar, para períodos de longitud suficientemente grande, de manera proporcional a la raíz cuadrada el tiempo de observación n (W. FELLER, 1951).

Hurst observó experimentalmente que parecía observarse que a períodos de inundaciones seguían períodos inundaciones, por lo que consideró una proporcionalidad n^H y dirigió el análisis *R/S* a la estimación del exponente H como la pendiente de la recta del logaritmo del rango en función del logaritmo de la amplitud del período en estudio.

$\frac{R_n}{S_n} \sim cn^H$ donde c es una constante indicativa del número total de datos N

De esta manera Hurst creó un exponente estadístico *dimensional* para analizar la interacción entre sucesos.

El análisis de este exponente H le llevó a concretar el Método no Paramétrico, Rango ajustado reescalado *R/S*, para detectar que las crecidas del río Nilo no eran independientes y que describió detalladamente en su última publicación (1965) *Almacenamiento a largo plazo: un estudio experimental* junto con Black R. P. y Simaika Y. M.

En el método *R/S*, modificado posteriormente por B. B. Mandelbrot, Hurst observó microestructuras (fractalizó) en las series temporales considerando, para cada período n de observación subperíodos (variando las condiciones iniciales) y calcular el rango ajustado para cada subperíodo.

$$R_n(t) = \max_{0 \le i \le n}\left(X_{t+i} - X_t - \frac{i}{n}(X_{t+n} - X_t) \right) - \min_{0 \le i \le n}\left(X_{t+i} - X_t - \frac{i}{n}(X_{t+n} - X_t) \right)$$

$$S^n(t) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=t+1}^{t}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=t+1}^{t+n} x_i \right)^2}$$

La razón $R/S = Q_n(t) = \frac{R_n(t)}{S_n(t)}$ es el *rango ajustado reescalado,* que en función del logaritmo de n sus logaritmos se distribuyen alrededor de una línea recta (recta de regresión) de pendiente H.

$$Log\,[Q_n\,(t)] = c + H \log\,(n) + \varepsilon_n$$

Este método iniciaría una nueva forma de investigación el «escalamiento o graduación de resolución» la cual ampliaría los fundamentos estocásticos con «la dimensión memoria» lo que proporcionaría a la estadística un nuevo camino para intentar responder a cuestiones del presente y plantear inquietantes interrogantes para el futuro.

Hurst estimó el exponente H para diferentes series temporales hidrográficas, geográficas y climatológicas observando que este parámetro casi nunca era 0.5 (que era el caso de independencia), concretamente para los datos del río Nilo resultó ser muy aproximado a 0.9. Analizó estos resultados, vía la estructura de estas series, para concluir que H se podría considerar, de forma experimental, como indicador de la persistencia (tendencia de acontecimientos futuros):

Cuando $0 < H < 0.5$ se contempla «antipersistencia» (un período con un comportamiento tiende a ser seguido de otro con comportamiento diferente). Las series cambian continuamente de dirección y no presentan ninguna tendencia.

Cuando $0.5 < H < 1$ se observa la existencia de *persistencia* (un período con un comportamiento, de crecimiento o decrecimiento, tiende a ser seguido de otro análogo). Las series mantienen tendencias, que suelen ser largas, que acaban de forma violenta. Mientras que para $H = 0.5$ hay independencia. Las series mantienen tendencias que cambian gradualmente de dirección.

Su técnica se tuvo en cuenta para la construcción de la alta presa de Asuán aunque no fue considerada por los estadísticos de los años cincuenta y sesenta; ya que, como afirmó Benoit B. Mandelbrot al redactar la biografía de Hurst, la medición por escalas era una noción esotérica en aquellos años y, más aún proviniendo de una persona con poca instrucción matemática y trabajando tan lejos de los principales centros científicos.

En la actualidad, el método R/S no es conocido suficientemente (Shiryaev) por los estadísticos, faltan desarrollos formales sobre la estimación y contrastes de hipótesis. Sin embargo, merece una gran atención a causa de ser robusto y permitir detectar fenómenos estadísticos como persistencia, larga memoria, autosimilitud, propiedad fractal, existencia de ciclos periódicos y no periódicos e incluso distinguir entre «estocástico» y «caótico». Fenómenos todos ellos que desde diferentes perspectivas, participan en el modelado de sistemas reales complejos.

Benoit B. Mandelbrot y colaboradores: siguiendo los pasos de Hurst (décadas de los sesenta hasta los ochenta)

Los resultados empíricos de Hurst fueron recogidos por Benoit B. Mandelbrot que para entonces (1958) estaba trabajando para la IBM en problemas de las irregularidades aleatorias en las señales de transmisión. Matemático de formación, polifacético en sus investigaciones (economía, ingeniería, medicina...) y principal creador de la geometría fractal, supo reconocer de inmediato la labor de Hurst e incorporar el rigor matemático en sus datos experimentales.

Se podría decir que ha sido el primero y el que mejor ha interpretado el exponente de Hurst, dándole un lugar importante en la historia de la estadística, ya que como investigador se han conjuntado su valía matemática, su potente inferencia estadística y su particular visión geométrica.

Prontamente recogió la idea de escalamiento para indagar en procesos con estructura probabilística invariante por traslación en el tiempo (*procesos estacionarios*) y estructuras con comportamiento similar por cambios de escala (*procesos autosimilares*).

Motivado fundamentalmente (años sesenta hasta años ochenta) por temas económicos y de sistemas de comunicación, realizó un extenso y valorado trabajo sobre los procesos estacionarios. Analizó la utilización del exponente H para cuantificar la memoria de series estacionarias.

Empíricamente, la idea experimental de Hurst para persistencia responde en procesos estacionarios al concepto de memoria de un proceso caracterizado por el exponente H:

Procesos sin memoria ($H < 0.5$), procesos con memoria del pasado reciente, también conocidos como procesos de corta memoria ($H = 0.5$) y procesos con memoria del pasado lejano, también conocidos como procesos de larga memoria ($H > 0.5$).

El análisis de estas series de estructura persistente candidatas a permitir cierto grado de predicción por conservar en un futuro no inmediato información del pasado (larga memoria) conducirían los trabajos de Mandelbrot y enfocarían la historia de la estadística en la modelización para responder a procesos reales observados en muy diferentes campos.

Una de las principales características de sus investigaciones hace referencia a la búsqueda de modelos estadísticos para reflejar similitud en distribución (la ley de X_{ct} es la misma que la de $c^H X_t$) a diferentes escalas. Para procesos de larga memoria fue para finales de los 60 cuando, junto con sus colaboradores, determinó al Ruido Browniano Fraccional (que se obtiene como los incrementos de un proceso gaussiano autosimilar con incrementos estacionarios) como modelo estadístico con larga memoria (MANDELBROT y WALLIS 1968, MANDELBROT y VAN NESS 1968).

En sus investigaciones sobre la metodología, Mandelbrot realizó un importante estudio comparativo de los diferentes métodos utilizados hasta entonces (Método del Valor Absoluto, Método de la Varianza, Método del Periodograma, estimador de Whittle) para procesos de larga memoria. Junto con Taqqu y Wallis demuestra la superioridad del R/S frente a los métodos convencionales para determinar dependencia *long-range*. En 1969 Mandelbrot y Wallis muestran por simulación de Monte Carlo que el estadístico R/S puede detectar larga memoria en series temporales no gaussianas con alta asimetría y kurtosis. En 1972 Mandelbrot argumenta que, el análisis espectral detecta sólo ciclos periódicos y el análisis *R/S* puede detectar ciclos no periódicos.

Entre 1972 y 1975 establece la convergencia casi segura del estadístico *R/S* para procesos estocásticos con varianza infinita, lo que le confiere ventaja sobre los métodos de autocorrelación y varianza.

Su fascinación por la geometría y su entusiasmo por el escalamiento conducen sus posteriores (desde los ochenta hasta la actualidad) investigaciones hacia estructuras geométricas con comportamiento similar por cambios de escala (nacimiento de la geometría fractal aleatoria). La aportación a la estadística de esta línea de investigación se traduce a la expansión de la propiedad de autosimilitud de procesos, introducida en estadística por Kolmogorov en 1941, y en la introducción de técnicas no lineales que darán al exponente de Hurst un papel importante a la hora de estudiar la dimensión fractal (2-*H*).

Desde la década de los ochenta a la actualidad. Deficiencias del método *R/S*

En los últimos veinte años se ha observado gran inquietud por los temas de memoria larga de un proceso motivada fundamentalmente por la *complejidad* (entendida ésta como la sensibilidad del sistema a las condiciones iniciales) existente en los sistemas en estudio, ya sean físicos, económicos, biológicos o de comunicaciones. La memoria ya no sólo va a ser considerada como un componente, representativo de las relaciones entre los resultados, del sistema sino factor determinante en la dinámica del sistema para el estudio de la relación sistema y resultados de la serie temporal (perspectiva no lineal en estadística). Esta concepción ha sido muy fructífera tanto en resultados teóricos como de aplicaciones prácticas.

Desde esta perspectiva, el exponente de Hurst adquiere la significación de cuantificador de la complejidad y el análisis *R/S* sigue siendo un método usado para su estimación. Como ejemplos de aplicaciones prácticas de esta metodología se pueden consultar los siguientes trabajos:

- El estudio sobre modelo del tráfico telemático realizado por E. Casilari, A. Reyes Lecuona, A. Díaz Estrella y F. Sandoval.
- El artículo sobre redes de transmisión «Simulation of Self-Similarity in Network Utilization Patterns as a Precursor to Automated Testing of Intrusion Detection Systems» realizado por David A. Nash y Daniel J. Ragsdale.
- La tesis de Miguel Ángel García González referente al estudio de la variabilidad del ritmo cardíaco mediante técnicas estadísticas, espectrales y no lineales.

- La aplicación de wavelets al análisis de secuencias de DNA, realizada por J. B. Marín Diazaraque y B. Vidakovic.
- El estudio realizado sobre «Long-range Correlations and Universality in Plasma Edge Turbulences» publicado por la IAEA Fusion Energy Conference en Yokohama en 1998.
- La investigación realizada por Bejamín A. Carreras, David E. Newman, Ian Dobson y A. Bruce Poole sobre «Evidence for Self-Organized Criticality in a Time Series of Electric Power System Blackouts», publicado por IEEE Transactions Cas-I en mayo del 2002.

Desde la estadística, con un estudio interdisciplinal fundamentalmente con contribución económica, se buscan modelos de larga memoria: por ejemplo, el Modelo (años ochenta por Granger y Hosking) de Procesos Autorregresivos y de Medias Móviles fraccionalmente integrados ARFIMA (*p, d, q*) con *d* entre 0 y 1/2. Se refinan estimadores conocidos: como ejemplos, Edgar E. Peters (1994) determina una metodología para la construcción de la variable aleatoria *R/S*; Lo (1991) introduce el rango *R/S* modificado. Se buscan nuevos estimadores para *H*: J. M. Bardet (1998), considera la estimación del parámetro de autosimilitud para el Ruido Browniano Fraccional basada en variaciones cuadráticas generalizadas; J. B. Bassingthwaighte y G. M. Raymond (1994) presentan el Método Dispersivo o Dispersional y el Método del Análisis Reescalado con Algoritmos Rápidos (se requiere autosimiltud) para la estimación del exponente de Hurst. El primero da buenos resultados para exponentes de Hurst pequeños, mientras que el segundo los da para *H* elevados. Tienen la ventaja de realizar estimaciones lo suficientemente correctas con segmentos cortos de señal (ya que funcionan bien a partir de 256 muestras).

Sin embargo, el legado de Mandelbrot sobre las propiedades del Método *R/S* orienta muchas de las investigaciones actuales a la estimación del exponente de Hurst con esta metodología. Este hecho lo evidencian las numerosas publicaciones existentes actualmente en la web al respecto y motiva a los profesionales en procesos al estudio de sus deficiencias.

El Método *R/S* debe ser usado como simple herramienta de diagnóstico y es muy poco satisfactorio para la inferencia estadística (BERAN), además puede conducir a error en el caso que no se observe una fuerte tendencia en sus diferentes valores en período de longitud suficientemente grande. En este caso, el estadístico *R/S* podría indicar larga memoria en los datos, cuando en realidad la parte estacionaria de la serie es de corta memoria y esta propiedad desaparece asintóticamente.

En respuesta a este hecho A. W. Lo propone una modificación, «rango reescalado modificado» del estadístico *R/S* donde el factor de normalización, *S*, no es la varianza muestral sino un estimador de ella definido teniendo en cuenta las autocovarianzas muestrales de todos los posibles órdenes de subescalas. En un estudio de

Monte Carlo sobre el tamaño y potencia del contraste obtiene mejores resultados que los encontrados por el método *R/S* en modelos de corta memoria como IID, AR (1) y ARFIMA (0, *d*, 0). Sin embargo posteriores simulaciones de Cheung (1993) sugieren que este contraste es muy sensible a la existencia de correlación bajo la hipótesis nula. Una actualización de este rango reescalado modificado es el estadístico *V/S* (2003, véase referencia Liudas) en donde se modifica también el rango *R* y se emplaza la línea de actuación a modelos del tipo LARCH.

Para determinar si la línea de actuación, modificación del rango *R/S*, es correcta se requiere más labor investigadora que pertenece a la historia futura de la estadística. Lo que sí es seguro es que en la actualidad el análisis de la memoria no se puede realizar con sólo un estudio basado en registros grandes sino que requiere analizar los detalles en diferentes grados de resolución en las diferentes escalas.

En este sentido se sitúan los Métodos Espectrales Temporales. Estos métodos, Distribución Tiempo-Frecuencia, Métodos Espectrales Variantes con el Tiempo y Ondículas (Wavelets), forman parte de la Teoría de la Dinámica no Lineal de Sistemas.

Actualmente esta teoría ocupa a gran número de investigadores en el análisis de la complejidad y por tanto en la estimación de *H*. Termino con unas referencias a la utilización de wavelets para estimar el exponente *H* todas ellas situadas en la web:

- D. B. Percival y P. Guttorp (*Long-Memory Processes, the Allan and Wavelets,* 1993), para cuantificar la larga memoria del Ruido Browniano Fraccional utilizan la *variancia de Allan* (en una escala *n* se define como la mitad de la varianza de las diferencias de las medias de las diferentes subescalas de longitud *n* con la media retardada *n* en el tiempo) que puede ser estimada sin sesgo y con buena eficiencia:

$$\sigma_x^2(n) = \frac{1}{2}\{E[\bar{X}_n(t) - \bar{X}_{t-n}(t)]^2\} = L_2(n)\, n^{2H-2}$$

  donde $\bar{X}_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} x_{t-j}$ y $L_2(n)$ es una función de variación lenta en el infinito. Los coeficientes de detalle de la ondícula de Haar se expresan en términos de la varianza de Allan y utiliza un filtro para encontrar un estimador de la varianza que le permitirá después realizar una estimación de *H* con buenas propiedades estadísticas. Además generaliza este procedimiento en la utilización de otras ondículas.

- S. Goirdano, S. Miduri, M. Pagano, F. Russo y S. Tardarelli *(A Wavelet-Based Approach to the Estimation of the Hurst Parametre for Self-Similar Data)* realiza un estudio experimental de la utilización de las ondículas Daubechies para estimar *H* en procesos autosimilares.

El motor de esta reciente teoría es el de encontrar modelos representativos de la complejidad de la realidad para aplicarlos en los distintos campos de investigación. La gran variedad de fuentes de aplicación y la prontitud en la aparición de situaciones prácticas para su aplicación, la justifican y la desarrollan.

La actual actividad matemática de la Teoría Dinámica no Lineal y sus importantes repercusiones que tiene sobre sistemas físicos, biológicos y económicos, reclaman la disposición de los profesionales estocásticos por el análisis dinámico de las series temporales. El exponente de Hurst ha abierto el camino y con él la historia de la estadística ha comenzado la andadura:

> *Estamos en el comienzo de una nueva época de análisis de señales caracterizado por nuevos métodos: uso de la informática y tratar las señales con métodos de la Teoría Caótica-Determinista.*

La cita ha sido extraída del trabajo sobre *Dinámica no lineal en el análisis de electrocardiogramas* realizado por el Departamento de Biofísica de la Facultad de Medicina de la Universidad de Navarra (BERRAONDO LÓPEZ P., PÉREZ CAJARAVILLE J., ELIZALDE SOBA P., ORTUÑO SÁNCHEZ-PEDRERO F., TEIJERA ÁLVAREZ J. M., DÍAZ CALAVIA, E. J.) donde presentan un esquema de análisis de ECG con métodos de la caótica determinista.

BIBLIOGRAFÍA

BARDET JEAN-MARC (1998): «Un test d'auto-similarité pour les processus gaussiens à accroissements stationnaires». *Probability Theory, Série I*, págs. 521-526.

BASSINGTHWAIGHTE, J. B. y RAYMOND, G. M. (1994): «Evaluating R escaled Range Analysis for Time Series». *Annuals of Bimedical Engineering*, vol. 22, n.º 4, págs. 432-444.

BASSINGTHWAIGHTE, J. B. y RAYMOND, G. M. (1995): «Evaluation the Dispersional Analysis Method for Fractal Time Series». *Annuals of Bimedical Engineering*, vol. 23, n.º 4, págs. 491-505.

BERAN, J. (1994): «Statistics for Long-Memory Processes». Chapman & Hall.

CHEUNG, Y. W. (1993): «Tests for Fractional Integration: a Monte Carlo Investigation». *Journal of Time Series*, 14, págs. 331-345.

FELLER, W. (1951): «The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of Independent Random Variables». *Annals of Mathematical Statistics* 22, n° 3.

HURST, H. E. (1951): «Long-term Storage Capacity of Reservoirs». Trans. Am. Soc. Civil Engin., 116, págs. 770-799.

HURST, H. E. (1955): «Methods of Using Storage in Reservoirs». Proc. Inst. Civil Engin, Part I, págs. 519-577.

HURST, H. E., BLACK, R. P. y SIMAIKA, Y. M. (1965): «Long-term Storage: An Experimental Study». Constable Press, London.

KWAITKOWSKI, D., PHILLIPS, P. C. B., SCHMIDT, P. y SHIN, Y. (1992): «Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure are we that Economic Time Series have a Unit Root?». *Journal of Econometrics* 54, págs. 159-178.

LEE, H. S. y AMSLER C. (1997): «Consistency of the KPSS Unit Root Against Fractionally Integrate Alternative». *Economics Letters* 55, págs. 151-160.

LIUDAS GIRAITIS, PIOTR KOKOSZKA, REMIGIJUS LEIPUS y GILLES TEYSSIÈRE (2003): «Rescaled Variance and Related Tests for Long Memory in Volatility and Levels». *Journal of Econometrics* 112, págs. 265-294.

LO, A. W. (1991): «Long-term Memory in Stock Market Prices». *Econométrica* 59, págs. 1.279-1.313.

PERCIVAL, D. B. y GUTTORP, P. (1993): «Long-Memory Processes, the Allan Variance and Wavelets».

PETERS, E. E. (1991): «Chaos and Order in the Capital Markets: A New View of Cycles, Prices, and Market Volatility». Wiley, New York.

PETERS, E. E. (1994): «Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics». Wiley, New York.

ROBINSON, P. M. (1994): «Time Series with Strong Dependence». En C.A. Sims (ed.), *Advances in Econometrics*: Sixth Wold Congress, vol. 1, págs. 47-96. Cambridge, Cambridge University Press.

SHIRYAEV, A. N. (1999): «Essentials of Stochastic Finance. Advanced Series on Statistical». *Science & Applied Probability*. Vol. 3.

CAPÍTULO 24

La primera oposición a Cátedra de Estadística Matemática en la universidad española

LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ
Universidad de La Rioja

Introducción

El suceso que voy a narrar, una oposición a cátedra universitaria en Madrid, pertenece a la historia científica de España en tiempos de la II República. He llegado a él desde la historia regional, que fue impulsada por la ordenación autonómica de la España actual; en concreto, desde la historia de las matemáticas, que en este caso confluye con la de la estadística. En La Rioja y en la matemática, durante la década de los ochenta, fue indiscutible prestar atención primero a Julio Rey Pastor, pero les fue llegando el turno a otros. Cámara y Fernández Baños, los dos protagonistas de este relato, aparecían mencionados ya sea en los escritos sobre Rey Pastor o en los trabajos sobre las instituciones de la matemática española de su época; en el caso del segundo, también en panoramas sobre la economía o la estadística. Pero ambos carecían de estudios monográficos específicos y amplios más allá de las necrológicas[1].

[1] Desde la estadística, se ve a Fernández Baños en (VILAPLANA, 1980). Sobre Fernández Baños y Rey Pastor es muy interesante (RAMÍREZ, 1990). Hormigón (1988) da un repaso al panorama matemático español de la época. En revistas matemáticas están las necrológicas (CANSADO, 1946) y (ETAYO, 1964).

Años después llegaron nuevos trabajos sobre Fernández Baños y Cámara[2], entre ellos una tesis doctoral que tuve el placer de dirigir (ESCRIBANO, 2000). De esta tesis han surgido varios artículos, entre ellos el presentado las «Primeras jornadas de historia de la estadística y de la probabilidad», Madrid 2001, dedicado a los trabajos de Cámara sobre el tema de las jornadas (ESCRIBANO, 2002). En lo escrito sobre Fernández Baños se mencionaba naturalmente que ganó, en febrero de 1934, la oposición a la primera cátedra de Estadística Matemática que hubo en la universidad española, en la Central de Madrid, pero sin dar datos sobre el proceso de selección. Terminando ya la tesis doctoral de Escribano sobre Cámara, tuve la intuición de que el interés de este geómetra por la estadística, junto con las ganas que tenía de trasladarse de Valencia a Madrid, lo perfilaban como un candidato a la cátedra mencionada de nueva creación. Como no la ganó, su presunta participación no aparecía reflejada es su expediente personal, pero era muy probable su interés en ella. Cuando el doctorando acudió al archivo en busca del expediente de la oposición, el asunto quedó aclarado: los dos riojanos se habían disputado, mano a mano, la novedosa cátedra. Una descripción de dicho expediente aparece como apéndice en la tesis doctoral de Escribano y, por mi parte, realizaré en las páginas que siguen un resumen de la misma y algunos comentarios sobre el contexto de la mencionada oposición. Apenas se han visto los papeles, viene a las mentes la famosa oposición a la cátedra madrileña de Ecuaciones Diferenciales, en 1932, en la que fue rechazado Terradas, el único aspirante. Los perfiles ideológicos de ésta se repitieron año y medio después.

Dos trayectorias geométricas que derivan hacia la estadística

Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) y Olegario Fernández Baños (1886-1946) comparten un origen rural riojano y que llegaron a la matemática un poco tarde, en relación con la edad ordinaria para los estudios universitarios. El primero, hijo de médico, estudió interno, hizo el bachillerato, ingresó en la Academia de Toledo e inició la carrera militar como Oficial de Infantería. El segundo, hijo de agricultor, fue al seminario. Siendo militar y ya casado desde 1900, Sixto estudió la licenciatura —que constaba de cuatro cursos— en Zaragoza (1902-1906), terminando con 28 años. Olegario abandonó el seminario a punto de ordenarse, en 1908, con 22 años. Empezó el bachillerato en Logroño y lo terminó en Madrid, donde había conseguido un puesto en Telégrafos, en 1910. Allí empezó de inmediato la licenciatura, viviendo en la misma pensión que Rey Pastor, que ya era doctor y auxiliar de Torroja. Olegario terminó la licenciatura en junio de 1913, en Barcelona, a los 27 años. Rey Pastor había estudiado la licenciatura en Zaragoza (1904-1908), donde hizo

[2] Citemos la biografía (MARTÍNEZ, 1995) y además (ESPAÑOL, 1998), obra colectiva de la que citamos (ESCRIBANO, 1998) a propósito de Cámara y, sobre Fernández Baños, (ARENZANA, 1998a). Véase también Arenzana (1997, 1998b).

amistad con Cámara, conoció y admiró a su profesor Álvarez Ude y también a Terradas, que pasó por la capital aragonesa como jovencísimo Catedrático de Mecánica Racional[3]. Veremos que estas relaciones personales no son ajenas a las vicisitudes profesionales que vamos a relatar.

En 1913 Sixto y Olegario llegaron a Madrid. El primero había realizado la tesis doctoral en junio de 1908, a los 29 años, en la línea de geometría sintética de Torroja. Lo hizo desde Zaragoza y con la ayuda del Catedrático Álvarez Ude. Cuando Cámara ganó la plaza de Auxiliar de Geometría y Mecánica en la Central pidió la excedencia en el ejército y se instaló en Madrid con sus cuatro hijos. Por su parte, Olegario volvía a la capital para iniciar el doctorado, también en la geometría sintética de Torroja pero bajo la tutela de Rey Pastor. Se doctoró en diciembre de 1915, a los 29 años.

El año 1915 es importante en la historia de la matemática española porque en esa fecha Rey Pastor impuso en Madrid su dominio científico, desde la cátedra y desde el Laboratorio y Seminario Matemático (LSM) que la JAE fundó y puso bajo su dirección. Allí coincidieron Cámara y Fernández Baños. El primero, con 37 años, era colaborador del director, y el segundo, con 29, dos más que Rey Pastor, era uno de los primeros doctorandos. Ese mismo año Olegario ganó una plaza de profesor en la Escuela Industrial de Artes y Oficios de Valladolid, a la que se incorporó en abril, y ya fue desde entonces un profesional ligado a la universidad. Precisamente en esta capital, en octubre de ese año, celebró su congreso la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPPC). Rey Pastor pronunció uno de sus más famosos discursos de corte regeneracionista y Olegario, que fue uno de los secretarios del congreso, comunicó un avance de su tesis doctoral, defendida dos meses después. Cámara tenía ya un currículo como publicista matemático y en esta ocasión presentó una comunicación teórica de álgebra (Teoría de Galois) y otra aplicada a temas de balística. Cámara venía publicando en este tema —además de sobre la geometría sintética propia de su tesis doctoral— desde 1911, y tomó sin duda contacto con las cuestiones de probabilidad y estadística que se suscitan en el agrupamiento de unas series de disparos. Por otra parte, parece plausible que su posición como ayudante le llevara a conocer la mecánica estadística.

En febrero de 1917 Cámara ganó la Cátedra de Geometría Analítica de Valencia[4]. La oposición se había convocado en marzo del año anterior y antes de que se

[3] Eduardo Torroja Caballé (1845-1918), José Gabriel Álvarez Ude (1876-1958), Esteban Terradas Illa (1883-1950), Julio Rey Pastor (1888-1962).

[4] Frente a un único contrincante, Daniel Marín Toyos, riojano también. Fernández Baños la quiso disputar pero no le dejaron. Se trataba de una oposición en turno restringido para Auxiliares de Facultad, condición que no reunía Olegario, que venía solicitando, sin éxito, un derecho de homologación para los catedráticos de escuela, que era su condición. Otro firmante que tampoco se presentó fue Anadón, que reaparecerá más adelante en este relato.

celebrara, en septiembre de 1916, Fernández Baños obtuvo una beca de la JAE para realizar estudios avanzados de geometría en Suiza, que luego cambió por Italia, de donde volvió durante los azarosos momentos finales de la guerra europea. Una nueva beca le devolvió a Italia en 1920. Fernández Baños no perdió de vista durante este período de ausencias temporales las posibles oposiciones a cátedra universitaria en las que pudiera competir, y finalmente, en junio de 1921 ganó la Cátedra de Geometría Analítica de la Universidad de Santiago de Compostela.

En esta fecha, ambos son catedráticos en universidades periféricas, con el firme propósito, como casi todos sus colegas de la época, de trasladarse a Madrid en cuanto tuvieran ocasión. Al catedrático homónimo en Madrid[5] no le llegaba la jubilación hasta 1935.

Cámara siguió perfeccionando sus conocimientos de probabilidad y estadística en contacto con la mecánica, produciendo en 1928 sus primeras contribuciones, primero inéditas y luego publicadas (ESCRIBANO, 2002). Sin duda pensaría que tal era la orientación que debía darse a una asignatura de la Facultad de Ciencias, en la misma línea que Terradas. Poco o nada había en el punto de vista de Cámara que hiciera alusión a la estadística como la tradicional «aritmética del bienestar humano», como fue, por el contrario, el enfoque de su futuro contrincante.

En efecto, Fernández Baños se interesó por la economía y aplicó su formación matemática a la econometría y la estadística entendida según su tradición sociopolítica y económica. Aunque la primera beca de la JAE que disfrutó le llevó a Suiza a estudiar geometría superior, ya entonces siguió unos cursos de Teoría del Seguro. En cuanto la geometría le proporcionó la cátedra, cumplió con ella como profesor pero sus preocupaciones como estudioso empezaron a ir por otro rumbo, en la dirección económico-estadística. Digamos de paso que poco después de instalarse en Santiago, en lo alto del escalafón universitario, además de la geometría abandonó la soltería, casándose en 1924, a los 38 años de edad. En 1923 y 1928 volvió a salir a Francia, Italia y Suiza para perfeccionar sus conocimientos de economía matemática y en octubre de 1929 la universidad gallega le concedió el honor de impartir la lección inaugural del curso, que tituló «Previsiones científicas». En los últimos meses del año 1930, es reclamado como experto por el Banco de España y la Universidad de Santiago le concede permiso de residencia por un año en la capital.

En esta situación se encontraban los dos riojanos cuando la dictadura de Primo de Rivera tuvo que dar paso a la II República, en abril de 1931. Ninguno de los dos publicaba en geometría, y ambos se aproximaban a los estudios estadísticos por distintos caminos.

---

[5] MIGUEL VEGAS y PUEBLA COLLADO (1865-1943).

La oposición de Terradas, un caso previo

Sabido es que la llegada del segundo período republicano tuvo fuertes impactos en numerosos frentes. En lo que a nuestro tema se refiere, digamos en primer lugar que se revisaron muchas situaciones anómalas sostenidas por la dictadura. Olegario tuvo que arreglar su situación administrativa en Madrid, a riesgo de perder la cátedra en Santiago. Quizás esta situación ayudó a que aflorara la Cátedra de Estadística Matemática de la Central, reivindicada desde hacía un siglo, en tiempos de Madoz.

Un caso más sustancial fue el de Rey Pastor, al que la dictadura permitía cobrar completo su sueldo de catedrático en Madrid a cambio de tres meses de trabajo, el correspondiente a la vacaciones que tenía en Buenos Aires; la administración republicana le obligó a la excedencia por incompatibilidad.

Pero el caso más espectacular fue el de Terradas[6]. En 1927, siendo Catedrático de Acústica y Óptica en Barcelona y habiendo tenido altas responsabilidades en la red telefónica y en los ferrocarriles catalanes, fue reclamado a Madrid como director de Telefónica. Se pensó (al parecer Rey Pastor fue uno de los promotores) que en tal circunstancia debía tener una cátedra en Madrid y así se hizo. En diciembre de 1928 se otorgó a Terradas la Cátedra vacante de Ecuaciones Diferenciales por un procedimiento de libre designación previsto en la legislación, pero que fue seguido de modo imperfecto. De momento nadie se quejó en la Facultad, sin duda por el ambiente autoritario de la dictadura, pero al llegar la nueva administración surgió la denuncia y Terradas fue desposeído en septiembre de la cátedra mencionada, tres meses después de haber sido cesado en Telefónica. Quedó como catedrático, que lo era desde hacía más de veinte años, en excedencia, pero si quería ser Catedrático de Ecuaciones Diferenciales de la Central, debía ganar la preceptiva oposición. Ésta se convocó y se celebró en julio de 1932. Aunque hubo otros firmantes, sólo se presentó Terradas, que a la sazón tenía 49 años y mucho prestigio. Pero el tribunal consideró que no era especialista en ecuaciones diferenciales y le suspendió por 3 votos contra 2, lo que causó un fuerte impacto en la comunidad científica e institucional. Votaron a favor de Terradas dos veteranos, el presidente del tribunal, González Quijano —ingeniero de caminos como el propio candidato— y Octavio de Toledo —Catedrático jubilado y ex-Decano de la Facultad de Ciencias—. En contra lo hicieron los vocales más jóvenes, Roberto Araújo y Fernando Lorente de No, este último también ingeniero de caminos, más el secretario Barinaga[7]. La presencia de Rey Pastor hubiera cambiado el resultado, pero el tribunal se nombró en marzo, cuando terminaba su estancia trimestral española, y las pruebas se celebraron en pleno curso platense. Intencionadamente o no, la autoridad convocó la opo-

---

[6] Véase su biografía (ROCA, SÁNCHEZ RON, 1990).

[7] PEDRO GONZÁLEZ QUIJANO (1870-1958), LUIS OCTAVIO DE TOLEDO (1857-1934), JOSÉ BARINAGA MATA (1890-1965).

sición con Rey Pastor como primer vocal, pero de modo que era prácticamente imposible su actuación efectiva, como así sucedió, siendo sustituido por Araújo, que votó en contra.

Araújo y Lorente de No eran de la primera promoción del LSM, pero se había ido de la influencia de Rey Pastor y de la geometría (Araújo se inició en curvas W y Lorente de No en curvas armónicas). Álvarez Ude y Plans se hicieron cargo de la dirección del LSM cuando Rey Pastor se marchó a Argentina[8]. El primero fue siempre un continuador del espíritu reipastoriano, pero Plans mantuvo criterios independientes. Álvarez Ude, sucesor de Torroja en la cátedra de la Central, siguió siendo geómetra hasta 1927, cuando giró su interés hacia la matemática actuarial. Entonces se distanció del LSM, a cuya dirección se incorporó Terradas, manteniendo así la influencia del grupo asociado a Rey Pastor. Volviendo a los jóvenes, Araújo se pasó a la matemática aplicada y era catedrático de Análisis Matemático en Valencia. Lorente de No realizó la tesis con Plans en física matemática (1918) y siguió trabajando en este campo en el LSM, sin derivar hacia puestos universitarios. En 1931 mantuvo un notable enfrentamiento con Álvarez Ude. Algo distinta es la trayectoria de Barinaga[9], al que había llegado tarde la vocación matemática, después de unos inicios musicales, pero que se licenció en 1926, se doctoró en 1929, un año después fue Catedrático de Análisis Matemático en Barcelona y en 1931 sustituyó en Madrid al jubilado Octavio de Toledo, su director de tesis doctoral.

En el caso Terradas se libró un juicio matemático y también otro ideológico, de ideología científica seguro —había sido propuesto como académico, por segunda vez, en enero de 1931 y elegido un mes más tarde, así que era académico electo cuando le suspendieron— y de ideología política también. Por otra parte, la recepción oficial de Terradas a la Academia de Ciencias en febrero de 1933 se planteó como un acto de desagravio, lo que acentuó el enfrentamiento entre sectores. Terradas eligió como discurso precisamente el programa que había presentado en la oposición. Rey Pastor le recibió afirmando que resultaba insólito que cinco personas se hubieran atrevido a juzgar a un ser superior como Terradas y proclamando su apoliticismo en favor de la ciencia[10].

Terminaremos este tema diciendo que, separado de la cátedra desde el 30 de septiembre de 1931, un mes después la Facultad le encargó el «desempeño» de la Cátedra de Estadística Matemática, que estaba ya lista para salir a oposición, actividad en la que continuó hasta abril de 1933.

---

[8] Véase (AUSEJO, MILLÁN, 1989). JOSÉ MARÍA PLANS FREIRE (1878-1934).

[9] Véase la necrológica (CUESTA, 1966). La oposición se describe en este trabajo y en Roca (1990).

[10] El discurso se ha reproducido en Rey Pastor (1993). El riojano ilustre, académico desde 1920, se había encargado también de recibir a Álvarez Ude en 1928.

La oposición de Cámara y Fernández Baños

En este ambiente, en diciembre de 1932, se convocó la oposición a la primera Cátedra de Estadística Matemática en la universidad española. Durante los años 1930-33 el currículo de cada candidato reflejaba claramente una preparación intensiva en la dirección estadística. En la *Revista Matemática Hispano-Americana* Fernández Baños publicó en 1930 sobre correlación y regresión y, en 1932, sobre números índices; por su parte, en la misma revista, Cámara insertó en 1931-32 una serie de cuatro artículos sobre la correlación múltiple en general y, en 1933, otro de tema estocástico. En este último año previo, Fernández Baños estudió una curva de frecuencia en los *Anales de la Universidad de Madrid* y Cámara dio la lección inaugural del curso en la Universidad de Valencia sobre «El azar y los fundamentos del cálculo de probabilidades». Fernández Baños tenía además otras publicaciones en ambientes económicos, sin olvidar su presencia destacada en la reunión internacional de estadística celebrada en Madrid en 1931. La competencia estaba servida.

El Gobierno provisional de la República, presidido por Alcalá-Zamora, dictó un nuevo reglamento para las oposiciones a cátedras universitarias[11], que se estrenó en la oposición de Terradas. Lo esencial de la reforma se refería a los tribunales juzgadores y a los ejercicios que debían realizar los aspirantes. Los tribunales tendrían cinco miembros, de los cuales el presidente sería «consejero o no, propuesto libremente por el Consejo de Instrucción pública de entre los especializados en esta disciplina que tengan efectiva autoridad científica». De los cuatro vocales, dos debían ser catedráticos de la misma asignatura, uno propuesto por «la Facultad de la vacante» y el otro «designado por mayoría de votos de los demás catedráticos de dicha asignatura». Para los otros dos miembros se requería «un especialista en la misma disciplina (catedrático o no) designado por el Consejo». En un caso se designaría entre las propuestas que hicieran las «Facultades o Secciones donde hubiera cátedra igual a la vacante» y en el otro tenían capacidad de proponer numerosas corporaciones e instituciones científicas. Una vez constituido el tribunal, éste debía nombrar secretario a uno de sus vocales.

El reglamento establecía seis ejercicios, cada uno de los cuales era eliminatorio «si el Tribunal acuerda la expulsión por unanimidad». Los jueces debían emitir un informe de cada candidato tras cada ejercicio, así como un informe final con la votación del candidato seleccionado. Los seis ejercicios eran los siguientes: 1) Exposición del currículo de cada candidato. 2) Defensa de la memoria de la asignatura presentada por cada candidato. 3) Exposición de una lección del programa del candidato elegida por él mismo. 4) Exposición de una lección del programa del candidato elegida por el tribunal. 5) Resolución de problemas. 6) Examen teórico escrito. Los cuatro primeros ejercicios quedaban bien definidos, pero el tribunal podía

[11] Decreto de 25 de junio, siendo Ministro de Instrucción Pública y Bellas Artes Domingo Sanjuán.

determinar la naturaleza concreta de los dos últimos. Un procedimiento realmente duro y agotador, para los candidatos sobre todo, pero también para el tribunal.

El tribunal se nombró en marzo de 1933: como presidente Antonio Prieto Vives, ingeniero de caminos y miembro del Consejo Nacional de Cultura; vocales tres catedráticos, uno de Madrid, de Castro, Cámara de Valencia y Silván de Zaragoza[12], a los que hay que añadir a Lorente de No, del LSM e ingeniero de caminos. El presidente, de Castro y Lorente de No permanecieron, aunque éste quiso renunciar por ser candidato, pero se le negó tal condición por falta de requisitos. Cámara renunció por la misma razón y fue sustituido por Barinaga, que también renunció, al igual que Silván[13]. Por estas causas, entraron en el tribunal Álvarez Ude y Santos Anadón Laplaza, profesor auxiliar en la Facultad de Ciencias de la Central. Con tantas sustituciones, el tribunal quedó constituido con mucho retraso, en diciembre de 1933. Las pruebas —recordemos que eran seis—se iniciaron el 4 de enero de 1934 y el tribunal votó un mes después. El orden de jerarquía del tribunal era: Prieto, presidente, y vocales Álvarez Ude, de Castro, Anadón y Lorente de No, que fue elegido secretario en el acto de constitución. Al tratarse de una cátedra de una especialidad de nueva creación el tribunal no estaba formado por verdaderos especialistas, pero sus miembros eran sin duda conocedores generalistas de la materia, al menos en algunos de sus aspectos[14]; su misión era elegir entre los candidatos en términos de conocimientos y de idoneidad en el enfoque dado a la materia, lo que sin duda podían hacer. En lo que a la idoneidad del enfoque se refiere conviene notar que todos eran matemáticos aplicados, aunque Álvarez Ude se había reciclado recientemente.

Veamos cómo fue el proceso, pero sin entrar en los aspectos internos de la disciplina que se plantearon durante los ejercicios, que recordemos eran seis. Los dos últimos, una vez modulados por el tribunal, quedaron así: 5) Resolución de cuatro problemas en dos sesiones. 6) Examen escrito sobre dos temas elegidos a sorteo entre 39 de un cuestionario. Una vez constituido, el tribunal dedicó varias sesiones a confeccionar dicho cuestionario, que les entregó a los concursantes en el acto de presentación. El primero en intervenir fue Fernández Baños, con 49 años, frente a los 55 de su contrincante. Los informes escritos de los miembros del tribunal tras cada ejercicio son parcos y poco comprometidos, pero van dejando entrever posiciones.

---

[12] GRACIANO SILVÁN GONZÁLEZ (1874-1934), HONORATO DE CASTRO BONEL (1885-1962).

[13] Silván envió al presidente del tribunal un escrito personal de renuncia —porque llevaba una temporada «algo decaído y muy atareado»— con fecha 16-05-33 y membrete de director de la Caja de Previsión Social de Aragón.

[14] Entre la bibliografía aportada en la memoria de oposición por Fernández Baños aparece, en el apartado «Capítulos especiales de la Estadística», la obra del presidente del Tribunal Teoría de los Errores Fortuitos, Madrid, Imprenta Clásica Española, 1919. El vocal Honorato de Castro era Catedrático de Cosmología y Física del Globo, con la llegada de la II República fue nombrado director general de Estadística (agradezco este dato a G. FERNÁNDEZ y M. C. ESCRIBANO).

En los dos primeros ejercicios el tribunal permaneció neutral, pero los concursantes se cruzaron reproches. En el primero, Cámara intervino para, según el informe de Álvarez Ude, hacer «objeciones sobre un trabajo dedicado a la correlación». Este hecho fue mencionado también por de Castro, que lo calificó de «opinable». En el segundo, Cámara insistió en su punto de vista y Fernández Baños hizo notar, según el informe de Lorente de No, «la escasez de bibliografía inglesa e italiana». Aunque sin valorar, este reproche fue recogido por todos los miembros del tribunal. De los informes de los dos primeros ejercicios se desprende que ninguno de los contrincantes recibió reparos, en el sentido de no estar a la altura del puesto al que aspiraba.

Aunque todavía no había pronunciamientos, empezaron a vislumbrarse los términos en los que se iba a ventilar la selección. Por una parte, se aprecia un cierto reconocimiento de que Fernández Baños acudía a la oposición con más currículo. Anadón lo matizó muy bien al decir de los trabajos de ambos candidatos «son todos meritorios», pero señalando que Fernández Baños ha presentado «veintiocho que se refieren a la estadística y a la economía» y en los presentados por Cámara «hay siete relacionados con la estadística». Por otra, Anadón dejó clarísimo en pocas palabras el perfil de cada candidato: Fernández Baños tiene un «concepto muy estadístico de la disciplina...», mientras que de Cámara tiene un «concepto muy matemático de la disciplina...». Álvarez Ude había matizado en el primer informe que Cámara «expone la labor docente y de investigación especialmente en lo que se refiere a la cátedra objeto de oposición (cursos y trabajos sobre Teoría de Errores, cálculo de probabilidades, mecánica estadística, etcétera)». En el segundo sigue perfilando sutilmente: Fernández Baños «para fijar la función de la matemática y del cálculo de probabilidades en la estadística se refiere a la correlación» y Cámara «glosa la memoria especialmente en cuanto al concepto que debe revestir la asignatura dentro de la Facultad de Ciencias. Aconseja el libro de Mises». Este libro tenía para su contrincante un significado bien distinto. En la memoria sobre la asignatura, Fernández Baños había defendido —después de consultar personalmente a autoridades del momento como Gini, Fisher y Mortara, cuyas respuestas cita— que la estadística era una ciencia inductiva que usaba de la matemática todo lo que precisaba, pero con autonomía propia. En su extensa relación bibliográfica aparece el libro de Von Mises entre los escritos en alemán, pero añadiendo que en esta lengua «abundan los libros de estadística teórica como aplicación del cálculo de probabilidades, método deductivo y matemática elevada, quedando en ellos con frecuencia subordinado y aun velado el contenido estadístico». Terminada la relación anterior, afirma que «como el cálculo de probabilidades es un auxiliar indispensable de la estadística, y en nuestro programa dedicamos a él una lecciones, nos parece conveniente indicar, como muy convenientes y útiles, las siguientes obras», y sigue con una relación de catorce entre las que incluye el de Von Mises. No podemos hacer citas análogas de Cámara porque su documentación no ha quedado en el expediente[15], pero Fernández Baños reflejó perfectamente, sin citarlo, el enfoque estadístico de Cámara, que sigue la línea de Terradas en sintonía con Álvarez Ude.

El tercer ejercicio decantó claramente algunas posturas, principalmente las enfrentadas de Lorente de No y Álvarez Ude, el primero a favor de Fernández Baños y el segundo de Cámara. Donde el secretario vio que Fernández Baños expuso «el problema de las muestras de un modo satisfactorio», el vocal vio «un modo un poco desordenado». Y si a éste le pareció que Cámara explicó su lección con «claridad y rigor» al otro le pareció que la exposición «muy detallada se redujo a una comprobación de fórmulas. Muy pobre de conceptos». A Cámara no se le hicieron otras objeciones y a su contrincante le anotaron de Castro y el presidente alguna falta de precisión y detalle por la amplitud de materia contenida en la lección elegida. En el cuarto ejercicio se repitió la tónica. A Fernández Baños le tocó exponer la probabilidad *a posteriori*, y Lorente de No dijo que lo hizo «ateniéndose al libro de Castelnouvo de un modo bastante satisfactorio», pero para Álvarez Ude siguió «literalmente el libro de Castelnouvo con algún desorden y haciendo uso de un guión». A Cámara le tocó la Teoría de los Errores de Observación, que le pareció «muy elemental, algo imprecisa de concepto» a Lorente de No y «clara y precisa, sin usar el guión» a Álvarez Ude. No obstante, éste reconoció que Cámara no había estado tan brillante como en el ejercicio anterior y de Castro, aunque le pareció bien la exposición en conjunto, dejó escrito que «la exposición de errores accidentales no parece encajada en la estadística ordinaria».

En el quinto ejercicio, el de problemas, ninguno de los dos candidatos se lució, lo que reflejó Anadón en su informe, siempre escueto y casi siempre neutral: «resolución de los problemas no muy completa por ambos opositores». Dentro de la escasez de aciertos, Castro y el presidente se decantan a favor de Fernández Baños y los otros dos miembros del tribunal reiteraron sus posiciones extremadas ya conocidas.

Quizá fue el sexto ejercicio el que dejó las preferencias perfectamente dibujadas. Los candidatos tuvieron que exponer por escrito los siguientes temas del cuestionario que les entregó el tribunal, por orden de extracción en el sorteo: «Tema 15: Sistemas de postulados que conducen a la Ley de Gauss-Laplace. Tema 6: Interpolación en tablas de una o más variables con diferencias ordinarias. Elección de fórmula según la zona en que se haya de interpolar». Todos los informes dieron ventaja a Fernández Baños, excepto el de Álvarez Ude que siguió prefiriendo a Cámara.

El resultado técnico de la oposición parece claro tras examinar el expediente: Fernández Baños ganaba 4 a 1, pero el presidente suavizó la derrota de Cámara dejándola en 3 a 2. De los informes finales de cada miembro del tribunal, en el momento de votar —que se retrotraen a los dos primeros ejercicios, como si los

---

[15] En su lugar hay una instancia (1-03-33) en la que autoriza que su hijo Rafael retire dicha documentación y el recibí de éste (14-03-33).

demás, tantos y tan exhaustivos, no hubieran existido— no se puede deducir el voto que cada uno ejerció, pero sí del análisis de los informes parciales de todos y cada uno de los seis ejercicios. Se impuso la existencia de un mayor currículo estadístico en el ganador, que se vio favorecido también por una preferencia de la estadística como ciencia aplicada frente a otra opción más pura en el sentido matemático, que sólo defendió Álvarez Ude, aunque al final fue también señalada por el presidente. Recogemos como muestra sólo los informes finales, íntegros, de quienes votaron al perdedor:

Sr. Álvarez Ude. Los trabajos de los dos opositores demuestran que se trata de profesores muy laboriosos con vocación de investigadores. Hay entre uno y otro una diferencia que se marca ostensiblemente en sus trabajos sobre cálculo de probabilidades y estadística matemática: el Sr. Fernández Baños atiende con preferencia a la parte práctica de la estadística, mientras el Sr. Cámara se preocupa más del aspecto matemático: el primero atiende sobre todo a la fecundidad y el segundo al rigor científico.

Sr. Presidente. Los trabajos presentados por ambos opositores son de indiscutible mérito y revelan excelentes dotes pedagógicas y de investigación. Más numerosos los del Sr. Fernández Baños por razón de las funciones que desempeña, no por eso los del Sr. Cámara les ceden en mérito atendiendo al rigor científico que en ellos se observa.

La posición en el tribunal de Álvarez Ude ha quedado impresa en la obra de Rey Pastor. Al hacer recuento de la matemática española y latinoamericana de los últimos años, mencionó a sus dos paisanos como geómetras, escribiendo además[16]: Sobre cálculo de probabilidades se trabaja en el Seminario de González Domínguez (... en Buenos Aires). Esto hizo en España Terradas y después Orts en Barcelona con sus discípulos Linés, Sales...; y últimamente Ríos en Madrid (sucesor de Fernández Baños, que se ocupó de las aplicaciones) con su discípulo Cansado.» En el índice onomástico de dicha obra viene anunciada una mención a Cámara en esta misma página, pero la verdad es que no aparece citado, quizá la hubo en un primera redacción. Tal vez para compensar este extraño hecho, Rey Pastor escribió lo siguiente diez años después, en la contestación al discurso de ingreso de Sixto Ríos en la Academia de Ciencias[17]: «Antes del advenimiento de Ríos, fueron Terradas, Álvarez Ude, Fernández Baños, Quijano y Artigas los pioneros y propagandistas del cálculo de probabilidades y la estadística matemática, cuyo más destacado teórico es Sixto Cámara, maestro eminente y alejado colega de valía sólo comparable a su modestia».

[16] (Rey Pastor, 1951), pág. 16.

[17] *Discursos en la recepción de Sixto Ríos,* Academia de Ciencias, Madrid, 1961, pág. 34.

Para terminar, haremos un intento de balance ideológico de la oposición que entronca con la anterior de Terradas y con las tensiones existentes en el LSM. En las pugnas de la comunidad matemática española de la época aparece por una parte el grupo que podemos llamar de Rey Pastor, con Terradas, Álvarez Ude, Octavio de Toledo, González Quijano etcétera, en el que se integra plenamente Cámara. Por otra parte están los más independientes respecto al liderazgo del matemático hispano-argentino, Plans, Araújo, Lorente de No, Barinaga, etcétera. Ya hemos mencionado el enfrentamiento de Lorente de No con Álvarez Ude que repercutió en el LSM, y el habido entre un grupo y otro cuando la oposición de Terradas. Tras esta oposición, al tiempo que Plans se retiraba por enfermedad a primeros de 1933 (murió el año siguiente) Rey Pastor recibió apoyos superiores para reordenar el LSM, lo que aprovechó para dar entrada a sus jóvenes discípulos Ríos, Sanjuán y Santaló, al tiempo que propició la salida de Lorente de No, lo que sólo se entiende como una represalia[18]. Al contrario, Cámara fue apoyado tras su derrota. Como se aproximaba la jubilación de Vegas, Rey Pastor se puso de su parte con vistas el concurso de traslado entre catedráticos de la asignatura que se convocaría para cubrir la vacante. Su contrincante iba a ser José Mur Ainsa, catedrático en Barcelona, más antiguo (ocho años mayor) que Cámara y con servicios prestados en altos cargos universitarios y políticos. Rey Pastor estimuló algunas nuevas publicaciones de Cámara, también de estadística, y apoyó, junto al propio Vegas, Sánchez Pérez, Peña y Torroja Miret, su nombramiento como Corresponsal Nacional de la Academia de Ciencias, que se produjo en marzo de 1935. En julio se convocó el traslado y en octubre Cámara lo ganó por mayoría. Así que año y medio después de la disputada oposición, Cámara consiguió al menos volver a Madrid, a los 57 años.

No hay razones para asimilar ideológicamente a Fernández Baños con el otro grupo, algo más joven, pero tal vez el resultado de la oposición significó una cierta identificación con el mismo desde otros sectores, por parte de otros observadores del mundo científico y académico. No en vano Araújo, Lorente de No y Fernández Baños habían compartido los primeros años del LSM como doctorandos y habían tenido similares experiencias como becarios de la JAE en Europa. En cuanto a la adscripción ideológica, unos pasaron la Guerra Civil y se instalaron sin dificultad, incluso gozosamente, en el régimen franquista; los otros no. Barinaga y Araújo fueron separados de la cátedra, quedando en el exilio interior, Lorente de No encarcelado, de Castro fue al exilio en Puerto Rico y México[19]. Aunque no hay documentación que permita asegurarlo sin vacilación (CUESTA, 1966) y (ROCA, 1990) sostienen que el incidente de Terradas fue determinante en la separación de Barinaga.

[18] Véase (ROCA, 1990) para detalles.

[19] Giral (1994) relata la actividad en el exilio de Honorato de Castro, que fue diputado por Zaragoza en las Cortes republicanas. En Llombart (2001) se encuentra su biografía científica anterior al exilio, que incluye (pág. 207) un altercado significativo con Álvarez Ude en 1924.

Esto viene a cuento en este momento porque nos resulta difícil explicar la marginación de Fernández Baños del Banco de España tras la contienda. No había motivos políticos para perseguirle ni depurarle, de hecho mantuvo la cátedra universitaria, pero entre las varias razones de rechazo hacia su persona, por parte de otras mejor instaladas en el nuevo régimen golpista y en el Banco, bien pudiera figurar que se le hiciera pagar una cierta identificación con el grupo que le apoyó para obtener la cátedra, que pertenece sin duda al numeroso y brillante colectivo de científicos duramente represaliados.

BIBLIOGRAFÍA

AHEPE (2002): *Historia de la probabilidad y la estadística,* Editorial AC, Madrid.

ARENZANA, V. (1997): «Recesión del *Tratado de Estadística* de Fernández-Baños», *Suma* 24, págs. 105-109.

__________,. (1998a): «Olegario Fernández-Baños y la introducción de los estudios estadísticos en la Universidad española», en *Español* (1998), págs. 137-180.

__________, (1998b): «Introducción a la obra estadístico-económica de Olegario Fernández Baños», LLULL 21(42), págs. 633-651.

AUSEJO, E., MILLÁN, A. (1989): «La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo XX: el Laboratorio y Seminario matemático de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1915-1938)», LLULL 12, págs. 261-302.

CANSADO, E. (1946): «D. Olegario Fernández Baños», *Revista Matemática Hispano-Americana* (4.ª Serie) 6, págs. 187-190.

CUESTA, N. (1966): «Don José Barinaga Mata», *Gaceta Matemática* 18, págs. 63-86.

ESCRIBANO, J. J. (1990): «Los *Elementos de geometría analítica* de Sixto Cámara Tecedor», en *Español* (1990), págs. 123-135.

____________, (2000): *Estudio histórico de la obra matemática de Sixto Cámara Tecedor (1878-1964) en el contexto de la matemática española,* Universidad de La Rioja, Logroño.

____________, (2002): «La aportación de Sixto Cámara a la estadística española», en *AHEPE* (2002), págs. 221-249.

ESPAÑOL, L. (ed.) (1985): *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor,* IER, Logroño.

_________, (ed.) (1990): *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962),* IER, Logroño.

_________, (ed.) (1998): *Matemática y región: La Rioja,* IER, Logroño.

ETAYO, J. J. (1964): «Don Sixto Cámara Tecedor», *Gaceta Matemática,* 16, págs. 257-263.

GARMA, S. (ed.) (1980): *El científico español ante su historia. La ciencia en España entre 1750 y 1850.* (I Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias), Diputación Provincial de Madrid, Madrid.

GIRAL, F. (1994): *Ciencia española en el exilio (1939-1989). El exilio científico español,* Anthropos, Barcelona.

HORMIGÓN, M. (1988): «Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX», en SÁNCHEZ RON (1988), págs. 253-282.

LLOMBART, J. (2001): «Matemáticos españoles del exilio. Notas biográfico-científicas correspondientes a los años previos a la Guerra Civil», en SÁNCHEZ DÍAZ, G., GARCÍA DE LEÓN, P. (coords.), *Los científicos de exilio español en México,* Morelia, Michoacán, págs. 201-233.

MARTÍNEZ LÓPEZ, V. (1995): *Olegario Fernández-Baños (Apuntes para una biografía),* Gráficas Ochoa, Logroño.

RAMÍREZ, I. (1990): «Julio Rey Pastor en las memorias de Olegario Fernández Baños», en *Español* (1990), págs. 119-139.

REY PASTOR, J. (1951): *La matemática superior. Métodos y problemas del siglo XIX,* Iberoamericana, Buenos Aires-Madrid.

____________, (1993): *Escritos de las dos orillas* (Introducción, comentarios y notas de L. Español), Gobierno de La Rioja, Logroño.

ROCA, A. (1990): «Esteve Terradas (1883-1950) i el desenvolupament de la comunitat científica espanyola del segle XX», en *Español* (1985), págs. 247-256.

_______, (1990): «De la regeneración a la involución: Terradas y Rey Pastor, 35 años de amistad científica», en *Español* (1990), págs. 71-104.

ROCA, A. y SÁNCHEZ RON, J. M. (1990): *Esteban Terradas. Ciencia y técnica en la España contemporánea,* INTA/Serbal, Barcelona.

SÁCHEZ RON, J. M. (ed.) (1988): *Ciencia y sociedad en España*, El Arquero/CSIC, Madrid.

VILAPLANA, J. P. (1980): «Esbozo sobre el desarrollo histórico de la Estadística en España», en *Garma* (1980), págs. 143-156.

CAPÍTULO 25

Participación española en las primeras reuniones internacionales de estadística

GABRIELA MÓNICA FERNÁNDEZ BARBERIS
MARÍA DEL CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS
Universidad San Pablo CEU

Antecedentes históricos

La Ciencia Estadística ha ido surgiendo de las metodologías utilizadas en otras para resolver sus problemas, es decir, se trata de una ciencia interdisciplinar, y sus ideas y progresos se registran inevitablemente en íntima relación con el desarrollo de otras ciencias. Según ciertos investigadores, la historia de la estadística comienza al final de siglo XVII con el nacimiento de la Aritmética Política y los seguros de vida. Según otros, comienza en la segunda mitad del siglo XVIII con la evolución del cálculo de probabilidades y el cálculo de observaciones sstronómicas[1].

En el siglo XIX ha tomado ya una importancia relevante en todo el mundo, especialmente en Europa donde se han creado algunas sociedades profesionales. Por ejemplo, en 1835 se crea la Real Sociedad Estadística de Londres y en 1860 la Sociedad de Estadística de París. En España habrá que esperar hasta 1945, casi un

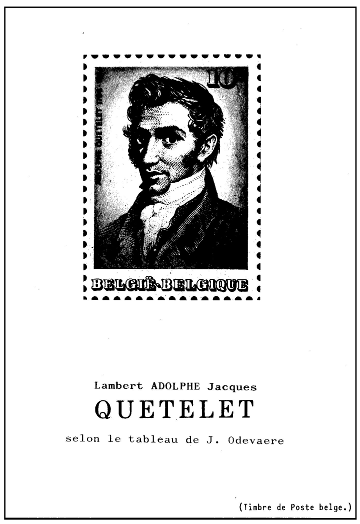
---

[1] RÍOS, S. (1989): *Historia de la ciencia estadística*. Real Academia de Ciencias, Exactas, Físicas y Naturales. Realigraf, S.A. Madrid, págs. 12-13.

siglo después, para la creación del Instituto Nacional de Estadística (INE), hasta 1952 para que se cree la primera Escuela de Estadística y hasta 1962 para que se cree la actual Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa (SEIO).

Sin embargo, el inicio de la estadística oficial en España se considera que tuvo lugar en 1856 con la creación de la Comisión General de Estadística del Reino[2] anciana precursora del INE, aunque el primer intento de formar este organismo parece ser que fue de D. Pedro López de Lerena, secretario de Despacho de Hacienda, en 1789. Este organismo llamado Oficina de Balanza se fundó en 1802 con poco éxito debido a la invasión napoleónica y al cierre de la citada oficina[3].

Una de las figuras más destacadas en el ámbito de la estadística, en lo que a sus orígenes se refiere, fue sin lugar a dudas Lambert Adolphe Jacques Quetelet. Nacido en Gand (Bélgica) el 22 de febrero de 1796 y muerto en Bruselas el 17 de febrero de 1874, dio un verdadero impulso a los estudios de estadística, reforzando sus contribuciones a partir de 1841, año en que fue nombrado presidente de la Comisión Central de Estadística de Bélgica, cargo que desempeñó hasta su muerte.



Lambert ADOLPHE Jacques
QUETELET
selon le tableau de J. Odevaere

(Timbre de Poste belge.)

A través de sus investigaciones otorgó una nueva orientación a la estadística mediante la formulación de leyes que reglaban los fenómenos morales y físicos de la vida individual y colectiva. La inauguración de la I Exposición Universal de la Industria, que tuvo lugar en Londres en 1851, fue un hecho clave, dado que allí fue

---

[2] SVEN REHER, D. (1997): «Fuentes históricas para el estudio de la población española». Fuentes Estadísticas, n.º 25, Madrid, pág. 15.

[3] GARCÍA ESPAÑA, E. (1997): «Las estadísticas históricas en el INE». Fuentes Estadísticas, n.º 25, Madrid, págs. 12-13.

donde Quetelet comenzó a realizar sus deseos de establecer relaciones y contactos internacionales en materia de estadística. Con la colaboración de numerosos profesionales estas relaciones dieron origen al I Congreso Internacional de Estadística que tuvo lugar dos años más tarde en Bruselas y que resultó ser el primero de una nueva etapa para las reuniones internacionales de estadística.

A partir de entonces se han celebrado numerosas reuniones, cada dos o tres años aproximadamente, entre las que destacaremos, en este trabajo, la celebrada en Madrid en 1931; aunque ya en el seno del ISI (International Statistical Institute) sucesor del Congreso Internacional.

Estas reuniones internacionales de estadística han tenido dos grandes etapas perfectamente definidas y diferenciadas. La primera de estas etapas fue impulsada por Quetelet, quien durante toda su vida mantuvo un compromiso con el interés y el nivel científico de las reuniones internacionales, que fueron cada vez más productivas y enriquecedoras. La muerte de Quetelet en 1874 dio por terminada esta primera etapa cuya última reunión se celebró en 1876 en Budapest.

La segunda etapa se inicia con la creación del ISI (International Statistical Institute) en 1885, considerado como digno sucesor del anciano Congreso.

Esta creación se realiza con ocasión de la celebración del cincuenta aniversario de la Real Sociedad Estadística de Londres (Royal Statistical Society) y no hay que olvidar que ese mismo año se celebra en París otra reunión para celebrar el veinticinco aniversario de la Sociedad Estadística de París (Société Statistique).

Dentro de la primera etapa, el Congreso Internacional tuvo su primera reunión el 11 de septiembre de 1853 en la Academia de Ciencias y de Bellas Artes de Bruselas, encontrándose España entre los países que enviaron representantes.

Los objetivos concretos que se dieron a conocer en aquella primera reunión y que se repitieron en las siguientes fueron: un intercambio de trabajos estadísticos de cada país, de sus publicaciones, discusiones sobre las bases y los métodos que mejor convengan a la realización de estadísticas y a la creación de la estadística internacional.

De acuerdo con los estatutos, oportunamente aprobados, el Congreso tendría reuniones plenarias y habría una especie de comisión permanente que trabajaría en los períodos entre sesiones.

El Congreso celebró reuniones plenarias en Bruselas (1853), París (1855), Viena (1857), Londres (1860), Berlín (1863), Florencia (1867), La Haya (1869), San Petersburgo (1872) y Budapest (1876). Adolphe Quetelet asistió a la octava reunión de San Petersburgo cuando contaba con 76 años y su presencia fue aclamada por los congresistas que se pusieron en pie a su entrada para escuchar, a continuación, el que fuera su último discurso en el Congreso.

En la última reunión de esta primera etapa, la que fuera novena, se le encargó a Ernst Engel, discípulo de Quetelet, que pronunciase el discurso necrológico en honor de su maestro. Éste comenzó sus palabras en francés:

> *Combien Quetelet ait consacré toute sa vie à la science pure. Quetelet a mérité de la statistique considérée à la fois comme science et comme méthode et combien il a mérité du Congrès en général.*[4]

La comisión permanente se reunió en Viena (1873), Estocolmo (1874), Budapest (1876) y finalmente en París (1878). Después de esta última reunión de la comisión permanente, puede considerarse que la actividad del Congreso Internacional de Estadística estaba concluida.

Creación del ISI (International Statistical Institute)

En la novena reunión del Congreso de Estadística que tuvo lugar en Budapest (1876) y que fue la última, se aprobaron numerosos proyectos y sugerencias, de entre los que debe subrayarse la confirmación de la comisión permanente. Sin embargo, muerto Quetelet, la organización de nuevas reuniones se ralentizó casi hasta llegar a paralizarse. Sin embargo, numerosas tentativas se sucedieron, lamentablemente infructuosas, para volver a crear ocasiones de contactos y encuentros entre estadísticos con el propósito de organizar una nueva asamblea; así pues, el deseo de contar con reuniones internacionales se hizo sentir y tuvo repercusión entre los estadísticos de todos los países.

En 1885, tanto los ingleses con motivo de celebrar el cincuenta aniversario de su Royal Statistical Society de Londres, como los franceses para conmemorar el veinticinco aniversario de la Société Statistique de París, lograron importantes avances estimulando a los directores de Departamentos de Estadística y a los representantes de la estadística científica para que participaran en las celebraciones, dejando claro, en las mismas invitaciones remitidas a los estadísticos de mayor renombre mundial, que la proposición de fundar una Sociedad Internacional de Estadística se convertiría en un asunto prioritario y de fundamental trascendencia.

El proyecto partía de la premisa de que la reunión de profesionales de todos los países fuera el punto de partida de una asociación duradera para reestablecer relaciones internacionales perdurables.

Así fue como, después de la reunión plenaria celebrada en Londres con ocasión del cincuenta aniversario de la Royal Statistical Society, el Sr. Mouat presidió un comité que se encargaría de elaborar un proyecto de estatutos para la creación del

[4] Rapport des Travaux des Réunions Plenaires du Congrès International de Statistique. 1853-1876; pág. XV. INE, Madrid, 1983.

Instituto. Los estatutos se aprobaron en la siguiente sesión celebrada la misma tarde, donde se nombró como primer presidente a Sir Rawson:

> *L'Assemblée accepte en principe la proposition de la fondation d'une association internationale statistique, telle qu'elle a été présentée par M. le Professeur Naumann Spallart, mais exprime le critère, afin d'éviter des réclamations, qu'une association de ce genre doit renoncer à toute restriction du nombre de ses membres concernant chaque pays; on instituera un comité d'organisation internationales, spéciale, désigné dans le cadre de l'assemblée, et chargé d'élaborer les détails préalables*[5].

Constitución, objetivos y reuniones del ISI

El Instituto nació como una entidad puramente científica, de trabajo y solidaridad, con orientaciones y propósitos claramente definidos. Su primer presidente fue el especialista inglés Sir Rawson W. Rawson quien ejerció la presidencia, luego de sucesivas reelecciones, hasta 1899, año en el que fue nombrado presidente honorario. Curiosamente, a finales de ese año le sorprendió la muerte.

Le sucedieron en la presidencia del organismo Karl Theodor Von Inama-Sternegg, Luigi Bodio y Albert Delatour, siendo este último quien ostentaba la presidencia del Instituto con ocasión de la celebración en Madrid de la reunión internacional de 1931. En Madrid se eligió nuevo presidente al profesor alemán D. F. Zahn.

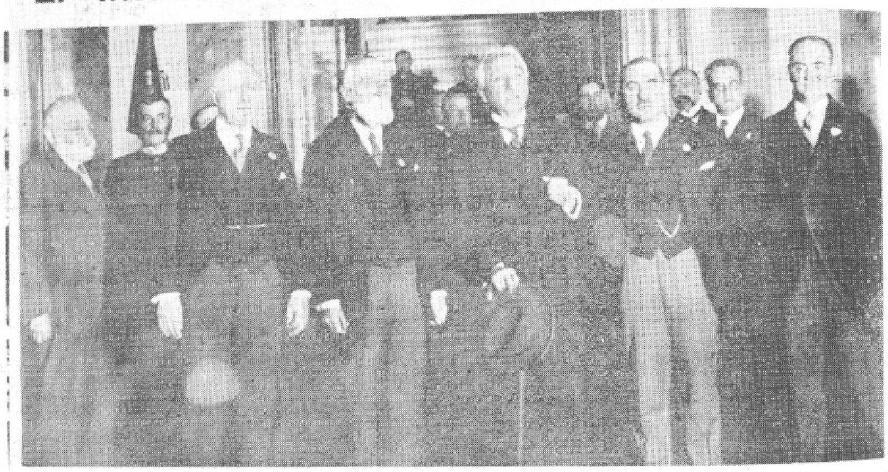
El comité directivo lo constituían el presidente, dos vicepresidentes, un secretario general y un tesorero. En 1895 el número de vicepresidentes se amplió a tres, quedando así establecida la estructura que siguió conservando el Instituto a lo largo de su vida, hasta 1931 fecha que nos ocupa.

La periodicidad establecida para la celebración de las reuniones internacionales fue de dos años aproximadamente, contando cada una de ellas con la asistencia de los miembros afiliados de los distintos países representados en la entidad. La primera reunión tuvo lugar en Roma, del 12 al 16 de abril de 1887; la siguiente fue en París en 1889, y a ésta le continuaron las de Viena, Chicago, Berna, Londres, San Petersburgo y Cristiana. En Budapest se celebró la primera reunión del siglo XX, desde el 29 de septiembre al 6 de octubre de 1901. Continuaron celebrándose, cada dos años, las de Berlín, Londres, Copenhague, París, La Haya y Viena. Esta última tuvo lugar del 9 al 13 de septiembre de 1913 y al año siguiente el Instituto tuvo que interrumpir sus congresos como consecuencia del estallido de la guerra en Europa.

---

[5] Propuesta de Sr. Mouat hecha en la sesión plenaria del cincuenta aniversario de la Royal Statistical Society y que fue aceptada por unanimidad de la Asamblea.

El Instituto Internacional de Estadística



El jefe del Gobierno, señor Alcalá Zamora, acompañando a los delegados extranjeros que asisten en el Senado a la reunión del Instituto Internacional de Estadística
(Foto Contreras y Vilaseca)

AHORA, 16 de septiembre de 1931, pág. 2.

El Instituto reanudó sus asambleas una vez terminada la contienda mundial y la primera se celebró en Bruselas del 1 al 6 de octubre de 1923. Le suceden la de Roma del 1 al 5 de octubre de 1925, la de El Cairo del 29 de diciembre de 1927 al 5 de enero de 1928, la de Varsovia del 21 al 28 de agosto de 1929, la de Tokio del 15 al 25 de septiembre de 1930 y llegamos a la de Madrid, del 15 al 20 de septiembre de 1931. Ésta es la primera vez que la Reunión Internacional tendrá por sede a la capital española, siendo la reunión número veinte del ISI.

El Instituto que tenía su sede en La Haya contaba para entonces con un número máximo de doscientos miembros. En las Reuniones Internacionales que se celebraban periódicamente se estudiaban temas importantes relacionados con la estadística y se formaban interesantes debates en torno a los mismos. Luego se reunían los informes y ponencias para ser posteriormente publicados en las ediciones que se ofrecían a los técnicos de los distintos países afiliados.

Aportaciones de la estadística española a Reuniones Internacionales anteriores al Congreso de Madrid de 1931

Consideramos muy importante efectuar una breve reseña de algunas de las aportaciones más destacadas de la estadística española a Reuniones Internacionales, con anterioridad a la celebración del Congreso de Madrid que tuvo lugar en 1931 y al cual nos referiremos con detalle en el siguiente epígrafe.

Portada del periódico *ABC* del día 16-9-1931 con la Sesión Inaugural del Congreso de Estadística celebrada en el Senado.


ABC

Recordemos, en primer lugar que España se encontraba entre los países que enviaron representantes a la primera reunión del Congreso Internacional que tuvo lugar el 11 de septiembre de 1853 en la Academia de Bellas Artes y Ciencias de Bruselas.

En 1872, D. Manuel Torres Campos presenta en la octava reunión del Congreso Internacional de Estadística, celebrada en San Petersburgo, «Rapport sur l'état, l'organisation et le progrès de la Statistique en Espagne». Del mimo autor, en 1884 se publica «Nociones de bibliografía y literatura jurídicas de España», donde dice:

> *La* estadística *es la verdadera piedra de toque de las instituciones sociales. Comparando números, se llega a la superioridad de unas sobre otras.*
>
> *Dado el sentido positivista de nuestro tiempo, se comprende bien que la* estadística *ha de tener una considerable importancia. Ella demuestra, entre otras muchas cosas, la inutilidad de la* pena de muerte *para la prevención del crimen.*
>
> *La* estadística *se aplica, pues, con gran provecho a los estudios jurídicos, y no pueden menos de apreciarse los datos que proporciona, sobre todo en lo*

relativo a la administración de justicia. Sirve además de poderoso auxiliar a la economía*.*

Este estudio se halla entre nosotros desatendido, apartándonos de la corriente general. Se publicaron varios años importantes Estadísticas de la Administración de Justicia*, y no se han continuado después.*[6]

Es de destacar también la aplicación que hace de la estadística en su opúsculo «La pena de muerte y su aplicación en España». (Madrid, 1879)

A la anteriormente citada reunión de San Petersburgo, celebrada en 1872, España envió un delegado oficial que fue D. Agustín Pascual de Villalar.

En el XI Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, celebrado en Cádiz, del 1 al 7 de mayo de 1927, dentro de la sección de Matemáticas se presentó el estudio sobre Leyes Estadísticas Actuariales del Sr. Las Heras. En el Congreso estuvieron representadas las Sociedades Análogas Portuguesa, Inglesa, Francesa e Italiana, y la Sociedad Científica Argentina[7].

El Congreso de Madrid celebrado en 1931

- **La elección de Madrid como sede del Congreso**

En 1931 se inicia un año en el que España vivirá un acontecimiento histórico de relevancia internacional. Desde el punto de vista político, al comenzar el año se inicia una crisis tensa, compleja y laboriosa que finaliza con la proclamación de la República, el 14 de abril de 1931. A partir de este momento, se inicia una nueva etapa en la historia de España. La *Gaceta de Madrid,* que por entonces era el diario oficial del Estado, publicó en los últimos días de la Monarquía una Real Orden en la que instaba a la formación del Comité de Honor y del Comité de Organización de una importante reunión de carácter internacional que se celebraría en Madrid en el mes de septiembre del año en curso. La Real Orden fue dirigida al subsecretario del Departamento de Estado y estaba firmada por el Conde de Romanones. Si bien en el documento oficial se enumeraban las personas que integrarían ambos Comités, luego se efectuaron algunos cambios como consecuencia de la nueva realidad política española. Esa reunión, de la que tanto se hablaba y en torno a la cual se había creado tanta expectación, era la XX del Instituto Internacional de Estadística (ISI). El acuerdo de celebrarla en Madrid se tomó en la XVIII Reunión celebrada en Varsovia del 21 al 28 de agosto de 1929. La XIX se celebró en Tokio del 15 al 25 de septiembre de 1930.

---

[6] TORRES CAMPOS, M. (1884): *Nociones de bibliografía y literatura jurídicas de España;* Editorial AE, Madrid, pág. 116.

[7] *Revista Hispano Americana* (1927), Madrid, pág. 53.

Al instalarse la República en España, el nuevo gobierno asumió la decisión de que Madrid fuera el escenario de esta asamblea, tal y como se había dispuesto con anterioridad, entre otras causas por las conveniencias políticas implícitas. Evidentemente, esta decisión convenía al interés político del nuevo régimen, pues al apoyar la celebración de la reunión en la capital española lograría consolidar su proyección internacional. Además, ya era reconocida a nivel mundial la importancia del Instituto Internacional de Estadística, y se pretendía que la participación española fuera cada vez más notable.

- **La preparación del Congreso**

Los Comités de Honor y de Organización, cuyas composiciones se habían dispuesto los últimos días de la Monarquía, sufrieron algunos cambios, pues con la instauración de la República fueron otros los altos cargos y consecuentemente diferentes las personas que figuraban en los grupos organizadores. Del Comité de Honor formaban parte los ministros y las autoridades vinculadas, por distintas razones, a la estadística española y el Comité Organizador estaba constituido por aquéllos que tenían relación directa con esa especialidad, esto es, los técnicos en estadística. De estos dos comités será el de Organización el que asumirá el papel relevante en la preparación y organización del Congreso. Algunos de sus miembros ya figuraban en el Comité dispuesto en los últimos momentos de la Monarquía entre los cuales podemos mencionar a los catedráticos Antonio Flores de Lemus, Francisco Bernís, Agustín Viñuales, Olegario Fernández Baños, Severino Aznar, también continuaban formando parte del mismo otros destacados especialistas en la materia, tales como: Pedro Gual Villalbí, José María Tallada, José A. Vandellón, Marcelino Pascua, Antonio Bermúdez Cañete, José Mera Benítez, Leandro Garnelo, Antonio de Miguel, Joaquín Guichot, Juan Ruiz Magán, Cecilio Montañés, Ángel Martínez de la Iglesia, Manuel Altamiras, Mariano Fuentes Martiañez, Javier Luis Almansa, y Ángel Amor.

Como novedad se creó una nueva comisión, que no había sido contemplada en el primitivo proyecto, y que puso de manifiesto la mayor importancia que comenzó a atribuirse a la participación femenina en este tipo de reuniones científicas. Nos referimos a la Comisión de Damas cuyo objetivo era atender a las señoras, en su mayor parte esposas de congresistas, que acudieran a Madrid. Dicha Comisión estaba presidida por la esposa del ministro de Justicia, D. Fernando de los Ríos y formaban parte de la misma las señoras de los ministros de Gobernación, Guerra, Marina y Fomento; del director del Instituto de Estadística y del director general de Trabajo; así como también una de las hijas del jefe del gobierno, D. Niceto Alcalá Zamora.

El Comité Organizador estaba presidido por el profesor universitario D. Honorato de Castro, quien había sido recientemente nombrado director general de

MADRID. EN EL MINISTERIO DEL TRABAJO

Algunos de los **miembros** del Congreso Internacional de Estadística, que antes de empezar las tareas del mismo han sido obsequiados con una fiesta en los salones del ministerio. (Foto Portela.)

ABC, 15 de septiembre de 1931, pág. 5.

Estadística, además de ser director del Instituto Geográfico Catastral de Estadística. La vicepresidencia estaba a cargo de D. Olegario Fernández Baños, también profesor de la Universidad y subdirector de la Oficina de Estudios Económicos en el Banco de España. D. Joaquín Guichot, jefe del servicio de Estadística en el Ministerio de Comercio estaba al frente de la secretaría general —eje central de la organización—. Profundo conocedor de la materia objeto del Congreso pertenecía a la Academia de Buenas Letras de Sevilla, siendo más reconocido por su actividad como escritor que como estadístico, siendo esta última una realidad que muchos desconocían.

- **Momentos previos a la inauguración oficial del Congreso**

Los congresistas fueron llegando a Madrid durante los días anteriores a los señalados para la reunión. Además de los temas concretos y específicos de carácter científico que se trataron en la reunión, se ofrecieron actividades culturales complementarias para dar a conocer los encantos de la capital española.

Si bien la fecha fijada para la apertura del Congreso fue el día 15 de septiembre, el día anterior tuvo lugar la primera reunión de carácter preparatorio en los Salones del Ministerio de Trabajo y dado que el ministro D. Francisco Largo Caballero no pudo asistir, le representó el subsecretario D. Luis Araquistaín.

En sus palabras de salutación dio la bienvenida a los asistentes y expresó que:

> *toda la España culta espera que su presencia y los valiosos informes presentados a este Congreso han de estimular poderosamente los estudios estadísticos en nuestro país. En esto, como en todo, la República española, no por vanagloria nacional sino por un deber de civilización, aspira a ponerse al nivel de las naciones mejor organizadas, y no hay duda que uno de los rasgos más evidentes del grado de organización social de un pueblo moderno son sus servicios estadísticos.*[8]

A las palabras del subsecretario de Trabajo respondió el presidente del Instituto Internacional, D. Albert Delatour, quien subrayó su alegría por encontrarse en España y destacó el sentido de las tareas que el Congreso se proponía desarrollar en las sesiones siguientes, creyendo que la inmediata reunión tendría una importancia muy positiva para los fines que inspiraban al Instituto.

• La sesión inaugural

El XX Congreso del Instituto Internacional de Estadística se celebró en el actual edificio del Senado de Madrid. La sesión inaugural se inició a las diez de la mañana del martes 15 de septiembre y estuvo presidida por el jefe del gobierno de la República D. Niceto Alcalá Zamora. Tras las palabras del alcalde y de D. Honorato de Castro, las de este último en francés, el presidente del Instituto Internacional, Sr. Delatour expresó en sus palabras la satisfacción y la de sus compañeros de Congreso al encontrarse en España, dentro de un clima de paz y de trabajo. Puso énfasis en que si bien el mundo vivía una hora de crisis profunda, el remedio para dicha crisis necesitaría la aportación de las estadísticas.

• Las sesiones de trabajo

Una vez inaugurado el Congreso hubo una primera reunión para organizar y distribuir tareas, en primer lugar se nombró al delegado del Japón, Hasegaw Takei, quien desempeñaba el cargo de director general de Estadística en el Gabinete del Imperio nipón, como miembro honorario del Instituto.

A las tres de la tarde del martes 15 de septiembre dieron comienzo en el edificio del Senado el examen de los informes y de las comunicaciones que se habían presentado y que recogían las tres secciones en que el Congreso había organizado su actividad: estadísticas demográficas, estadísticas económicas y estadísticas sociales.

---

[8] «El Congreso de Madrid en 1931». *Instituto Internacional de Estadística*. 44.º Período de Sesiones, pág. 30. Comisión Organizadora Nacional. INE. Artes Gráficas, Madrid, 1983.

Primera sesión: Estadísticas demográficas

En esta primera sesión se discutieron y aprobaron los siguientes trabajos:

— «Estadísticas locales de la circulación completa», del Sr. Van Zanter;

— «Los elementos del crecimiento de las grandes ciudades», del Sr. Bömert;

— «Estadística de las migraciones», del Sr. Zahn, y

— «Encuesta acerca de la opinión pública para abolir la XVIII enmienda, en Norteamérica», del Sr. Willcox, delegado de los Estados Unidos y profesor de Economía y de Estadística en la Universidad de Cornell.

Segunda sesión: Estadísticas económicas

Las comunicaciones presentadas en esta sección se referían a:

— «Estadística de los transportes», del delegado francés Sr. Girard, profesor de la Escuela de Ciencias Políticas de París;

— «Estadística de los transportes por las rutas de la navegación interior y marítima», del delegado polaco Jean Piekalkiewicz, y

— «Estadística de las finanzas públicas», también del delegado polaco.

Tercera sesión: Estadísticas sociales

Finalmente los trabajos que recogió esta sección fueron:

— «Paro y salarios reales», del delegado inglés John Hilton, profesor de la Universidad de Cambridge, y

— «Estadísticas históricas» del profesor Francisco Simiand, de la Sorbona.

Entre quienes participaron activamente en las sesiones de trabajo, cabe mencionar, además de los diversos delegados, al presidente del Instituto Sr. Delatour y a dos miembros españoles de la entidad que habían sido designados en la sesión internacional que precedió a la de Madrid: D. Antonio de Miguel, joven economista que dirigía los Servicios Estadísticos de la Dirección General de la Deuda Pública, y D. José A. Vandellós, director del Instituto de Estudios Económicos de Barcelona. Debe destacarse la activa intervención que tuvo D. Joaquín Guichot, jefe de sección en el Servicio Español de Estadística y secretario general del Comité Organizador.

En la mañana del miércoles 16 de septiembre se reanudaron las sesiones de trabajo, manteniéndose las tres secciones en que se había dividido el Congreso, y desarrollándose en el mismo edificio del Senado.

En la tarde del miércoles tuvo lugar un importante acto social; se trasladó a los congresistas a El Pardo para visitar el palacio de este viejo Real Sitio, que por entonces estaba deshabitado. Por la noche, acogió a los participantes y a sus acompañantes un edificio muy diferente, el Banco de España.

- **El programa de visitas y actos posteriores a las sesiones de trabajo**

Al día siguiente, el jueves 17 de septiembre los excursionistas salieron de Madrid con dirección a Toledo para la visita posterior. Entre congresistas, invitados y acompañantes se reunieron casi un total de trescientas personas, incluyendo también a las señoras del Comité Femenino del Congreso. Allí fueron recibidos por el alcalde de Toledo.

- **La reforma de los Estatutos del Instituto Internacional de Estadística**

El mismo jueves 17 de septiembre, a su retorno de la excursión, los congresistas que pertenecían al Instituto se reunieron en Madrid para abordar el tema aún pendiente de la reforma de los Estatutos del ISI.

La reunión estuvo presidida por D. Albert Delatour y en primer término se leyó la ponencia de la Comisión a la que se había encargado la reforma. Uno de los ponentes expuso los motivos que habían inspirado el proyecto y que se debatían en aquel momento. A continuación tomó la palabra el profesor Zahn, presidente de la Oficina de Estadística de Baviera y cerró la sesión John Hilton, Catedrático de la Universidad de Cambridge.

Por la noche se ofreció, en honor de los congresistas, un festival en el Teatro Español. Al día siguiente, viernes 18 de septiembre, los congresistas se reunieron en el salón de sesiones del Senado para continuar el debate de la ponencia redactada para la reforma de los Estatutos. La sesión continuó también por la tarde, donde se prosiguió con una discusión lenta, pormenorizada y minuciosa. Entre los ponentes destacaron los señores Henry C. Trucky, profesor de Economía Política de la Universidad de París; Corrado Gini, profesor de Estadística en la Universidad de Roma; Jean Piekalkiewicz, jefe de Sección en la Oficina Central de Estadística, de Varsovia, y el español José A. Vandellós, profesor de Estadística de Barcelona.

Se decidió aplazar la deliberación para el día siguiente, sábado 19 de septiembre. Por la noche, el Ayuntamiento de la Villa ofreció a los participantes al Congreso una recepción.

Previo a la reanudación de las deliberaciones, que tuvieron lugar el sábado 19 de septiembre a partir de las 18 horas, el programa de actividades tenía reservada una grata sorpresa a los congresistas: una visita a El Escorial.

De regreso a Madrid, los miembros del Instituto se reunieron, una vez más, en el salón de sesiones del Senado, para continuar con el estudio de la reforma estatutaria de la entidad, ya iniciado en sesiones anteriores. El proyecto fue aprobado en su totalidad y se procedió, en consecuencia, a debatir pormenorizadamente el articulado. También se aprobaron los informes presentados en las tres secciones del Instituto celebradas en los días anteriores. En ese mismo momento se decidió postergar la elección del nuevo presidente hasta la sesión de clausura, que tendría lugar en la mañana del día domingo 20 de septiembre.

- **La sesión de clausura**

La sesión de clausura comenzó a las diez de la mañana del domingo 20 de septiembre, en el salón de sesiones del Senado. La solemne sesión estaba presidida por el director general de Estadística, D. Honorato de Castro, y el presidente del Instituto Internacional, D. Albert Delatour, quién debía cesar en la presidencia que venía desempeñando desde 1923.

Llegó por fin el momento para elegir al nuevo presidente, resultando elegido como sucesor el profesor alemán Zahn. En el mismo acto se nombró al saliente como Presidente Honorario del Instituto en reconocimiento a la importante labor desempeñada durante su mandato.

Quedaba pendiente aún decidir en qué lugar se celebraría la siguiente reunión internacional del Instituto y aceptando la petición del delegado mexicano la elección recayó en la ciudad de México. Dicha reunión tendría carácter extraordinario y sería 1933 el año de su celebración.

Una vez clausurado el Congreso y terminadas oficialmente sus tareas, los participantes se trasladaron al edificio del Instituto Geográfico y Estadístico donde les fue ofrecido un vino español.

El último acto de las jornadas madrileñas fue el banquete de despedida en el Hotel Palace. Entre las figuras más destacadas se encontraban el jefe del gobierno, los ministros de Guerra, Marina y Justicia, sus respectivas señoras y el alcalde de Madrid.

Conclusiones

1. La estadística en España venía desarrollándose con pequeñas aportaciones individuales desde el siglo XVII.

2. Los intelectuales españoles durante el siglo XIX también asistían y presentaban trabajos estadísticos en Reuniones Internacionales.

3. Los trabajos estadísticos presentados por los españoles en Reuniones Internacionales merecían los elogios de profesionales extranjeros dado que eran de elevado nivel científico.

4. No es de extrañar que a comienzos del siglo XX la estadística se impartiera en las Facultades de Derecho, ya que era utilizada en los estudios jurídicos en esta época.

5. La primera Reunión Internacional de Estadística que se celebró en España fue en 1931 (XX Reunión del ISI), donde la participación española alcanzó casi la tercera parte de los asistentes al Congreso (de un total de 147 asistentes, 41 de ellos eran españoles, entre los que se encontraban los tres miembros españoles del ISI).

6. A pesar de que en 1856 se creó en España la Comisión General de Estadística del Reino, la Organización Profesional de la Estadística, se retrasa en España hasta 1945 con la creación del INE y hasta 1962 con la creación de la SEIO, casi un siglo después de la creación de organismos similares en otros países europeos.

7. Para la organización de la docencia de la estadística en España hay que esperar hasta 1952, con la creación de la primera Escuela de Estadística en Madrid.

BIBLIOGRAFÍA

AHEPE (2002): *Historia de la probabilidad y de la estadística.* Alfa Centauro, S.A., Madrid.

GARCÍA ESPAÑA, E. (1997): «Las estadísticas históricas en el INE». *Fuentes estadísticas, n.º 25,* abril 1997, Madrid, págs. 12-13.

INE (1983): *Rapport des Travaux des Reunions Plenaires du Congrès International de Statistique. 1853-1876*. INE, Artes Gráficas, Madrid.

ISI (1983): *El Congreso de Madrid en 1931.* INE, Artes Gráficas, Madrid.

MARTÍN PLIEGO, F. J. (1997): «Notas sobre la historia de la probabilidad en España», *Zubía*, 15, Logroño, págs. 155-167.

________________, (1997): «Historia de la probabilidad en España». *Revista de Historia Económica.* Año XV, n.º 1, págs. 161-184.

PINO ARABOLAZA, PILAR DEL (1986): *Evolución de la matemática española publicada en la Revista Matemática Hispano-Americana (1919-1936).* Universidad de Murcia.

RÍOS, S. (1989): *Historia de la ciencia estadística.* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Realigraf, S.A., Madrid.

SÁNCHEZ-LAFUENTE FERNÁNDEZ, J. (1975): *Historia de la estadística como ciencia en España (1500-1900).* INE.

SVEN REHER, D. (1997): «Fuentes históricas para el estudio de la población española». *Fuentes Estadísticas,* n.º 25, abril 1997, Madrid, pág. 15.

TORRES CAMPOS, M. (1884): *Nociones de bibliografía y literatura jurídicas en España.* Editorial AE, Madrid.

CAPÍTULO 26

Aportación al conocimiento de los inicios de la estadística sanitaria en España en el siglo XIX

Teresa Corbella Domenech
Universidad Rovira i Virgili

Introducción

El concepto de estadística inicialmente se refería sólo al hecho de obtener datos, reunirlos muchas veces con finalidad política. Sólo más tarde, la estadística se ocupó de relacionarlos, con aplicación en algunos campos científicos. Uno de los primeros en que se utilizó este conocimiento fue en lo relativo a las enfermedades y la muerte. Éste ha sido uno de los puntos de desarrollo de la estadística en el campo de las ciencias aplicadas, llegando hasta su importancia decisiva en los estudios epidemiológicos actuales.

En Francia, un país pionero en la recogida de datos de índole sanitaria, en el segundo cuarto del siglo XIX había un cierto debate entre partidarios y retractores del uso de la estadística (Porter, 1986, pág. 158). Inglaterra fue otro país avanzado en este campo. ¿Cuál era la situación de España en aquellos momentos?

En España se encuentran datos de un cierto interés, y ya de manera sistemática, en el enfoque higiénico o de salud pública. Primero se aporta la información de la literatura de otros países y sólo más tarde se recogen los datos locales. Al principio, se considera como estadística esta simple recopilación de datos, por lo común en forma de *cuadro estadístico*, que así se denominaba a menudo.

Este trabajo analiza los aspectos relacionados con la estadística del contenido de dos libros y cuatro revistas, en las que existe un enfoque sanitario. Se trata de una monografía de Jaime Ardévol (1820), un tratado de Pedro Felipe Monlau (1847) y las revistas *El Telégrafo Médico* (l847-48), *La Antorcha* (1849), *El Compilador Médico* (1865-69), y *La Salud* (1877-78), todas ellas aparecidas en Barcelona. Así, cabe reparar en la evolución en el enfoque de las aportaciones, la consolidación del concepto y la ideología progresista de los autores mencionados en este aspecto.

La obra de Jaime Ardévol. *Ensayo sobre la topografía y estadística de la villa de Reus en Cataluña.* 1820

Jaime Ardévol y Cabré (1773-1835) fue un médico de actitudes liberales que le costaron largos años de exilio en América y Gibraltar. Era un pionero de las innovaciones tecnológicas y su obra escrita fue extensa. Su *Ensayo sobre la topografía y estadística de la villa de Reus en Cataluña* es un folleto de 56 páginas publicado en Madrid en 1820. El texto ha sido analizado recientemente (SABATÉ, 2001) y los datos que se refieren a las artes, comercio, industria, población y riqueza son más interesantes que no los estrictamente médicos. Ardévol se preocupó tanto por el progreso técnico como por el estudio de las epidemias, entre ellas la fiebre amarilla de Gibraltar.

Las referencias a la estadística son muy breves. La más importante se encuentra en el título. En el encabezamiento se señala: «Con sólo el auxilio de topografías exactas, se podrá reunir datos positivos para la formación de una buena estadística general». Hay también una breve alusión en la última página: «Para la formación de una buena estadística general conviene que las personas ilustradas se esfuercen en dar al gobierno relaciones topográficas de pueblos y comarcas...». Se trata pues de la recogida de datos con una intención económica y política. Esto, dicho en 1820, recoge la mentalidad que venía de la Ilustración, y así la referencia a «las personas ilustradas».

En la propia portada interior se señala además: «Con analizar los elementos de la riqueza fundamental de un solo pueblo, y comparando ésta por la localidad... tratando de facilitar y promover estas mismas en otros puntos...». Se trata de alusiones, nada más que alusiones, no sólo a la recogida de datos, sino al análisis de los mismos y a la comparación con otros. El texto no va más allá, pero en todo caso merece apuntarse el hecho.

El libro de Pedro Monlau (1847). Aportación de conocimientos europeos

Pedro Felipe Monlau (Barcelona, 1808 - Madrid, 1871) fue Catedrático de Higiene de la Universidad de Madrid. Tuvo una vida profesional y política bastante activa y una evolución hasta cierto punto polémica, en el lado revolucionario en su juventud y luego más adaptado a las circunstancias. Publicó un texto importante en dos volúmenes *Elementos de higiene pública* (Barcelona, 1847). En él demuestra una considerable información de lo que se escribe sobre la materia en Europa. Sin que fije explícitamente el concepto de estadística, ni utilice el término, aporta datos en este sentido y hay alguna deducción. En el capítulo dedicado a la mortalidad establece el concepto de «mortalidad relativa» y señala cómo «la mortalidad de un país disminuye a medida que progresa la civilización» (vol. II, pág. 583). Acepta las ideas de Louis Villermé, autor francés muy importante en el campo de la higiene, sobre las diferencias de la mortalidad infantil según la clase social.

Igualmente, trata el concepto de «vida probable», entendida como la edad a la que llegan la mitad de los que nacen y esto desde diversas edades de partida. Reúne datos conocidos de cuatro tablas que compara: la francesa de Duvillard, de 1786; la de Deparcieux, de 1745; los datos de la compañía de seguros inglesa La Equitativa, que menciona con este nombre, recogidos entre 1762 y 1829; y la última, mucho más imprecisa, calculada por Domicio Ulpiano en tiempo de Alejandro Severo, en el siglo III, analizando datos de padrones y otros registros romanos (vol. II, págs. 584-585).

En otra parte del texto comenta también, con un cierto detalle, los conceptos de «vida media» y «vida probable» (vol. I, pág. 104). Los datos que aporta son siempre de la literatura europea. Respecto a la realidad española señala que aquí apenas es conocida la «Aritmética Política» (vol. II, pág. 586) y «donde está descuidadísima la formación de tablas y registros». Los comentarios de Monlau son extensos y demuestra un considerable conocimiento del tema. En su contexto histórico, dada la influencia que ha tenido la obra de Monlau en la enseñanza de la higiene en España, debe ser considerada como una de las que contribuyeron a formar una mentalidad en la que ya se tuvo en cuenta la realidad y la necesidad del conocimiento estadístico, siquiera en la visión restringida de su tiempo, para el enfoque de algunos problemas sanitarios.

El Telégrafo Médico. 1847

El Telégrafo Médico fue una revista importante en su momento. Se publicó, como la mayoría de revistas de esta etapa, durante un tiempo breve. Apareció en Barcelona durante dos años, 1847 y 1848, movida por el empuje personal de su director, Miguel Pons y Guimerá. Son dos tomos, de 380 páginas cada uno, donde se publicaron un total de 266 artículos, de autores españoles y también de otros países.

La estadística aparece de manera muy esporádica. Las referencias son casi exclusivamente de los cuadros estadísticos sobre enfermos ingresados en las clínicas de cirugía y de medicina de la Facultad de Medicina de Barcelona. Sus directores eran los profesores Antonio Mendoza y José Storck. En el artículo «Reseña de la clínica particular quirúrgica, correspondiente al curso de 1847 a 1848, en la Facultad de Medicina de la Universidad de Barcelona», se dice textualmente:

> «Por una disposición reglamentaria vigente en nuestra España, para las clínicas de las Facultades de Medicina, cada año deben ver la luz pública los resúmenes estadísticos, en que aparezca el cuadro clasificado de las enfermedades observadas, su curso y terminaciones...» (MENDOZA, 1848)

El cuadro consta como «Cuadro estadístico, redactado con arreglo a lo prevenido en los artículos 51 y 57 de las instrucciones vigentes». Se refiere a un total de 643 enfermos. Aquí no se trata de comentar los datos clínicos sino sólo de señalar su existencia, en cumplimiento de las disposiciones vigentes, y apuntar el empleo del término *estadística*, aquí evidentemente sólo en el sentido de recopilación de datos, sin elaborar medida alguna.

En la reseña de la clínica especial médica se da el mismo título «Cuadro estadístico...» (STORCK, 1848). El total de enfermos es sólo de 129, muy inferior al de la clínica quirúrgica.

En resumen, el término *estadística* es utilizado en dos artículos, en el segundo año de la revista, aplicado al «Cuadro estadístico» en que se recopilan los datos sobre frecuencias de las enfermedades de los pacientes ingresados y su evolución (curación, traslado, muerte).

La Antorcha. 1849

La Antorcha no es de hecho una revista de medicina. Su contenido es bastante polifacético, comprendiendo temas muy diversos, más en las noticias que recoge y divulga que en los artículos extensos. El punto principal de su interés es la difusión de la frenología, que es una doctrina, actualmente desfasada, que estudia la localización de las funciones del cerebro. Tiene interés entre los precedentes tanto de la psicología como la psiquiatría, aunque también de otros campos. El director-propietario de la revista, y máximo impulsor de la frenología en España, fue Mariano Cubí (1811-1875). Había estado casi veinte años en Estados Unidos donde fue, entre otras cosas, profesor de idiomas.

Se publicó un solo año, en 1849, con un pequeño alargo en 1850. Está dividida en muchas secciones, la última dedicada a noticias breves, con el título «Miscelánea». Tiene en conjunto 576 páginas. Contiene una considerable cantidad de información puntual en aspectos diversos.

En esta última sección encontramos hasta quince noticias, todas breves, que en su título, o en el índice, se refieren de manera explícita a *estadística*, siempre en el sentido de recuento numérico. La mayor parte de noticias no tienen ninguna relación con temas sanitarios. Así se refieren a economía, población, criminalidad, bibliotecas o víctimas de guerras. Sólo algunas tratan de enfermedades (cólera), o mortalidad, referida a París. Quizá lo más interesante es que las referencias estadísticas se encuentran de manera continuada y hay bastantes.

El Compilador Médico. 1865

El Compilador Médico se publicó en Barcelona de 1865 a 1869, a un ritmo partido no por el año sino por el curso académico. Era órgano oficial de la Academia de Medicina y Cirugía y su director era Antonio Mendoza y Rueda, presidente de hecho de la Academia y Catedrático de Cirugía, ya mencionado en las estadísticas aparecidas casi veinte años antes en *El Telégrafo Médico*. Sigue la tónica de la revista anterior: se utiliza muy esporádicamente el término *estadística* a propósito de cuadros numéricos referidos a la enseñanza de la medicina y las calificaciones de los alumnos (CM, 1865, vol. I, pág. 14; 1867, vol. III, pág. 22).

También aparece en los índices como *estadística médica* referida al estado sanitario de un partido, el de Falset (FERRANDIS, 1868).

De hecho, esta revista sigue el mismo enfoque que la anterior. De nuevo, se comprueba la existencia del concepto referido a la recopilación de datos numéricos sobre el estado sanitario, pero sin nuevas aportaciones.

La Salud. 1877

La Salud se publicó en Barcelona sólo durante dos años, 1877 y 1878. Cada tomo anual tiene 828 páginas. Se trata de una revista muy importante por su enfoque social. Se define como «Semanario popular de intereses vitales». A pesar de su larga tirada, su salida semanal y el enfoque del subtítulo, su nivel científico es incuestionable. No se trata ya de aportar trabajos científicos, ni colaboraciones puntuales de médicos destinadas a médicos, como era el objetivo de otras revistas, sino de proporcionar formación en temas de salud a una población más amplia.

Su director y propietario era José de Letamendi, personalidad de primer orden en la medicina española de su tiempo. Era, desde 1857, Catedrático de Anatomía de la Universidad de Barcelona. En 1879 pasó a la Cátedra de Patología General de Madrid y este cambio motivó el cese de la revista. Tenía un papel importante en su redacción y de hecho actuaba como subdirector, Gaspar Sentiñón y Cerdaña, médico sabio y curioso, más erudito que dedicado al ejercicio práctico de la profesión. También era un políglota extraordinario y aseguraba la versión en la revista de las informaciones sobre datos aparecidos en las principales revistas médicas europeas.

Sentiñón es uno de los autores que, desde un segundo plano, influyó más en la introducción y difusión de los conocimientos de la ciencia médica europea en España en su tiempo. Tuvo una etapa de gran actividad política, exilio y cárcel incluidos, también de relación personal con Bakunin, y es uno de los introductores del anarquismo teórico en España. Esto puede explicar que una de las secciones importantes de la revista sea la denominada «La Salud del Proletario», intento de introducir conocimientos en el campo de la salud laboral.

La Salud tiene una estructura bastante fija; está dividida en diez secciones. Una de ellas, la octava, se titula «Estadística». Ofrece datos de interés sanitario de diversos países de Europa. En algunos casos hay también información española. Los datos tratan principalmente de la incidencia de enfermedades infecciosas, mortalidad, estado sanitario en general, a veces también datos meteorológicos (entonces valorados en relación con la salud), enseñanza y otros.

Cabe insistir en que el enfoque principal es aportar datos numéricos para el mejor conocimiento de los hechos. En ocasiones se emplea el término *estadística* en el propio título de la noticia. Por lo común se trata de noticias cortas. Pero en algún caso no solamente se aportan cifras sino que se comparan directamente, aunque de manera puntual. Así, por ejemplo, la mortalidad entre diversas zonas de Baviera (LS, 1877, vol. I, pág. 367), comparación incluida en el propio título de la noticia: «Mortalidad comparada». También se comparan otros aspectos, aparte las diferencias por zona geográfica como las diferencias de mortalidad infantil entre niños legítimos e ilegítimos en la terminología de la época.

En algunos casos se alude directamente al concepto de *estadística sanitaria*, referida a algunos países. Éste es el caso de Suiza (LS, 1877, vol. I, pág. 77) que comprende, por un lado, las cifras generales de nacimientos, matrimonios y muertes y, por el otro, el detalle de las causas de muerte.

Además, se puede señalar que en otras secciones hay en ocasiones noticias con el mismo enfoque, principalmente en la sección quinta «La Estafeta de la Salud».

Conclusiones

1. El análisis de estos textos ilustra que España era un país que iba a remolque de otras naciones en el campo de la estadística sanitaria.

2. Se observa que inicialmente el uso del término *estadística* es reducido. Sin embargo, este término progresivamente se incorpora en la literatura. Asimismo, también se encuentran datos con mayor frecuencia.

3. Otro aspecto que cabe destacar es que por *estadística* inicialmente se entendía casi exclusivamente la recopilación de datos. Precisamente, en el primer texto analizado que va más allá, el *Tratado de higiene* de Monlau, las referencias son de otros países. En la revista analizada más reciente, *La Salud*, también se detecta algún análisis, aunque modesto, con datos locales. En cada número de esta revista, en general, hay varias noticias en las que se hace alguna referencia a la estadística.

4. Finalmente, puede valorarse el papel pionero de algunos motores de estas publicaciones. En las que se refieren en este artículo puede destacarse el papel de Pedro Felipe Monlau, Antonio Mendoza, Gaspar Sentiñón, o incluso Mariano Cubí. También se puede recordar la visión ilustrada de Jaime Ardévol en 1820. Cabe insistir en la ideología progresista de estos pioneros. En un plano quizá más secundario, deben recordarse Miguel Pons y Guimerá y José de Letamendi, como directores de las publicaciones.

BIBLIOGRAFÍA

ARDEVOL, J. (1820): «Ensayo sobre la topología y estadística de la villa de Reus en Cataluña». Imp. Espinosa, Madrid.

FERRANDIS, J. (1868): «Memoria sobre el estado sanitario del partido de Falcet en 1867». *El Compilador Médico*, vol. 3, núm. 65, págs. 395-400.

MENDOZA, A. (1848): «Reseña de la clínica particular quirúrgica, correspondiente al curso 1847-1848, en la Facultad de Medicina de Universidad de Barcelona». *El Telégrafo Médico*, vol. 2, págs. 238-245.

MONLAU, P. F. (1847): «Elementos de higiene pública». Imp. Pablo Riera, Barcelona, 2 vol.

PORTER, T. M. (1986): «The Rise of Statistical Thinking 1820-1900». Princeton University Press (Princeton).

SABATE BOSCH, J. M., SABATE FORT, J. y SÁNCHEZ CONEJERO, C. (2001): «Alguns aspectes històrics i sanitaris de Reus en el primer quart del segle XIX: Notícia de l'Ensayo sobre la topología y estadística de la villa de Reus en Cataluña» de Jaume Ardèvol, en PUJOL A., SÁNCHEZ RIPOLLÉS, J. M. (Eds.) (2001): «II Jornada d'història de la medicina de Reus y comarques veïnes». URV y Ajuntament de Reus (Reus), págs. 127-143.

STORCK, J. (1848): «Reseña de la clínica especial médica, correspondiente al curso 1847 a 1848, en la Facultad de Medicina de Universidad de Barcelona». *El Telégrafo Médico*, vol. 2, págs. 330-335.

Revistas:

El Compilador Médico (1865-1869). Establecimiento Tipográfico de Jaime Jesús (Barcelona) (4 vol.)

El Telégrafo Médico. Periódico de Medicina, Cirugía y Farmacia Prácticas (1847-1848). Imp. C. Gaspar (Barcelona) (2 vol.)

La Antorcha (1849-1850). Imp. A. Teixidó y F. Granell (Barcelona).

La Salud. Semanario Popular de Intereses Vitales (1877-1878). Imprenta y Librería Religiosa y Científica (Barcelona) (2 vol.)

CAPÍTULO 27

La ciencia actuarial y su devenir histórico

JOSÉ RODRÍGUEZ DE DIEGO
Universidad San Pablo CEU

Introducción

El riesgo constituye el pilar básico de la visión actuarial de los hechos económicos. Esta visión contempla también en su devenir la incertidumbre inherente a la actividad constitutiva de la entidad asumidora de aquéllos, hasta desembocar en el tratamiento de esta situación como un sistema de naturaleza compleja.

El riesgo en el devenir histórico

El mundo industrializado contemporáneo se caracteriza por su gran incertidumbre, que nace de la dificultad de afrontar los riesgos según una visión estratégica. Todo lo concerniente a la producción de bienes es el hecho fundamental de la industrialización, así la Teoría Económica se fundamenta en la idea de que dentro de un mundo de pobreza, todo aquello que tiene valor está relacionado con los procesos de producción. La filosofía fundamental está inclinada sobre el lado de la «oferta». Todos los demás fenómenos son considerados como secundarios. En particular, todos los servicios que intervienen al margen del proceso puramente productivo son considerados como inútiles, algunas veces como parasitarios y, consecuentemente, no son generadores de valor. Partiendo de estas premisas, toda la Teoría Económica hasta nuestros días se basó en el análisis del proceso de producción, lo que implicaba un cierto desinterés hacia todo cuanto no representaba este fenómeno. Hace dos siglos, tales actitudes estaban justificadas en el hecho de que el coste de un «producto» aparecía evidentemente ligado al coste de fabricación.

Pero dos siglos después, como consecuencia de la aceleración económica, mediante la tecnología que se basa en la ciencia y que caracteriza la segunda revolución industrial, el coste puro de fabricación representa, sobre el coste final de cada bien de consumo un porcentaje que probablemente oscila entre el 10 y el 30 %.

$$C_p = p.\ C_f \quad \text{con} \quad 0{,}1 < p < 0{,}3,\ p \in \Re$$

En todo producto que se consume hoy se paga mucho más por el servicio que por la producción del mismo. El mundo industrializado avanzado se ha convertido en una gran máquina de almacenaje, de distribución, de organización, y de información.

El riesgo, como tal, no ha sido estudiado de manera privilegiada por los grandes economistas. Fue Schumpeter quien, para explicar el dinamismo de la sociedad industrial, pondrá en evidencia el papel del «empresario» y de los riesgos que éste asume. Frank Knight en 1921, escribe un libro de Teoría Económica, que habla de «Riesgo, incertidumbre y beneficio». Pero Knight trata únicamente del riesgo empresarial, lo que concierne a la decisión de invertir y a la capacidad de la apertura de nuevos mercados.

De todas formas, la Teoría Económica tiene otra gran limitación ya que presupone que el mecanismo de la demanda y de la oferta se ponen en movimiento sin tener en cuenta el grado de incertidumbre que está involucrada en cada decisión. Es a partir de Kenneth Arrow y Karl Borch cuando se desarrolla el estudio del equilibrio económico en régimen de incertidumbre. Después de estos análisis, la visión actuarial adquiere predicamento para la economía.

La actividad actuarial y/o asegurativa tiene sus antecedentes, dentro de la historia económica, varios siglos antes de la revolución industrial, pero con una consideración marginal. La idea comúnmente aceptada es que por una parte existen los riesgos empresariales, y por otra parte diferente los riesgos que se pueden asegurar. Esta subdivisión entre riesgos empresariales y riesgos asegurables se basa en una justificación teórica de las ciencias sociales, la racionalización de un hecho simple determinado históricamente: los riesgos empresariales se asumen; los riesgos «no empresariales», sean éstos asegurables o no, casi nunca revisten carácter de asumibles.

La categoría de riesgos «no empresariales», por otra parte, comienza a ser tomada en consideración, sobre todo por exigencias de tipo social. Hacia la mitad del siglo pasado, el Estado prusiano emite la primera ley que constituye la caja obligatoria para los trabajadores de la minería. Sin embargo, se llegará al final de la crisis económica de 1929 sin que los riesgos de las personas vinculados a la seguridad social, pública o privada sean poco más que un fenómeno marginal.

Desde el final de la II Guerra Mundial, se pone en pie la mayor de las revoluciones silenciosas de la historia. En los años setenta la «cifra de negocios» de la previsión social, será equivalente, en la mayoria de los países europeos, al 20 % del producto nacional bruto. Pero los economistas no harán mucho caso: la previsión social no produce y, en consecuencia, bastará relegarla entre los problemas de transferencia y de distribución. La contabilidad del «valor añadido», basado sobre la producción «real», defiende todavía la propia exclusividad.

Si el caso del desarrollo de la seguridad social puede ser imputado sobre todo, aunque no exclusivamente, a un cambio en la filosofía social, esto no es absolutamente cierto en otro sector de los riesgos, cual es el de los riesgos industriales.

Durante los últimos treinta años, las estadísticas muestran que los siniestros industriales pagados por el seguro han aumentado, en promedio, al doble en relación con la renta nacional bruta para la mayor parte de los países desarrollados. La Teoría Económica explica tales fenómenos, sobre todo mediante la Ley de Engel: cuanto más alto es el nivel de una economía, más elevada es la propensión a los consumos secundarios (entre los cuales, naturalmente, se encuentra el seguro).

La causa predominante del aumento de los siniestros industriales lo constituye el crecimiento de la vulnerabilidad del sistema económico, debido al fenómeno que se puede denominar «de los rendimientos decrecientes de la tecnología».

El riesgo se concentra en aquellos niveles en los cuales la vulnerabilidad incide en el coste y en la incertidumbre, compensando la productividad. Además hay que añadir la enorme necesidad de capitales que se derivan de la tecnología.

El problema del riesgo no se limita únicamente al valor de los bienes y a su vulnerabilidad intrínseca. Dado que la producción está siempre insertada en un sistema de interdependencia, el costo de los riesgos tiende a aumentar, sobre todo por las consecuencias indirectas debidas a un fallo del funcionamiento del sistema en sí. Esto es lo que los aseguradores conocen bajo el nombre de «pérdida debida a interrupción», y que tiene la tendencia a convertirse en algo cada vez más grave.

El coste de la vulnerabilidad deviene cada vez más evidente, en otro plano, que es el de la reacción de los consumidores de productos, que se convierten, cada vez más, en consumidores de riesgos; ello ha implicado la aparición de un riesgo asegurable cual es el de la «responsabilidad de productos».

Está en curso una modificación notable, por lo que concierne a la dimensión y a la calidad de los riesgos. Hoy en día, la distinción entre riesgos «del empresario» y riesgos «del asegurador», se vuelve cada vez más abstracta, y esto es por dos motivos. Por una parte, es evidente que cuando una industria es particularmente vulnerable, a causa de los productos que genera, o del sistema, o del lugar de producción, el riesgo de tipo asegurativo tiene tendencia a convertirse en determinante para la supervivencia de la empresa, en cuanto lo es el riesgo de perder o ganar un mercado, pues, una modificación cuantitativa, induce una modificación cualitativa. Por otra parte, si los riesgos de tipo indirecto tienen la tendencia a desarrollarse más que los riesgos de tipo directo, está claro que el uso de los métodos asegurativos se integra, naturalmente, en la gestión general de cualquier tipo de empresa. Es decir, se convierte cada vez más en una parte integrante de la producción, de la investigación, de la renta, y así sucesivamente.

Como consecuencia de la evolución general de la vulnerabilidad asistimos a una remodelación de la noción misma del riesgo, que refleja el hecho fundamental de una estructura económica, donde el proceso productivo, considerado en sí mismo, pierde su antiguo significado. La función de los servicios, que nace de la interdependencia, y la función de los riesgos, son en consecuencia los trazos caracterizantes de la economía moderna.

El mismo fenómeno del estancamiento del crecimiento económico está estrechamente ligado a esta situación. No es verdad, como se dice a veces, que la inversión no arranca por motivos exclusivamente políticos o culturales. La inversión en la producción, a causa del fenómeno de los rendimientos decrecientes de la tecnología, es hoy mucho más difícil de decidir y de promover que lo fue hace diez o veinte años.

La Teoría Económica explica con sus términos que los rendimientos decrecientes de la tecnología se traducen en una rigidez de la oferta, que contradice la esperanza de toda la política keynesiana del relanzamiento mediante la demanda. En el período entre las dos Guerras Mundiales, la tecnología, basada en la ciencia, ponía a disposición una enorme posibilidad de aumento real de productividad y de innovación de muchísimos sectores. Esto hacía posible la elección, como lo proponía Keynes, de un nivel de equilibrio económico en función del nivel de empleo. El fenómeno de los rendimientos decrecientes de la tecnología se mide históricamente mediante el hecho de la inflacción creciente, como consecuencia de políticas económicas fundadas en la manipulación de la demanda, aún en situaciones de alto nivel de desempleo.

El sistema social desarrollado entretanto se basa ciertamente, en una redistribución de la renta a través de la seguridad social y otras medidas que inflan la demanda y contribuyen a su rigidez, pero es también verdad que tal rigidez de la demanda sería más fácilmente reabsorbible si la oferta fuese actualmente menos rígida.

Por lo tanto, la actividad aseguradora se ha insertado integralmente en la realidad económica contemporánea y se encuentra efectivamente en el cruce de los fenómenos económicos principales de la actualidad.

La participación de la actividad aseguradora en la gestión del riesgo representa, en consecuencia, una contribución económica primordial.

Observando la política económica y su confrontación con la evolución de la vulnerabilidad, parece probable que se desee una sociedad que busque cada vez más la disminución del nivel y la concentración del riesgo. Puede ser que se desarrolle, moderando o contradiciendo la noción de economía de escala, la economía basada sobre la mejor sobrevivencia de los varios sistemas sociales, y de su capacidad de desarrollo autónomo. Hay un nuevo equilibrio a buscar entre la concentración y la capacidad de autonomía.

Desde hace más de dos siglos, la Teoría Económica contribuye a reducir definitivamente la incertidumbre en el plano macroeconómico y social.

La visión actuarial en el devenir histórico

En la matemática actuarial clásica, sus dos ámbitos (de las operaciones y de la estabilidad) se trataban de manera separada no estando diferenciados en la realidad, ya que la estabilidad del ente asegurador no es independiente del precio del servicio que ofrece. No es posible concebir el cálculo de primas sin la existencia del «recargo de seguridad», que junto con las reservas de estabilización y el reaseguro constituye una de las tres magnitudes de la estabilización, magnitud ésta que puede recogerse implícitamente en lo que se conoce como «prima de riesgo puro» o explícitamente cuando la prima pura es la esperanza matemática de la siniestralidad.

La diferencia es importante, ya que en el primer caso aparece como dato y en el segundo como variable decisión, tendencia científica actual que se enfrenta con una concepción interdisciplinal, lo que equivale a afirmar que la concepción clásica consideraba ambos ámbitos de la matemática del seguro como sistemas reductibles, es decir con funcionamiento independiente. Pero cuando se consideran interrelacionados y se pone en primer plano el comportamiento del sistema total, a través de los flujos de información, surge la concepción cibernética.

Pero el tránsito hasta esta concepción ha sido jalonado por la aportación a los estudios actuariales de distintas teorías. Para superar las limitaciones del planteamiento basado en la Teoría del Riesgo Individual se aporta una visión global del riesgo colectivizando el mismo. Esta Teoría del Riesgo Colectivo, cuando se intenta aplicar a los problemas que se presentan en la empresa de seguro, encuentra asimismo limitaciones. Así, para determinar una magnitud de estabilización (recargo de seguridad, reserva de estabilización o reaseguro) se utiliza la distribución en un período fijo y la función de ruina que al considerar una acumulación indefinida de las reservas resulta incompatible con la finalidad del empresario que persigue un beneficio repartible, y cuando se le da entrada al empresario surge la necesidad de considerar sus preferencias, lo que ha dado lugar a la Teoría de la Utilidad; teoría restrictiva ya que se están relacionando dos variables con arreglo a un criterio, el de estabilidad, que resulta insuficiente cuando se consideran las interrelaciones entre los distintos sistemas y subsistemas que integran el sistema actuarial total de la empresa de seguros.

La insuficiencia de los criterios de estabilidad se pone de manifiesto a través de unas consideraciones económicas muy conocidas: *a)* Contemplando la producción en su doble aspecto: Técnico y Económico; *b)* Dando entrada a los supuestos de racionalidad del sujeto económico (empresario) que lleva a cabo tal proceso productivo, y *c)* Teniendo en cuenta el ambiente en que éste toma sus decisiones (orden económico-social y mercado).

a) En el primer caso, nos encontramos que para un mismo nivel de seguridad se presenta una indeterminación actuarial que sólo puede ser resuelta dando entrada a criterios económicos. De esta manera, la Teoría del Riesgo queda limitada a proporcionar relaciones entre las magnitudes que intervienen en el equilibrio económico-actuarial de la empresa de seguros.

Cuando se contempla la producción desde el ángulo económico se impone la consideración del corto y el largo plazo, y por tanto, la aparición de una de estas variables, las reservas de estabilización como dato (corto plazo) o como variable de decisión (largo plazo). En el primer caso, la función de costes variables depende del reaseguro (incrementos de los recargos técnicos cedidos) y del recargo de seguridad; con esta función y la de producción se obtiene la curva de costes a largo plazo y, por tanto, el volumen de producción óptimo que con las reservas de estabilización van a definir la dimensión técnica de la empresa. Sin embargo, a largo plazo las reservas de estabilización constituirán la variable de decisión más importante.

Cuando se introducen estos supuestos en los problemas del reaseguro se llega a la conclusión que el sistema óptimo ya no es una modalidad aislada, sino que puede ser una combinación de ellas.

b) La segunda consideración económica consiste en introducir los supuestos de conducta racional del empresario. A diferencia de lo que ha sucedido en la Teoría General de la Empresa, en la que se ha marcado una evolución en el sentido de construirse primero sobre el supuesto motivacional del máximo beneficio hasta incorporar otro supuesto, como es el de supervivencia a largo plazo, en la empresa de seguros, dada su peculiar naturaleza económica caracterizada porque los ingresos preceden a los gastos, apareció en primer lugar el principio de estabilidad (impuesto también por los órganos de control) que tanta influencia ha tenido en el desarrollo de las Teorías del Riesgo.

El supuesto cognoscitivo de certidumbre de la Teoría Económica clásica está siendo abandonado y ya no se supone que el empresario actúa guiado por un conocimiento perfecto. Tratándose de la empresa de seguros, está claro que el beneficio viene dado por una variable aleatoria (corto plazo) o por un proceso estocástico (largo plazo).

Con ello se dispone de un criterio económico para elegir entre la distribución en un período fijo o la función de ruina como criterio de estabilidad.

También ha sido incorporado al seguro el principio de máxima utilidad del beneficio, es decir, dada la función de utilidad que traduce objetivamente el orden de preferencia del sujeto económico, la decisión óptima queda reducida a un problema de programación matemática.

c) La tercera consideración exige introducir el ámbito económico dentro del cual desarrolla su actividad el empresario. Es el sistema de información económica (orden económico-social y mercados de seguro y reaseguro). En este aspecto cabe resaltar cómo en el modelo de monopolio bilateral aplicado al reaseguro la solución óptima es el sistema de cuota-parte. Precisamente la modalidad que ocupaba el último lugar cuando el criterio de elección tomaba en cuenta solamente la estabilidad.

Se avanza hacia un planteamiento más general a través de la Teoría de Sistemas bajo una concepción cibernética.

En la concepción moderna del problema actuarial, el ente asegurador, o en general, el empresario, si consideramos la empresa como unidad de decisión con riesgo, actúa como decisor en ambiente de riesgo (las decisiones dan lugar a consecuencias con distribución de probabilidad conocida por el decisor) o de incertidumbre (Ley de Probabilidades Desconocidas), necesitando captar la máxima información del medio en que actúa y tener en cuenta las posibles interrelaciones entre los flujos de información del ambiente, sus posibles estados y sus respuestas a las acciones del decisor. Es decir, la concepción del ente asegurador como sistema de información-decisión.

De ahí surge la necesidad de ir incorporando la sucesiva información del ambiente (con su grado de «credibilidad») al caudal de conocimientos (con su grado de «fiabilidad») que posee el decisor para la toma de decisiones, y esto se consigue dando entrada a los principios de la estadística bayesiana y de la Teoría de la Información. En efecto, la predicción y el aprendizaje, la búsqueda de leyes de comportamiento (ya sean naturales, físicas, estadística o técnicas) cuyo conocimiento asegure la eficacia en la acción, consiste en aumentar la redundancia del ambiente en que se actúa, es decir, el stock relativo de información que de él posee el decisor.

Cuando el decisor está en situación de plena información, entonces desaparece su incertidumbre, en este caso se dice que el decisor se encuentra en equilibrio estadístico con el ambiente en que desarrolla su actividad.

La Teoría de Sistemas en la empresa de seguros es una Teoría General de la Decisión, mientras que la investigación operativa es un conjunto de técnicas de decisión al servicio de dicha teoría.

Así pues, la Teoría de Sistemas es especialmente apta en los niveles altos de la empresa para resolver problemas estratégicos a medio y largo plazo en ambiente de riesgo e incertidumbre, proporcionando soluciones que son generalmente de tipo cualitativo.

Por otra parte, la investigación operativa y las técnicas del cálculo actuarial son especialmente aplicables en los niveles intermedios de la empresa, para resolver problemas tácticos a corto plazo en un cuadro estructural dado en ambiente de certidumbre o riesgo, proporcionando soluciones de naturaleza cuantitativa.

En consecuencia, la investigación operativa y el cálculo actuarial son un medio adecuado de instrumentación del sistema, que permite alcanzar las soluciones óptimas cuantitativas en los diversos subsistemas que integran a la empresa aseguradora como sistema total.

Puede afirmarse que en la decisión por sistema en la empresa de seguros adquiere su verdadera importancia el volumen de información del decisor, el ambiente en que actúa y las interrelaciones entre los subsistemas que componen la entidad de seguros como sistema complejo. El proceso de decisión se estructura en un proceso secuencial cual es:

1) Fijación de objetivos.
2) Criterios utilizados por el decisor: de estabilidad, económicos o basados en un orden de preferencia.
3) Técnicas mediante las cuales el decisor alcanza los objetivos de acuerdo con los criterios que se hayan impuesto.

Ahora bien, puede ocurrir que una vez alcanzados dichos objetivos óptimos, la información del mercado en que actúa la entidad de seguros le imponga unas exigencias determinadas, en cuyo caso será un dato y no una variable de decisión.

No se trata de si una determinada teoría o modelo es válido o no, ya que su validez sólo depende de si las soluciones que proporciona su aplicación son adecuadas al comportamiento del sistema o no lo son.

Conclusiones

En el devenir histórico de la ciencia actuarial observamos nítidamente el tránsito por una parte de una conceptualización del riesgo basado en elementos objetivadores y por tanto medibles en términos de probabilidad, a una situación de progresiva incertidumbre cuya medición, aún lógicamente mensurable en términos probabilísticos requiere la incorporación de técnicas de investigación operativa para su cuantificación.

De otra parte es significativo el cada vez más exhaustivo tratamiento del ente asumidor de los riesgos, como ente decisor en ambiente de incertidumbre por propia naturaleza y que al mismo tiempo no puede sustraerse de objetivos económicos, paralelamente exigibles con los de naturaleza técnica, ambos optimizables.

En el momento actual, una vez planteadas las cuestiones actuariales relativas al ente asegurador desde el prisma de la Teoría de Sistemas, es necesario situar el tratamiento del riesgo y del ente asegurador dentro de la categoría de la complejidad.

BIBLIOGRAFÍA

PRIGOGINE, I. (1989): «Elogio de la complejidad». Entrevista de Carmen Mataix a Ilya Prigogine. *Revista de Occidente*, n.º 103, diciembre, págs. 113-124.

__________, (1996): «El tiempo y el devenir». Ed. Gedisa.

__________, (1997): «El fin de las certidumbres». Ed. Santillana.

NIETO DE ALBA, U. (1970): «La concepción cibernética en la dirección actuarial de la empresa de seguros». Madrid.

________________, (1989): «La incertidumbre en la economía». Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas y Físicas de Barcelona.

________________, (1998): «Historia del tiempo en economía». Ed. McGraw Hill, Madrid.

RODRÍGUEZ DE DIEGO, J. (2000): «La nueva racionalidad y su incidencia en la economía y la gestión empresarial». Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

CAPÍTULO 28

Los orígenes de la estadística de encuestas en España: género y representatividad

Luis Camarero
UNED

El proceso de conocer el todo a través de la parte es evaluado en su eficacia y calidad a través de la característica denominada como *representatividad*. Ésta, la representatividad, es una máxima tan deseable como una característica técnicamente oscura. A pesar de ser un concepto repetido hasta la saciedad en la Teoría Muestral, no existe una definición precisa del mismo, o mejor dicho existen y coexisten múltiples acepciones[1]. Lo asombroso de esta polisemia es que esta propiedad, en buena teoría, debería deducirse de la propia Teoría Inferencial.

La cuestión es que la representatividad no es un problema desde el punto de vista formal matemático, es decir ni siquiera se deduce como problema. La pristina Teoría Muestral, la más simple, el muestreo irrestricto aleatorio, cuando es referido a objetos simbólicos, bolas de una urna, elementos *e* de una población *P*... no necesita interrogarse por la representatividad. En estos casos se dice que una muestra es «confiable», que merece garantía, lo cual como es conocido se resuelve mediante una función de *n* y de sigma. Esta situación de indiferencia acerca de la representa-

[1] KRUSKAL y MOSTELLER dedicaron nada menos que cuatro artículos consecutivos a la noción de representatividad, sin llegar a encontrar ningún consenso, ni forma de unificar teóricamente tal diversidad conceptual.

tividad, se puede extrapolar a buena parte de las aplicaciones muestrales, procesos de fabricación industrial, detección de árboles enfermos en una plantación...

El problema surge sin embargo cuando la parte, la muestra, es utilizada para conocer un todo social. En estos casos la noción de confiabilidad resulta insuficiente. Ello es así por varios motivos. En el mundo social resulta difícil la definición de unidades, éstas son en realidad conjuntos borrosos. En el mundo social las unidades interactúan entre sí, en el mundo social la ubicación de las unidades no es muda sino que es significativa...

Por ello es común en el caso de las encuestas sociales el uso de diseños estratificados o de perfiles construidos mediante cuotas de forma que añadan al criterio de confiabilidad el criterio de representatividad, es decir sobre la extracción aleatoria se sobrepone una miniaturización de la población construida a través de subconjuntos especificados de la misma. La búsqueda de representatividad en las encuestas sociales no es sino un proceso para incorporar información a la muestra sobre un diseño de selección aleatoria, es decir se trata de incrementar o de maximizar la eficiencia de la parte para conocer un todo.

La cuestión es cómo se incorpora información de la población en una muestra. El proceso de selección aleatorio permite el conocimiento insesgado, la incorporación de información permite un conocimiento más exacto, pero no de una población desconocida sino idealizada, en la medida en que se ha dado forma ha sido informada.

Es decir las muestras sociales se denominan representativas, no porque sean miniaturas de una población, no porque se ajusten a los cánones de la selección aleatoria formal y probabilística sino porque son maquetas, construcciones previas de una realidad previamente definida. Esto es lo que se intentará visualizar a través de esta exposición.

Para mostrar este proceso me referiré a las dos primeras encuestas FOESSA que sin duda constituyen la puesta de largo de la moderna sociología de encuestas[2]. Y todo ello lo haré refiriéndome exclusivamente al tratamiento de la variable de sexo como identificador del género, para mostrar la distancia que existe entre las nociones de confiabilidad y de representatividad.

Los Informes FOESSA

Tradicionalmente se ha considerado a los Informes FOESSA como el hito inaugural de la sociología empírica de corte funcionalista. Es cierto que hay un antes y un

[2] Al margen de los sondeos de opinión realizados por el servicio de información de Franco en la década de los cuarenta, durante la década de los cincuenta se desarrollan los antecedentes directos que de las encuestas sociales que comienzan mediante sondeos a población universitaria sobre actitudes políticas y que continúan con la «Encuesta sobre los presupuestos mentales de la juventud española» de 1959 y que supone por ejemplo el nacimiento de DATA, primera empresa dedicada a los sondeos y que será quien poco después lleve las encuestas FOESSA. Al respecto véase De Miguel (1987).

después de los FOESSA en la sociología española, de la misma forma que es cierto que no es la primera sociología empírica ni que simplemente por el recurso a las técnicas de encuesta sea una sociología funcionalista. No debe olvidarse que a finales de los años sesenta el desarrollismo español asistía atónito a un escenario de guerra fría con dos cosmovisiones enfrentadas de la vida —capitalismo y comunismo—, dualismo que se hacía extensivo a todos los ámbitos incluyendo, por supuesto, al pensamiento. Así también la sociología entonces se definía o como funcionalista o como revolucionaria. Este reduccionismo dual asimismo funcionaba de perlas en una España que recordaba la debacle nacional y que gustaba de dividirse en triunfadores y perdedores mientras asistía a la primera renovación social de un régimen y de un estilo de vida herederos de una guerra.

El éxodo rural urbano, la apertura de las fronteras, el desarrollo de la sociedad de consumo de masas, el turismo... configuran un nuevo escenario que demandaba políticos y no meros gobernantes. En este contexto de «aperturismo» político y de gobiernos tecnócratas, la sociedad española que acababa de superar una posguerra quería comenzar a conocerse.

En este contexto surgen los Informes de la Fundación FOESSA. La Fundación de Fomento de Estudios Sociales y de Sociología Aplicada surge vinculada a Cáritas y bajo su auspicio se realizará una secuencia periódica de informes sociológicos conocidos como los Informes FOESSA.

El I Informe se realizó en 1965, bajo la dirección de Amando de Miguel quien también dirigió el II Informe FOESSA realizado en 1970. Para el III Informe FOESSA de 1975 se modificó el planteamiento de los anteriores, de forma que mientras el I y II Informe se denominaron en singular el III Informe perderá el título de informe y el singular, denominándose estudios. El proceso de transición democrática romperá la periodicidad quinquenal publicándose el IV a principios de la década de los ochenta, en dos volúmenes diferenciados y a mediados de los noventa, más de una década más tarde, llegará el V Informe que busca un planteamiento más cercano a los informes originales.

Los Informes FOESSA

	Año	*Título de la publicación*	*Coordinador*
I	1966	«Informe sociológico sobre la situación social de España»	Amando de Miguel
II	1970	«Informe sociológico sobre la situación social de España, 1970»	Amando de Miguel
III	1975	«Estudios sociológicos sobre la situación social de España, 1975»	Luis González Seara
IV	1981 1983	«Informe sociológico sobre el cambio político en España, 1975-1981» «Informe sociológico sobre el cambio social en España, 1975-1983»	Juan J. Linz
V	1994	«Informe sociológico sobre la situación social de España»	Miguel Juárez

Si bien la investigación de los Informes FOESSA puede considerarse de orientación descriptiva, se trata de producir datos y análisis que sitúen la realidad de España y responde a un propósito bien claro de intervención social. Los Informes FOESSA están en un primer momento destinados a ser el soporte ilustrado del Plan CCB que elabora Cáritas[3].

Los Informes FOESSA pertenecen, y en el caso de España, inauguran los Estudios Sociológicos Globales. Metodológicamente se articulan mediante la combinación de datos secundarios con una encuesta realizada sobre una muestra aleatoria estratificada. Sin embargo, como se verá más adelante, el hecho de que sea una muestra aleatoria no quiere decir que sea una muestra estrictamente representativa. Frente a los escasos estudios empíricos que se realizan en la época, la característica central es la encuesta que da unidad a los distintos capítulos, elaborados generalmente por distintos autores.

El FOESSA es un informe estadístico que agrupa, organiza y da sentido a toda la producción estadística oficial como soporte para el proceso de modernización y desarrollo. En dicho propósito utiliza a la encuesta en una función ilustrativa complementaria. Los efectos perversos del desarrollo son puestos en evidencia en el Plan CCB:

- Alimentación
- Sanidad
- Instrucción
- Vivienda
- Trabajo
- Comunidad Social

Esta última línea es la más reflexiva y contempla las repercusiones psicosociales de las transformaciones de las estructuras rurales en urbanas, la crisis de la familia, la estructura social del suburbio español, grupos marginales, los movimientos migratorios interiores, la asistencia a los españoles emigrantes en Alemania[4].

Las encuestas FOESSA

A continuación se describe de forma somera la metodología de las encuestas FOESSA:

---

[3] El Plan CCB es un apelativo de Plan de Asistencia Social, Promoción Social y Beneficiencia de la Iglesia.

[4] *Vid.* DE MIGUEL, J. (1994), pág. 8.

- **FOESSA 1966**

Se trata de una muestra a 2.500 hogares. La selección se realiza a partir de estratos territoriales con selección polietápica de conglomerados. En cada hogar se entrevistan a dos personas: el ama de casa y el cabeza de familia o varón mayor. Los cuestionarios son distintos.

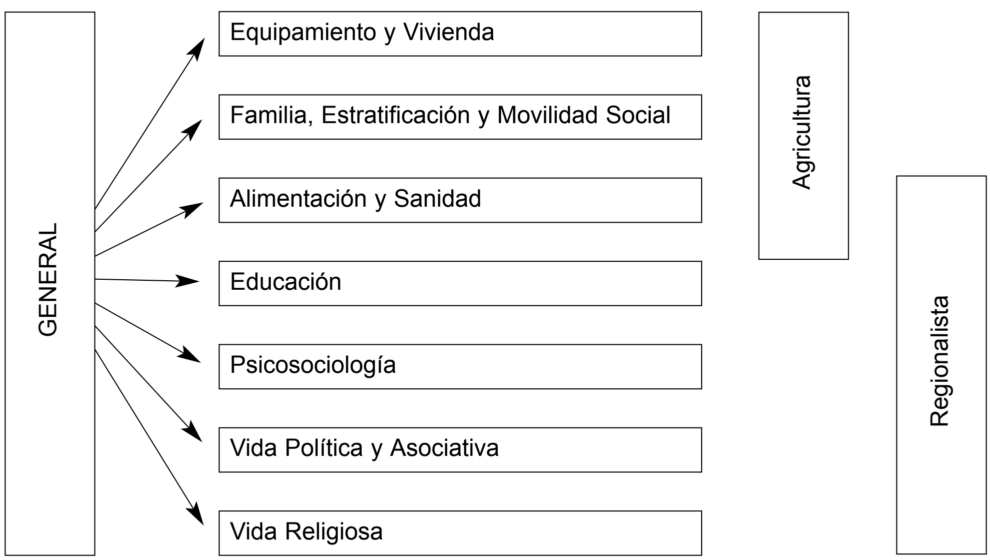
- **FOESSA 1970**

La encuesta de 1970 es una estrategia compleja que conjuga la selección aleatoria con muestras estratégicas dirigidas a colectivos testigo.

Por una parte se seleccionan aleatoriamente 4.000 hogares en los que se entrevista únicamente al ama de casa.

Por otra parte se realizan muestras estratégicas a varones[5]. «Las muestras estratégicas están realizadas en Madrid, a grupos muy pequeños y muy seleccionados, no pretendiendo que representen al grupo que se estudia, sino que orienten sobre posibles actitudes para futuras y más amplias investigaciones.» (F2, pág. 1393)

A las amas de casa se les aplican distintos cuestionarios. Existe uno común para todas más otro variable denominado «extra» dedicado a temas concretos, y en el caso de hogares rurales o regiones «regionalistas» se añade, además, otro cuestionario especial.



[5] No obstante dentro de las muestras estratégicas existe una de 200 entrevistas a mujeres chabolistas amas de casa.

- **FOESSA 1975**

La muestra selecciona a 4.400 individuos de 15 a 64 años. Consta de un cuestionario común al que se añaden dos submuestras (una sobre salud y alimentación, otra sobre fe).

Como puede observarse la unidad de las primeras encuestas FOESSA es el hogar, aunque en la práctica se acabe equiparando a la familia. Hasta la tercera encuesta 1975 no se emplea como unidad muestral al individuo. De hecho en las dos primeras encuestas las mujeres son entrevistadas sólo porque ocupan la posición de ama de casa, no son siquiera una muestra representativa del colectivo femenino. Los cuestionarios y las preguntas son distintos para varones y para mujeres. A las mujeres se les entrevista únicamente con el objetivo de obtener información del hogar, cómo es la vivienda, sus equipamientos, las pautas alimenticias o las prácticas y demandas sanitarias... Es un sujeto ausente. Son los varones quienes por el contrario responden a las preguntas de opinión...

Las encuestas FOESSA no son representativas de los españoles aunque sí lo son de las familias españolas. Así aunque no permiten conocer los estados de opinión sí que permiten conocer el cambio social que se está produciendo en el interior de las familias españolas. Veamos con detalle la crudeza de la afirmación anterior dedicando unos minutos al análisis detallado del cuestionario de la primera encuesta FOESSA.

El primer estudio FOESSA inaugura de tal manera la sociología de encuestas que tiene que comenzar por su justificación y para ello argumenta sobre las insuficiencias de los datos estadísticos oficiales, a la ausencia de clasificaciones de los datos por clases sociales y por familias. De hecho la pertinencia de la encuesta se justifica por la necesidad de superar descripciones individuales y de llegar a las unidades familiares. Así la encuesta se dirige a hogares, en concreto a 2.500 hogares. La selección de estos hogares es según los criterios puestos en práctica por la muestra Griega[6] de 1946 de validación censal, es decir según las técnicas modernas de muestreo de poblaciones finitas.

Se trata de una encuesta representativa de los hogares peninsulares y baleares. Se utiliza muy «adecuadamente» una doble estratificación por tamaño de hábitat. Recuérdese que una de las cuestiones sociales que originan estos estudios era trasvase rural urbano, y por una estratificación de homogeneidad social que intenta realmente utilizar una variable territorial, en un contexto político que intenta borrar cualquier expresión regional.

En el estrato metropolitano se incluyen la totalidad de los conglomerados, en el urbano la afijación es proporcional al tamaño de los conglomerados. En el tercer

[6] Esta operación es considerada como la formulación y primera aplicación práctica de los sistemas de muestreo de poblaciones finitas. (*Vid.* CAMARERO, 2001)

estrato se utilizaron sistemas especiales de selección que permitieran una representación de localidades de todas las áreas sociales homogéneas, manteniéndose en la medida de lo posible la proporcionalidad en la afijación y en la selección de las entidades de población a muestrear.

Como puede apreciarse, el procedimiento seguido garantiza la calidad probabilística de la selección, también se observa un gran cuidado en la realización de las entrevistas que incluyen distintas visitas a la vivienda. Sin embargo esta muestra es representativa de hogares ideales, de hogares constituidos por una familia estándar, es decir no sólo compuesta por mujer y marido, sino por una mujer ama de casa y un marido trabajador[7].

Y es que cuando se observa los cuestionarios empleados se descubre que las preguntas se realizan a partir de una tajante división de género como informantes pero también como sujetos de la vida social y política. Así se emplearon dos cuestionarios distintos, «en cada hogar se ha entrevistado al ama de casa sobre los problemas relativos a la familia entera y al varón activo cabeza de familia —o varón activo de más edad— sobre las cuestiones referentes al mundo del trabajo y opiniones en general.» (FOESSA, 1966, pág. 30)

Como puede verse además, la definición del cabeza de familia resulta confusa, cabeza de familia va asociado a actividad y edad, el ama de casa no parece que ofrezca duda, ya que se infiere que es quien está casada con el cabeza de familia. Si bien esta composición familiar acaba siendo, como se verá, demasiado ideal, no es menos importante observar que los resultados obtenidos por la encuesta se encuentran absolutamente filtrados por la categoría de género. Así la familia es informada por la mujer, y el mundo exterior y laboral por el varón.

Antes de precisar más al respecto, conviene fijarse que la muestra estadísticamente aleatoria y probabilísticamente representativa de los hogares españoles difícilmente puede ser considerada como representativa de la población española. Ello por tres motivos:

- Ausencia de las mujeres como sujeto social: son exclusivamente informantes domésticos y ciudadanas mudas.
- Lo anterior deriva en que el mundo, la España de los sesenta, sea androcéntrica, mientras que la familia sea ginecéntrica.
- A este sesgo se añade el sesgo que produce el uso de un modelo ideal de hogar.

---

[7] Además de lo que en este texto se dice respecto a la representatividad de la «España de hogares» y de familias con amas de casa, la noción de representatividad también es cuestionable en su adecuación territorial. *Vid.* al respecto, Díez Nicolás 1967, en donde objeta la transmutación de los territorios elaborados por el plan CCB como áreas territoriales de investigación.

Empezando por este último, el propio informe señala que el plan previsto de realizar 5.000 entrevistas como resultado de dos por hogar falla en un 17 % de los hogares, señalando como causas fundamentales: que no hubiera varón en el hogar o que éste estuviera en el extranjero o en otra ciudad en calidad de emigrante. El caso inverso de ausencia de ama de casa sólo se produce en el 2 % de los hogares.

Efectivamente, como señalan los autores el efecto de este sesgo se equidistribuye por toda la muestra no teniendo efectos estadísticos reseñables. Los efectos los tiene sobre el sentido de la información producida. Observemos ahora los cuestionarios empleados. El cuestionario dedicado al ama de casa no tiene desperdicio en el sentido de que se sigue a rajatabla lo que se espera que haga un ama de casa.

- Cuidado de los hijos: se pregunta por los hijos tenidos, por el estudio y trayectoria vital de los hijos.
- Alimentación de la familia: consumo y dieta de la familia.
- Administración del hogar: electrodomésticos, pagos pendientes sobre la vivienda.
- Cuidados de la familia: seguros médicos, enfermedades de los miembros de la familia, vacunas de los miembros de la familia...

Todo lo anterior llama la atención por dos razones. Primero, puede parecer normal que se pregunten ciertas cosas a las amas de casa, como por ejemplo: (*P39*) *¿Espera usted cambiarse de vivienda?,* pero lo sintomático es que esta pregunta sólo se le haga a las amas de casa, ello indica que incluso en esta pequeñas cuestiones que permiten opinar, no interesa su opinión sino su función de administradora eficiente.

Lo anterior queda más claro cuando se observa que las preguntas son impersonales: (*P40*) *En general, cuando hay un enfermo adulto en la familia y hay necesidad de avisar a un médico, ¿a qué medico avisan? ¿Y si el enfermo es un niño?*

Hoy en día la pregunta se realizaría preguntando directamente al interesado: *La última vez que usted estuvo enfermo a qué médico avisó?*

Y ciertamente a las amas de casa se les hacen preguntas directas sobre su salud y prácticas, pero siempre cuando remarcan su función doméstica o exclusivamente familiar. Obsérvese en este sentido la redacción de la pregunta 45 realizada a quienes han tenido hijos:

(*P45*) *Independientemente de que usted esté enferma o no, ¿con qué frecuencia va al médico cuando se encuentra en estado?*

Mientras el listado resumido de preguntas anterior y referido a otros miembros de la familia ocupa más del 90 %, las preguntas concretas sobre ella son escasas. Se pregunta sobre su nivel de estudios a la par que por el de su marido —queda claro que la intención no es tanto su grado de ilustración, sino las diferencias entre cónyuges—, años que lleva casada, y su ocupación.

La pregunta sobre su ocupación no necesita comentario:

(*P61*) *¿Trabaja usted en otras cosas que no sean las labores propias del hogar?*

Para aquéllas que responden que sí, la siguiente pregunta viene precodificada en profesiones, una de ellas es «portería». (sic)

Para acabar el cuestionario aparece una pregunta de opinión, pero otra vez enmascarada en un juego confuso:

(*P63*) *¿Cree usted que la mujer debe de trabajar y ganar para ayudar a la familia?*

—*Si es soltera.*

—*Si es recién casada.*

—*Si es casada con hijos pequeños.*

—*Si es casada sin hijos o con hijos mayores.*

Como puede verse, la pregunta no es directa. En la propia pregunta se recalca el papel de ama de casa ya que dice «para ayudar» y en los distintos supuestos que se explicitan para matizar la respuesta se observa que esta opinión debería de variar en función de la posición de la mujer en la familia...

Lamentablemente en el informe no aparecen publicadas las respuestas a estas preguntas.

* * *

Después de este recorrido, el lector tal vez se sienta animado a considerar que estas encuestas inaugurales no son representativas. Ni mucho menos es ésta la conclusión que de lo anterior puede derivarse. Son representativas, en primer lugar porque son confiables en la medida en que utilizan los modernos modelos de selección probabilística. En segundo lugar, aunque no lo expliciten claramente recurren a un modelo de representación, son representativas de las familias, no de las personas. Lamentablemente este modelo de representación familiar para analizar los procesos de cambio ha sido abandonado por los investigadores sociales, aplicando y prefiriendo modelos de comportamiento individuales en los que los variables familiares son meramente contextuales. Otra cuestión es que se estén representado, o se busquen familias patriarcales, pero es que la representatividad no es otra cosa que la proyección que hace el investigador de la realidad social en el propio acceso a la misma. Hay que tener en cuenta que la entrevistada es «muda» en la misma medida en que es «muda» en la vida civil[8].

---

[8] Recuérdese que las mujeres alcanzaban la mayoría de edad varios años más tarde que los varones y aún siendo mayores de edad no podían realizar transacciones comerciales, o salidas al extranjero, sin autorización paterna o conyugal. Es decir a principios de los sesenta las mujeres españolas no tienen capacidad plena en cuanto sujetos.

Y aunque pueda parecer que estas encuestas reproducen de forma automática un sesgo androcéntrico, la conclusión final apunta en contra de esta tesis. Si así hubiera sido, realmente las encuestas sólo se hubieran realizado a los varones. Lo que más sorprende en el análisis de los FOESSA es la importancia que tienen las encuestas a amas de casa y ello es así porque explícitamente, aunque sujetos mudos, se les reconoce como sujetos del cambio y agentes de las transformaciones y modernización de la vida española del desarrollismo. De hecho, en la segunda encuesta FOESSA la muestra aleatoria y fundamental es la que se realiza a las amas de casa. Por contra, la muestra de varones no es aleatoria y busca la representación gremial, para analizar actitudes políticas, esquema en consonancia con una representación política vertical.

BIBLIOGRAFÍA

CAMARERO, L. (2001): «Los soportes de la encuesta. La infancia de los métodos representativos», en *Metodología de Encuestas*, vol. 3, n.º 2, págs. 163-181.

CASADO, D. (1999): «El Plan CCB, jalón de la investigación empírica española en problemas sociales», en *Revista del Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales*, n.º 20, págs. 13-29.

CAMPO, S. DEL y CAMACHO, J. M. (2000): «Social Reporting in Spain. A recent Tradition». Universidad Complutense, *Reporting Working Paper*, n.º 15.

DÍEZ NICOLÁS, J. (1967): *«Recensión del informe sociológico sobre la situación social de España»*, en *Revista Española de Opinión Pública*, n.º 7, págs. 409-413.

KRUSKAL, W. y MOSTELLER F. (1979a): «Representative Sampling I. Non-scientific literature», en *International Statistical Review*, vol, 47 págs. 13-24.

________________________, (1979b): «Representative Sampling II. Scientific Literature, excluding Statistics», en *International Statistical Review*, vol, 47 págs. 111-127.

________________________, (1979c): «Representative Sampling III. The current Statistical Literature», en *International Statistical Review*, vol, 47, págs. 245-265.

________________________, (1980): «Representative Sampling IV. The History of the Concept in Statistics, 1895-1939», en: *International Statistical Review*, vol, 48 págs. 169-195.

MIGUEL, A. DE (1987): «Las primeras encuestas en España», en *Política y Sociedad. Estudios en homenaje a Francisco Murillo*. vol. II. Madrid, Centro de Estudios Constitucionales.

MIGUEL, J. DE (1994): «La España del cambio», en JUÁREZ, M. (Dir.) V Informe Sociológico sobre la situación social de España. Madrid, Fundación FOESSA.

CAPÍTULO 29

Huelgas y accidentes de trabajo: las primeras series de la estadística social en España

Antonio Félix Vallejos Izquierdo
UNED

El 21 de marzo de 1904 se pone en marcha, con su primera reunión plenaria, el Instituto de Reformas Sociales, creado un año antes, siguiendo el modelo de instituciones que ya funcionaban en los Estados Unidos de América, Italia, Reino Unido, Francia, Alemania o Bélgica[1], aunque no es asimilable a éstas: «Fue un organismo único en Europa», llegó a decir Raymond Carr[2]. Palacio Morena sostiene, por su parte, que «el Instituto de Reformas Sociales constituye una experiencia organizativa excepcional caracterizada por su flexibilidad (...) frente a la rigidez propia de las tendencias de racionalización burocrática que se estaban imponiendo en esa misma época (...) en todo el mundo occidental»[3].

Una de las primeras cosas en activarse en dicha institución es el Servicio de Estadística de Huelgas, «en razón de su trascendencia económico-social (“manifiesta trascendencia social”) y del carácter de tal Institución»[4]. Como base de esta

---

[1] *Commisioner of Labour, Direzione generale della Statistica, Board of Trade (del Labour Department), Direction du Travail, Kaiserlich Statistisches Amt y Office du Travail,* respectivamente.

[2] Carr, R. (1974): *España, 1808-1936,* Barcelona, Ariel, pág. 441.

[3] Palacio Morena, J. I. (1988): *La institucionalización de la reforma social en España, 1883-1924*, Madrid, Ministerio de Trabajo y Seguridad Social, pág. XXXI.

[4] Instituto de Reformas Sociales (IRS): *Estadística de huelgas (1904-1905), Memoria,* Madrid, 1906, pág. 8.

estadística se establece una «información permanente» que tiene su apoyo en las Juntas locales de Reformas Sociales instituidas en todos los municipios del país[5]: «tan pronto como los Sres. Presidentes de las Juntas locales de Reformas Sociales tuvieran conocimiento de haberse declarado una huelga, lo comunicarán sin pérdida de tiempo por correo o por telégrafo al Presidente del Instituto y al Gobernador Civil de la provincia»[6].

«Dada la novedad del intento, no era aventurado prever deficiencias en las noticias de la Declaración de las Huelgas (las Juntas locales solían ser bastante inactivas), lo que se tradujo en omisiones involuntarias de la Sección (la Sección tercera, en la cual se halla el servicio), y, por consiguiente, en defectos de la estadística. Para obviar estas dificultades —cuenta el propio Instituto en su primera memoria— se ha acudido al recurso de registrar escrupulosamente las noticias que acerca de tales fenómenos publica la prensa periódica, y se ha procurado estar en constante comunicación con los órganos centrales de las sociedades obreras de resistencia al efecto de obtener noticia de aquéllas, lo cual sirve a la Sección para dirigirse con toda diligencia a los respectivos Presidentes de las Juntas locales en demanda de información completa»[7]. En los primeros años se dan numerosas «peticiones de auxilio a las Autoridades superiores para lograr que los inferiores, o sea los Alcaldes Presidentes de las Juntas locales de Reformas Sociales, practiquen debidamente la información»[8].

Así, de esta manera imperfecta, complementando las fuentes «oficiales» con otras «extraoficiales»[9], comienzan las primeras estadísticas de huelgas que se realizan de manera regular y constante en España y que se publicarán igualmente de manera regular durante toda la vida del Instituto. Este defecto original, que encontramos en la fuente y que se reconoce expresamente desde la primera memoria, de los años 1904-5, atraviesa toda la vida de estas estadísticas, como se observa en todas las memorias anuales, pero curiosamente no es impedimento para su reiterada publicación año tras año a pesar del enorme peso que este defecto llega a suponer: en 1919, por ejemplo, de 849 huelgas «confirmadas de una manera oficial», la Sección del Instituto sólo recogió «datos completos» de 403, «quedando, en su consecuencia, 491, de las que no se han alcanzado los antecedentes pedidos, a pesar de las reiteradas gestiones que para conseguirlos se han realizado» —se quejan desde el propio Instituto—[10]. Los *cuadros* o tablas que resumen «el resultado de la infor-

---

[5] Las instrucciones y el interrogatorio se difunden en el número I del *Boletín* del IRS (julio de 1904).

[6] «Instrucciones para la formación de la estadística de huelgas», *Boletín del IRS,* julio 1904; también en *Gaceta de Madrid,* 17/08/1904.

[7] IRS, *Estadística de Huelgas* (1904-1905), pág. 10.

[8] *Íbid*., pág. 10.

[9] *Íbid*., pág. 15.

[10] IRS, *Estadística de las huelgas.* Memoria de 1919. Madrid, 1922, pág. 7.

mación» tejen una estructura que parece sostenerse a sí misma y que acaba ocultando los misterios de su génesis.

¿Cómo es posible que a pesar de esta tremenda deficiencia se insista reiteradamente en la costosa tarea que supone la elaboración y clasificación estadística de las huelgas[11], tarea invalidada en su base, según se nos advierte por los mismos que la llevan a cabo?

¿A qué se debe que este defecto de origen llegue a convertirse, paradójicamente, en auténtico acicate para la producción de estas estadísticas?

Parece plausible que la reiterada y constante presentación pública de estas estadísticas no sea otra cosa que un elemento determinante para la superación de esas resistencias locales que ponían en peligro la viabilidad de aquéllas: un curioso círculo vicioso revelador de la dinámica estatal/local que se juega en estos momentos en el país. El IRS se conecta con un expansionismo estatal propio de un proceso de desarrollo burocrático en consonancia con las necesidades de control social en un complejo momento de tensiones históricas.

Así, de manera impertérrita, desde 1904 hasta 1922 contamos con unas series estadísticas de huelgas que son casi idénticas a las que se realizan hoy en el *Anuario* de estadísticas sociolaborales que publica el Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales. Existe una diferencia obvia entre unas y otras: hoy las informaciones sobre huelgas están envueltas en otras numerosas informaciones estadísticas (empresas inscritas en la Seguridad Social, apertura de centros de trabajo, encuesta de población activa, índice de costes laborales...), antes las estadísticas de huelgas eran las únicas que se hacían junto con las de accidentes de trabajo y las del coste de la vida del obrero. Esto supone una normalización de la huelga que antes era impensable: antes la huelga era una terrible amenaza que se podía aparecer como «huelga general revolucionaria» en cualquier momento. Precisamente, y ésta es nuestra tesis, las estadísticas suponen una reducción normalizadora de la potencia inscrita en la huelga: realizan, en cierta medida, un trabajo ritual, exorcizando el peligro revolucionario, llevando la huelga al campo de la representación: se trata de «conjurar la huelga» no ya por la «intervención coercitiva» de la autoridad militar, como se hacía hasta entonces, según palabras de Rafael Salillas, sino por la intervención de la autoridad científica[12].

Las otras dos series que se elaboran junto a la de huelgas se vinculan directamente (de manera subordinada) con ésta:

---

[11] «Las noticias recibidas (...), aunque incompletas, bastan para formar idea de la cuestión» (*Informe de las minas de Vizcaya,* pág. 95).

[12] *Informe de las minas de Vizcaya,* pág. 154.

Por una parte, la del precio de «los artículos de consumo más frecuente de la clase obrera» (pág. 113) insiste en «el malestar económico» (pág. 223) que supone el desajuste entre el jornal y el coste de la vida: muchas veces el obrero «no puede vivir» (pág. 73) con lo que gana. Actúa esta estadística sobre una de las causas denominadas «reales» (pág. 155) de la huelga.

Por otra parte, las estadísticas seriadas sobre accidentes de trabajo, vinculadas al desarrollo de la Inspección de Trabajo, que afectan a la victimización de la clase obrera, tiene, creo una sobredimensión simbólica muy importante.

Si observamos el proceso ritual que suponen las estadísticas de huelgas y lo analizamos en términos girardianos, vemos claramente cómo se ajusta victimización y exorcismo de la violencia.

Por otra parte, tenemos que señalar que en este ajuste girardiano que planteamos de las estadísticas de huelgas, que actúa sobre su normalización, sobre su acotamiento en unos parámetros manejables, tiene también una labor importante «el relato» que se realiza simultáneamente de las huelgas sometidas a recuento en las tablas. En todas las memorias del Instituto, junto a los cuadros o tablas, encontramos una «crónica» de las huelgas, que justamente se hace extensísima en las llamadas «generales».

«Sin desconocer —se dice en la primera memoria de 1904-1905— lo que en la estadística representa la Ley de los Grandes Números, en cuanto pueda conducir a la investigación de lo que ha dado en llamarse Leyes de los Fenómenos Sociales (estática), entendemos que en ellos significa también mucho el elemento *singular, individual*, del hecho que se estudia y que lo caracteriza debidamente, y por eso nos permitimos antes de elaborar los datos recibidos, en el primer concepto, señalar hasta dónde sea posible en las huelgas las particularidades que nos permiten ahondar en su espíritu y tendencias lo bastante para darnos cuenta de su biología en lo que tiene de *dinámica*» (*Memoria 1904-5*, pág. 19). Nosotros más que de biología dinámica, pensamos que se ha de hablar de dinámica dramática o dramatúrgica, puesto que en el esquema de René Girard que proponemos para leer estas memorias de huelgas, las crónicas asumen la función de la tragedia, capaz de apuntar a la tensión que se oculta absolutamente el simbolismo mítico de la estadística.

CAPÍTULO 30

El uso de la encuesta estadística en la dictadura franquista (1942-1975): las encuestas de opinión

ALEJANDRO ALMAZÁN LLORENTE
UNED

Introducción

La historia de las encuestas en España está marcada por las especiales circunstancias que rodean al país entre el final de la Guerra Civil y la recuperación de las libertades democráticas en los años setenta. La temprana introducción de las encuestas de opinión al principio de la dictadura contrasta con el retraso en alcanzar la madurez metodológica y la plena incorporación de las encuestas a la vida social, en términos similares a los del entorno occidental, en los años setenta. El hecho de que en España las encuestas fueran labor exclusiva del Estado, y que existiera una dirección política de los medios de comunicación, obliga a centrar la mirada en el Instituto de Opinión Pública. Hasta los años sesenta no comienzan a aparecer nuevos actores en el campo de las encuestas: el Instituto Nacional de Estadística, los institutos de investigación de mercados y las universidades.

La paradoja de realizar encuestas de opinión en una dictadura adquiere sentido, en el contexto de la censura, el control de los medios de comunicación y la propaganda. Estas circunstancias determinarán un escaso interés por las cuestiones metodológicas en el campo de las encuestas de opinión y un retraso que acabará compensándose aceleradamente, a partir de los primeros años sesenta.

El contexto de la II Guerra Mundial y el desarrollo de las encuestas de opinión

Las referencias de la época sitúan el inicio de las encuestas de opinión en los «referendum de Gallup» y la creación en 1935 del American Institute of Public Opinion, iniciativa que será seguida en Europa con el British Institute of Public Opinion y el Institut Français d´Opinion Publique fundados en 1938 y financiados, como el americano, mediante la publicación de los sondeos en los medios de comunicación.

El desarrollo y la posterior extensión generalizada de los métodos de encuestas de opinión estarán muy condicionados por la II Guerra Mundial. El incipiente desarrollo de institutos de opinión en Europa a finales de los años treinta, se ve bruscamente interrumpido. Pero una vez terminada la contienda, se crean en muy poco tiempo institutos de opinión tanto públicos como privados, de modo que a finales de los años cuarenta existen institutos en Inglaterra, Francia, Holanda, Bélgica, Alemania, México, Hungría, Checoslovaquia e Italia.[1] También se crean asociaciones internacionales de la investigación de la opinión como la World Association for Public Opinion Research (WAPOR) y la European Society for Opinion and Marketing Research Association (ESOMAR), en 1948.

En los EE.UU, la entrada en la guerra supondrá importantes cambios en la realización de encuestas de opinión, tanto por la extensión de los estudios realizados como por las transformaciones metodológicas que introducen. Será el origen del modelo de investigación social que se exportará a Europa y el resto del mundo tras la guerra. Los trabajos realizados por Rensis Likert desde 1939, en la Division of Program Surveys del Departamento de Agricultura, para conocer las reacciones hacia los programas del New Deal, serán el embrión de un gran centro de investigación mediante encuestas. Con la entrada de los EE.UU en la guerra, se crea en el año 1942 la Office of War Information, que contrata a la Division of Surveys y el pequeño departamento de investigación se convierte en una gran organización, que a pesar de la corta vida, juega un papel esencial en el desarrollo de la investigación mediante encuestas, debido a la complejidad y variedad de los estudios, y a la experiencia adquirida[2].

Las encuestas realizadas en el ejército americano son de especial trascendencia tanto desde el punto de vista metodológico como simbólico. Los estudios conocidos como The American Soldier tuvieron un papel importante en la evolución hacia una intensificación en la cuantificación de la investigación sociológica[3].

---

[1] STOETZEL, J. (1948): *Les sondages d'opinion publique*. Éditions du Scarabée-Studio Raber, Paris.

[2] HYMAN, H. HERBERT (1991): *Taking Society's Measure, a Personal History of Surveys Research,* Russell Sage Foundation, New York.

[3] SCHWEBER, L. (2002): «Wartime Research and the Cuantification of American Sociology. The View from The American Soldier», en *Revue d´Histoire des Sciences Humaines*, n.º 6. Mathematiques et sciences sociales au cours du XXe siècle, Presses universitaires du Septentrion, págs. 65-94.

La publicación, en 1949, de *Studies in Social Psychology in World War II*[4], recoge cuatro años de investigación en la Information and Education Division del ejército norteamericano. Los estudios suponen una reorientación de la sociología americana que se consumará tras la guerra, cuando la realización de encuestas se institucionaliza en las universidades y en los centros de investigación, consiguiendo rápidamente un lugar destacado dentro de la metodología de las ciencias sociales.

Europa durante la guerra presenta una situación muy diferente. En Francia, la ocupación provoca una serie de remodelaciones de los aparatos estadísticos en las que hay poco espacio para las encuestas de opinión, que quedan relegadas a un lugar secundario. La situación bélica impone en la zona ocupada otros medios más expeditivos de conocer el estado de la opinión. Los servicios de «control técnico» del Secretariado de Estado para la Guerra, elaboran informes sobre el estado de ánimo de los franceses, mediante la apertura masiva de correspondencia privada y las escuchas telefónicas, enviando después la información a los prefectos.[5] Las únicas encuestas de opinión durante este período fueron realizadas dentro del CEGOS, en alguna empresa de estudios de mercado o de forma clandestina por parte de la resistencia. Sin embargo, se reúnen datos económicos sanitarios y educativos mediante encuestas, en diferentes servicios estadísticos y demográficos, en el Service National des Statistiques y la Fondation Carrel. Se establece un servicio de sondeos en el SNS, pero la desconfianza hacia el papel de la opinión hace que tengan poca relevancia. Después de la liberación se reanudan las encuestas relacionadas con la opinión tanto de iniciativa pública como privada. Se crea el Institut National de la Statistique et des Études Économiques, que realizará encuestas desde 1946, introduciendo el muestreo aleatorio en 1948. Muchos sociólogos franceses viajan a EE.UU con becas Ford o Rockefeller para conocer las técnicas americanas[6].

En Alemania e Italia no se harán encuestas de opinión hasta después de la guerra, aunque tanto las autoridades nazis como las fascistas estuvieron interesadas en las nuevas técnicas. El interés de los regímenes totalitarios por la nueva técnica de la encuesta de opinión es contradictorio pero importante. En el régimen de Mussolini se siguen de cerca los sondeos de Gallup, tratando de conocer la predisposición de la opinión pública americana ante una eventual intervención en la guerra. Incluso se debate acerca de la posibilidad de realizar encuestas de opinión. Luzzato Fegiz, fundador del Instituto de Investigación Doxa, conoce de cerca la técnica de las encuestas y será un firme defensor de su aplicación, mientras que Corrado Gini está

---

[4] *Studies in Social Psychology in World War II,* Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1949.

[5] LABOIRE, P. (2001): *L'opinion française sous Vichy: Les français et la crise d´identité nationale, 1936-1944.* Éditions du Seuil, pág. 48.

[6] ARMATTE, M. (1996): Líntroduction des méthodes de sondage en France, Université Paris Dauphine, mai. (mimeografiado)

de acuerdo en la realización de los sondeos de opinión, pero siempre que no se publiquen los resultados, tal y como se hacía en la España franquista desde 1942. Por su parte, las autoridades nazis de la Universidad de Berlín habían enviado a Elizabett Noelle a EE.UU entre 1938 y 1940 para que conociera de cerca estas técnicas[7].

El inicio de las encuestas de opinión en la dictadura franquista

La dictadura militar de Franco emprenderá la realización de encuestas de opinión como un instrumento más en el aparato de propaganda política. La dictadura española crea en 1941 el Servicio Español de Auscultación de la Opinión Pública (SEAOP) y comienza a medir, de forma sistemática y regular, el estado de la opinión, el grado de información de la población y la penetración de la «propaganda subversiva» extranjera. Las encuestas llegan a España desde arriba, no se desarrollan en el mercado, y tampoco se establece contacto con las universidades o las fundaciones, se trata sólo de la utilización de una técnica de control social y de propaganda desde las instancias del partido único. Tanto el contenido de las encuestas, como la propia supervivencia del servicio de auscultación, estarán condicionados por la cambiante situación mundial y las consiguientes posturas adoptadas por la dictadura en cada momento, siempre orientadas a la supervivencia del régimen.

La ubicación del Servicio de Auscultación en la Delegación Nacional de Prensa, Vicesecretaría de Educación Popular, de la Secretaría General del Movimiento, confiere al servicio un papel muy concreto dentro de la propaganda del régimen. Los resultados de las encuestas no se publican en los medios de comunicación sino excepcionalmente. La información proporcionada por las encuestas era agrupada por temas y dirigida a las instancias políticas.

Las primeras y las últimas encuestas publicadas en esta etapa están directamente relacionadas con la guerra mundial. Las primeras encuestas de 1942-43 tratan sobre los medios de comunicación: prensa y radio. En el estudio de la radio se hace especial hincapié en las características de la audiencia y su grado de información internacional obtenido de emisoras extranjeras, preocupados por la mayor permeabilidad de este medio respecto a informaciones no controladas por el régimen. Casi al final de esta etapa, en 1945, realiza la inserción obligatoria en la prensa, de los resultados de una encuesta del Servicio de Auscultación sobre la neutralidad española en la II Guerra Mundial, cuyo objetivo era la «orientación» de la opinión[8].

---

[7] RIANURO, S. (2001): *Il sondaggio d'opinione arriva in Italia (1936-1946),* Passato e Presente, *Rivista di Storia contemporanea*, Fascicolo 53.

[8] SEVILLANO CALERO, F. (2000): *Ecos de Papel: la opinión de los españoles en la época de Franco*. Ed. Biblioteca Nueva, pág. 99.

La disciplina ejercida de forma sistemática desde la Sección de Información y Censura, encuadrada en la misma vicesecretaría que el Instituto de Opinión, es muy significativa. El vínculo del instituto español con los medios de comunicación es orgánico, muy diferente al del modelo americano que sirve de referente. El SEAOP, viene a complementar los trabajos que realiza el aparato de información del partido único. Los servicios de Información e Investigación de Falange Española recogen el pulso de la opinión, los rumores y las actitudes hacia el régimen de forma permanente. Los posicionamientos hacia los Aliados o el Eje, el descontento por la falta de abastecimiento de alimentos, las tensiones entre las familias políticas del franquismo, son objeto de informes y comunicaciones mensuales o quincenales. La información obtenida sirve para elaborar las consignas propagandísticas y por supuesto la represión política.

Las encuestas pretenden introducir los nuevos métodos americanos de metodología estadística en los estudios de opinión, pero en circunstancias muy diferentes, y que condicionarán el desarrollo posterior del estudio de la opinión en España.

En la *Gaceta de la Prensa Española* de 1945, aparecen bajo el título de «Labor de la Dirección General de Prensa» breves artículos que dan cuenta de las encuestas realizadas por el SEAOP y que son «aptas» para su publicación. También se publican notas explicativas acerca del propio Instituto y su cometido. Estas notas no están exentas de grotescos eufemismos sobre la democracia y la comunicación entre gobernantes y gobernados. En tono didáctico se introduce la nueva técnica de medición de la opinión con el relato de las predicciones electorales de Gallup en el año 36, y de cómo inmediatamente se crearon Institutos de Opinión en Inglaterra y Francia, para acabar refiriéndose al instituto español: «la traducción española de estas instituciones es el IOP creado en 1942 como organismo dependiente de la Delegación Nacional de Prensa de la Vicesecretaría de Educación Popular»[9].

Sin embargo, los parecidos son mínimos. En 1945 se habían realizado más de 100 exploraciones, pero sólo algunas se publicaron y de forma parcial. Las pocas referencias publicadas sobre las encuestas de este período se refieren a cuestiones ajenas a su contenido. Sin embargo, se describe el funcionamiento del Instituto y se hacen descripciones del cálculo matemático del tamaño de la muestra y la debida proporcionalidad entre la muestra y la población para ciertas variables de control, para conseguir la suficiente representatividad. Se emplea el Método de Cuotas y el cálculo de probabilidades sólo es utilizado en la determinación del tamaño muestral. Mucho menos detalladas son las referencias a los modelos de cuestionario empleados.

[9] Artículo sin firma en la sección: Labor de la Delegación Nacional de Prensa, «El Instituto de la Opinión Pública», *Gaceta de la Prensa Española*, n.º 34, 1945.

En cuanto a la pretendida analogía entre el instituto español y los americanos, se podrían encontrar algunas similitudes al comparar las encuestas españolas y las realizadas en el ejército americano mientras duró la guerra, aunque la gran distancia entre ambos proyectos las convierte en anecdóticas. Coincide el momento de la creación del SEAOP y la Research Branch en 1941, y el final de sus actividades al concluir la II Guerra Mundial. También la ubicación de ambas instituciones en sendos aparatos vinculados a la información, la educación, y la propaganda. En ambos casos se utilizan los medios de comunicación y sobre todo películas para tratar de influir en la opinión, como el NODO y la serie de películas «Why we fight». Los datos obtenidos quedan restringidos a las autoridades y las publicaciones son parciales o para destinatarios concretos. En ambos casos se manifiesta una sólida creencia en las posibilidades de control de la opinión y la conciencia de que además de la batalla en el terreno bélico, había que ganar otra en los medios de comunicación. Tanto el SEAOP como la Research Branch dejan de funcionar con el fin de la guerra.

La situación de aislamiento político internacional tras la guerra deja paso en los años cincuenta a una serie de lentas aperturas al exterior. En 1951, se crea de nuevo el Instituto de la Opinión Pública (IOP), pero sigue vinculado al sistema global de control de la prensa, encuadrado en la Dirección General de Prensa del Ministerio de Información. En el clima de la guerra fría, con el restablecimiento de relaciones con la comunidad internacional y la aceptación de la dictadura por su «valor anticomunista», es necesario dar una imagen de normalidad civil y la realización de consultas sobre la opinión pública contribuye a ese fin. En este período, el IOP establece contacto con ESOMAR y con algunos institutos americanos, se dota de una estructura administrativa, de una red de colaboradores-entrevistadores repartidos por el territorio nacional. Edita el boletín *Opinión*[10], donde hace reseña de sus actividades, del contacto con otros institutos extranjeros, y de manera muy somera, de alguna cuestión técnica. Inicia sus actividades realizando diversas encuestas sobre la reforma del bachillerato, el problema de la vivienda, los espectáculos y lugares de esparcimiento o el consumo, etcétera. Además, una vez al mes se hacía una «encuesta social» sobre temas generales y variados. En 1953, se inicia una amplia encuesta sobre las aspiraciones profesionales de los estudiantes universitarios y la función pública, en la que se entrevista a estudiantes de todas las facultades[11].

Las muestras siguen haciéndose por control de cuotas, si bien el empleo de muestreo por cuotas es el método imperante en las encuestas de opinión, no sólo en España, sino en otros países, hasta bien entrados los años cincuenta. Pero lo más característico de esta etapa del IOP reside en las fuertes contradicciones acerca del papel de la opinión pública en la dictadura.

[10] Boletín dirigido exclusivamente a los funcionarios del IOP.

[11] *Opinión*, Boletín del IOP, n.º 11, abril, 1953.

El concepto de opinión pública en la dictadura franquista

La opinión pública es consultada sistemáticamente, se mide continuamente el estado de la opinión, pero ¿qué es lo que se mide? ¿Qué entienden las autoridades franquistas por opinión pública? ¿Cómo se puede interpretar el interés por la investigación de la opinión pública en el contexto político dictatorial? ¿Qué papel se atribuye a las encuestas en la producción de la opinión?

Estas cuestiones pueden ser en parte contestadas por los discursos de los personajes relevantes del mundo de la prensa y la política. Las conferencias «Periodismo y opinión pública», pronunciadas por importantes cargos en el aparato de prensa de la dictadura, reunidos en los «Cursos de Verano de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo» en 1952, ofrecen una rica imagen de la idea de opinión que el régimen transmitía a los universitarios y los futuros periodistas[12].

La opinión pública aparece como algo peligroso, si no es controlada mediante la oportuna censura. En estos textos se descubre todo un imaginario acerca de la manipulación y fabricación de la opinión desde los órganos de prensa. De entre las cuatro conferencias más significativas, destaca por lo explícita, la del director general de prensa, Juan Aparicio, con una idea de opinión pública íntimamente asociada a la propaganda. En su conferencia «El diario y la revista, forjadores de la opinión pública de las masas», se refiere a la opinión pública como producto de exportación inglés, al igual que el constitucionalismo o el parlamentarismo. Para él, se trata de «opiniones masónicas» y no de opinión pública: «Rusia y la publicidad yanqui, es decir, los dos aparentes extremos del mundo, tienen y utilizan los instrumentos de la opinión pública, no sólo para conocerla, sino sobre todo para dirigirla. Pero en Rusia esto se hace sin ni siquiera salvar las apariencias».

Su postura asume claramente la manipulación, aunque parece valorar positivamente el hecho de salvar las apariencias. Insiste en las amplias posibilidades de control y fabricación de la opinión pública, «para lo que existen instrumentos técnicos», aunque garantiza que las intenciones del IOP quedan fuera de toda duda: «pero estamos en un estado cristiano y yo puedo aseguraros que jamás será utilizado el Instituto de la Opinión Pública para torcer el alma de los españoles».

Frente a la prensa «incontrolada» y la «dirigida», propone la prensa «orientada», como término medio entre la prensa libre y la prensa estatal. Pero esa «orientación» contrasta con la metáfora en el título de la conferencia sobre la «opinión forjada» en las masas, y sugiere una postura más activa que la mera orientación.

---

[12] Conferencias pronunciadas en el curso de verano de 1952 en la Universidad de Santander, sobre el tema general de Periodismo y Opinión Pública. *Opinión*, núm. 4 y 5, septiembre-octubre, 1952, Boletín del Instituto de la Opinión Pública, Ministerio de Información, Dirección General de Prensa.

Esta representación de manipulación general en el campo de la opinión pública, de la cual España es una excepción, será retomada por otros ponentes. El error o la perversión son siempre protagonizados por los extranjeros. Por una parte se asume la bondad de las técnicas de control social venidas de otros países y se aplican de forma intensiva, pero por otra parte se critica ese control, aunque parece que en España esté justificado, ya que se hace por una «causa justa».

El director general de información, Florentino Pérez Embid, adopta una postura más pasional respecto al «tufillo democrático de la opinión pública». En su intervención «Opinión pública, periodismo y política del libro», dice: «No es sólo que haya masas y eso sea malo, sino que hay un público municipal y espeso que quiere participar a todo trance sin estar preparado para ello, y hay que darle una estructura.» (....) «Es misión de la prensa ampliar los horizontes mentales de la sociedad».

La representación de la sociedad como masa informe e inculta que necesita ser dotada de una estructura y de constante tutela por parte de los depositarios de los valores esenciales, es otra constante. En este caso, desde una posición más paternalista que agresiva o temerosa ante las masas, justifica la censura como un mal menor: «puede haber errores en la censura, pero no son siempre permanentes, y aun así no justifican la inhibición. Pero hay que jugar limpio y más ahora, por la situación excepcional[13]. Hay que insistir en los temas y las crónicas de tipo constructivo, y que se vea que lo son, haciendo una labor positiva, estimulando, empujando el adelanto nacional».

Asume como algo necesario la manipulación que estructure y amplíe los horizontes mentales, pero por otra parte la situación la censura. El juego limpio sugiere una especie de autocensura que posibilite una apariencia más amable a la intervención.

Fernando Martín-Sánchez Juliá, presidente de la junta de gobierno de la Editorial Católica, en su intervención «El Estado y la opinión pública», asume también el eufemismo de la orientación: «Entre la opinión pública y la prensa se plantea la discusión de si ésta es servidora o creadora de aquélla. Los defensores de la tesis del servicio dicen que informar ya es "servicio informativo". Pero informar, aún no siendo tendencioso, es un gran medio de orientar».

Muy preocupado por el magisterio pontificio en esta cuestión, trae una cita del Papa Pío XI, de 1935, en la que habla del gran poder que ostentan los periodistas, ya que «fabrican» la opinión y son su causa. Continúa con Pío XII y las orientaciones de la Iglesia respecto a la labor informativa, pero el tono sube cuando trata el tema

[13] Parece referirse al final difícil del período autárquico y el restablecimiento de las relaciones con la comunidad internacional y en especial con los EE.UU.

de la censura, y apela al compromiso religioso: «... si los católicos creemos de verdad, es decir, con consecuencias para nuestra actuación pública, en que el alma vale más que el cuerpo, debemos tratar los peligros de la prensa con los mismos criterios que se evita la venta de estupefacientes o de alimentos en malas condiciones o de cianuro».

Un sentido muy radical del término «censura». La caución hacia los «peligros de la prensa» devuelve una imagen de la opinión libre, como representación del mal. Continúa hablando del control y la fabricación de la opinión: «Hay por último una razón práctica: nadie que posea o redacte un instrumento tan eficaz renuncia a emplearlo para formar opinión, y el que no lo haga por deber, lo hará cayendo en la tentación. La prensa crea la opinión; es obvio que el Estado faltaría a sus deberes de custodio y fomentador del bien común si no regulara la prensa».

Nos habla de un deber, pero que requiere de justificación moral. También de un instrumento tan eficaz que supone una tentación. Opone la manipulación desde el Estado, como un bien común, frente a la opinión libre de control, como subversión. Enfrenta implícitamente el uso por cumplimiento de un «deber» a los otros usos que puedan tentarnos. De nuevo un medio que requiere, desde la moral cristiana, la justificación del alto fin perseguido.

José María Escudero, letrado de las Cortes Españolas y subdirector del curso, habla sobre los «Límites de la libertad en las manifestaciones de la opinión pública»: «... tampoco puede el Estado abandonar por completo la formación de la opinión, porque entonces es seguro que otros la deformarán» (...) «el ¡abajo la censura! no tiene, pues, justificación. Tiene el Estado que defender dogmas de todo orden, y por mucha libertad que reconozca a la sociedad, siempre queda una zona indiscutida, zona que cuando las transgresiones pueden presumirse habituales, no cabe defender con sanciones *a posteriori*, como no se recoge el agua derramada en el suelo».

La imagen evocada por la necesaria formación de la opinión antes de que otros lo hagan condensa muchas ideas repetidas en los diversos discursos de los ponentes. Una acción positiva necesaria, un deber, la defensa dogmática de verdades incuestionables, y en el otro extremo una acción defensiva y algo paranoica ante los «otros», extranjeros, comunistas, masones. Es quizás el discurso más crudo y radical de todos, en defensa de la censura y la orientación necesaria de las masas, dejando constancia de la impronta castrense de la época, dar el primer golpe. Aboga por la censura preventiva ante la sospecha o la presunción. La visión de la opinión como algo fatal, cuyo descontrol es una pérdida irreversible, como la del agua derramada, se complementa con la de la educación popular: «... ni siquiera cabe decir que sin censura oficial habría plena libertad, porque en lugar de aquélla quedaría siempre una censura social, formada por los hábitos de pensar y de sentir de todo un pueblo, y con respecto a la cual, cuando es estrecha y cominera, la censura oficial puede desempeñar incluso una función de generosidad y ensanchamiento».

Se pone de manifiesto el mayor de los pesimismos acerca del pueblo, prisionero de su propia forma de pensar y que necesita ser redimido mediante una generosa educación popular. Hay dogmas que el Estado tiene que defender de la estrechez de todo un pueblo.

La censura apenas deja de ser asumida o defendida por todos, desde la visión del mal menor, hasta la «dirección generosa» que ensancha las mentes. Hay un caldo de cultivo favorable a la expresión abierta de estas cuestiones. La nueva Ley de Prensa en elaboración, propone un avance respecto al período anterior, el paso de una prensa dirigida a una prensa orientada, capaz de asumir la autocensura. En resumen, la inserción de estos discursos acerca de la opinión pública pretende destacar de forma gráfica, tanto el contexto político en el que se realizan las encuestas de opinión en los años cincuenta, como la personalidad de los protagonistas de su control. La función exclusivamente instrumental de los estudios de opinión dentro del aparato de control de la prensa hace que las innovaciones metodológicas y las preocupaciones sociológicas queden fuera del ámbito del Instituto de la Opinión Pública.

Otros actores en el ámbito de las encuestas

En el terreno de la metodología estadística, hay que destacar la labor del Instituto Nacional de Estadística. Creado en 1945, con la voluntad de incorporarse al gran desarrollo de las técnicas y metodologías que se produce en esa época. Con esa intención se realizan diversos cursos sobre muestreo o matemáticas y se elaboran numerosas publicaciones metodológicas de estadística[14]. En 1950 se lleva a cabo una explotación de los datos censales mediante muestreo aleatorio, siendo la primera muestra de este tipo que se realiza en España. Pero no se llevará a cabo una encuesta estadística hasta 1958.[15] Esta fecha supone un retraso respecto a los servicios estadísticos de otros países, considerando que la Oficina de Estadística de las Naciones Unidas desde la Subcomisión para el Muestreo Estadístico promueve el uso de la encuesta estadística y proporciona ayuda técnica a los países en vías de desarrollo en la producción de datos estadísticos indispensables para la planificación y el desarrollo económico y social, desde 1946[16].

---

[14] En el mismo año de la creación del INE, Olegario Fernández Baños publica en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, un *Tratado de Estadística,* que incluye una sección dedicada a la teoría y las técnicas muestrales.

[15] Primera encuesta de cuentas familiares, empleada para confeccionar los Índices del coste de la vida. Véase GARCÍA ÁLVAREZ, M. (1981): *Historia del Instituto Nacional de Estadística,* 1945-1981, INE, Madrid.

[16] DES RAJ (1980): *Teoría del Muestreo,* Fondo de Cultura Económico, México.

El primer ensayo de encuesta sociológica sobre la población estudiantil de Madrid se lleva a cabo en el curso 1947-48, por el Catedrático Manuel Fraga y el profesor Joaquín Tena Artigas, delegado del INE en el Ministerio de Educación. Esta primera encuesta ajena al ámbito del IOP es un experimento para un proyecto mayor que se realizará en 1950. Los trabajos de Tena Artigas se publican como una «sobrevisión por muestreo de la Universidad de Madrid» para el curso 1950-51 y utiliza una muestra aleatoria estratificada. Más tarde junto a Azorín publicará un estudio análogo sobre todas las universidades españolas[17].

En el campo de la sociología se producen los primeros intentos de acercamiento al entorno occidental, aunque de forma fragmentada y marginal, ya que la sociología es aún un espacio asociado a la subversión y es vista con recelo por parte de las autoridades políticas. En 1953 ya se estudian los métodos de encuesta en el Instituto de Estudios Políticos y, en el seminario organizado por José Bugeda, se trabaja con las escalas sociométricas empleadas en los EE.UU y se prueban adaptaciones de las escalas Warner para medir el estatus social en las familias españolas.[18] Desde mediados de los años cincuenta se realizan encuestas en el ámbito universitario, y aunque se trata de una actividad marginal y reducida al ámbito de los alumnos universitarios al principio, contribuye a proporcionar la experiencia necesaria para el posterior desarrollo de las encuestas y la sociología empírica en España.

El final de los años cincuenta está marcado por la práctica quiebra de la balanza de pagos y la remodelación política y económica de la dictadura. El llamado Plan de Estabilización inicia un modelo desarrollista y cede importantes parcelas de poder a tecnócratas no encuadrados en el partido único, alejando del poder a determinados sectores más conservadores, responsables en gran parte de la catastrófica gestión económica. Con el restablecimiento de las relaciones con EE.UU, y las importantes reformas económicas, las fronteras se hacen permeables y el régimen dictatorial debe adaptarse a las nuevas condiciones.

Con todo, en la Universidad de Madrid se llevan a cabo traducciones de los manuales de sociología americanos. En la universidad española comienza a haber interés por la sociología que se hace en otros países y algunos estudiantes viajan a los EE.UU o a Alemania. Salustiano del Campo viaja durante dos años a la Universidad de Chicago para especializarse en demografía y ecología humana, y en 1959 trabaja en las Naciones Unidas, en la Sección de Demografía del Departamento de Asuntos Sociales.[19] La memoria de cátedra que presenta en 1960 se publica

---

[17] TENA ARTIGAS, J. (1953): Sobrevisión por muestreo de la Universidad de Madrid, en Trabajos de Estadística, vol. IV, cuaderno 1; y TENA ARTIGAS, J., y AZORÍN, F. (1954): «Sobrevisión por muestreo en las universidades españolas», *Trabajos de Estadística*, vol. IV, cuaderno III.

[18] BUGEDA SANCHIZ, J. (1956): «Los instrumentos de investigación en las ciencias sociales», en *Revista de Estudios Políticos*, n.º 85, enero-febrero, págs. 137-162.

[19] GÓMEZ ARBOLEYA, E. (1958): «Sociología en España», *Revista de Estudios Políticos*, n.º 98, marzo-abril, pág. 77.

como la «sociología científica moderna», introduce la sociología empírica norteamericana. Otros universitarios le siguen pero sólo algunos interesados en la metodología de las encuestas. En 1961 viajan Amando de Miguel a la Universidad de Columbia y Juan Díez Nicolás a Michigan.

El último Instituto de Opinión franquista

En 1963 se crea nuevamente el Instituto de la Opinión Pública (IOP), dependiendo del Ministerio de Información y Turismo. El ministro Fraga Iribarne introduce cambios sustanciales en la nueva etapa del IOP, y pone al frente del Instituto a dos jóvenes sociólogos, González Seara, como director y Díez Nicolás como responsable del Departamento Técnico. El nuevo director del Instituto escribe acerca de la opinión en la presentación de la revista: «Incluso los sistemas más totalitarios se ven obligados a preocuparse muy seriamente por ella, si bien, en este caso, su preocupación suele orientarse en el sentido de buscar una propaganda hábil que forme la opinión pública que interesa al sistema. Ahora bien, aunque es obvio, debemos decir que nuestro punto de partida no tiene nada en común con esa situación que acabamos de mencionar»[20].

Como sociólogo, pretende contribuir al análisis científico de la sociedad y al perfeccionamiento de la concepción teórica de la opinión pública. Declara también la intención de crear un clima favorable para el desarrollo de la sociología política y de las ciencias sociales, reconociendo el retraso de esas disciplinas en nuestro país. Dada la importancia de la opinión pública y los medios de comunicación, ve la necesidad de acercarse al fenómeno científicamente, de modo que pueda servir de fundamento para la organización del sistema político.

El Instituto cambia de orientación y realiza menos encuestas que en las etapas anteriores, pero de mucha más calidad técnica, y con una orientación sociológica que contrasta con la de épocas anteriores, más centradas en la censura y el control de la prensa. Prácticamente se publican todas las encuestas realizadas entre 1965 y 1977 en la *Revista Española de la Opinión Pública* (REOP). Tan sólo dos encuestas dejan de publicarse. La primera es la que se realizó en el campo de Gibraltar con motivo del cierre de la frontera con El Peñón, y que a petición del ministro Castiella se mantuvo secreta, porque estimaba que su contenido «afectaba a la seguridad del Estado». La segunda encuesta no publicada sería la realizada con motivo de las elecciones municipales de Madrid en 1968, dado que los electores no conocían a los candidatos y los resultados de la encuesta no sólo carecían de valor,[21] sino que tenían mala explicación política.

[20] *Revista Española de la Opinión Pública*, n.º 0, abril, 1965, pág. 5.

[21] DÍEZ NICOLÁS J.(a): «Encuestas de opinión y decisión política», artículo de próxima publicación en la *REIS*, CIS.

Se empieza de nuevo sin referencias de las experiencias anteriores del IOP. El que fuera entonces director técnico del Instituto relata sobre ese inicio: «Todo había que montarlo sin posibilidad de apoyarse en precedentes, pues en aquel entonces las únicas encuestas (y pocas) eran las que hacían dos o tres empresas que hacían estudios de mercado. El entusiasmo que todos derrochábamos, sin embargo, permitió que en 1964 realizásemos nuestros primeros sondeos en Madrid y que en 1965 se llevase a cabo la primera encuesta nacional»[22].

Las primeras encuestas de esta etapa se limitan al municipio de Madrid, por razones técnicas y económicas, a la espera de conseguir los medios y la experiencia necesaria para realizar estudios a escala nacional. La muestra se elige aleatoriamente por áreas dividiendo la ciudad de Madrid en barrios y secciones electorales, se eligen el 5 % de las secciones en cada barrio y después una manzana de viviendas, posteriormente un edificio del que se conseguirán diez personas para ser entrevistadas. Se sigue este procedimiento de muestreo por ser «el que se emplea preferentemente en la mayoría de los centros de investigación social extranjeros» al haber probado su mayor representatividad respecto a otros tipos de muestreo cuando no se tienen estadísticas poblacionales actualizadas sobre la ciudad[23]. Los entrevistadores fueron reclutados entre los agentes censales del INE, y formaban un equipo bastante cualificado[24].

Se realizan encuestas sobre política internacional, actitudes religiosas, medios de comunicación de masas[25], etcétera, pero se evitan los temas de política nacional. Las pocas encuestas de contenido político de este período se refieren a las elecciones municipales de Madrid en noviembre de 1966[26], al referéndum sobre la Ley Orgánica del Estado en diciembre de 1966[27] y las elecciones a procuradores en Cortes por representación familiar en octubre de 1967[28]. No obstante, las encuestas periódicas, que bajo el título de «cuestiones de actualidad» se realizan desde 1968, contienen algún tipo de valoración política de la gestión del gobierno e incluso contienen preguntas sobre ideología y libertades políticas[29]. Esto supone un verdadero

---

[22] DÍEZ NICOLÁS, J.(b) (1976): «Los españoles y la opinión pública». Editora Nacional.

[23] *Revista Española de la Opinión Pública,* n.º 0, abril, 1965.

[24] DÍEZ NICOLÁS J.(a): Op. Cit.

[25] Véase *Revista Española de la Opinión Pública*, Índice General, 1965-1977, CIS, Madrid, 1978.

[26] REOP, n.º 7, págs. 285-386; REOP, n.º 8, págs. 58-62; REOP, n.º 39, págs. 330-343.

[27] REOP Nº 8, págs. 44-46, 50, 53-55; REOP, n.º 9, págs. 185-227; REOP, n.º 11, págs. 64-65, 76-78, 88-90; REOP, n.º 14, págs. 120-140, 143-149; REOP, n.º 37, págs. 8, 13.

[28] Encuesta sin publicar, pero de la que existen las tablas de datos en el Catálogo del Banco de Datos del CIS, con el n.º 1.033.

[29] La primera que contiene las preguntas sobre política es la de 1968, publicada en REOP, n.º 14, págs. 153-362; Estudios y Encuestas CIS, n.° 14, pero hay un antecedente de una encuesta de 1965, con el mismo título «Cuestiones de Actualidad», pero que no incluye aún preguntas de contenido político.

cambio respecto al anterior Instituto, aunque no significa que fuera aceptado con buen ánimo por todas las familias del franquismo. El reflejo que se hacía en las encuestas de los cambios habidos en la sociedad española no pareció bien a ciertos sectores de la Iglesia y del Gobierno, ni a los «poderes fácticos», que presionaron pidiendo el cese de los responsables de las encuestas, que el ministerio de Fraga nunca aceptó.[30] En cualquier caso, había preguntas que no se podían hacer por un doble motivo. En primer lugar, el gobierno no lo habría permitido, pero, por otra parte, los ciudadanos tampoco habrían contestado lo que realmente pensaban. Un encuestador haciendo preguntas por los domicilios era visto aún con recelo, no faltan las anécdotas relatadas por los protagonistas de las encuestas de la época sobre detenciones de encuestadores (incluidos los del IOP) por parte de las «fuerzas del orden», y esto siguió sucediendo hasta los primeros años setenta[31].

Desde el principio de esta etapa del IOP, se mantienen contactos con institutos extranjeros y en 1966 se realiza la primera colaboración internacional con otros cinco institutos europeos, en un estudio sobre la influencia en la toma de decisiones. En 1967 se lleva a cabo un ambicioso proyecto de la UNESCO, desde el Centro Europeo de Coordinación de la Documentación e Investigación de las Ciencias Sociales, con una encuesta sobre las imágenes del mundo en el año 2000, dirigida por Johan Galtung.

La generalización y popularización de las encuestas de opinión en España fueron tardías, y no llegó hasta la década de los años sesenta en parte debido a estos trabajos del IOP.[32] Díez Nicolás atribuye un importante papel al Instituto como elemento modernizador que contribuye al cambio político. De hecho, el IOP fue criticado por su labor desde el sector más duro y autoritario del gobierno, y Fraga, como ministro de Información y Turismo, tuvo que defender permanentemente su proyecto. Algunos le calificaron de «maldito» porque estaba poniendo en peligro la continuidad del régimen.

En palabras de Díez Nicolás: «Hacíamos lo que podíamos, para no poner en peligro el Instituto porque creíamos que era un elemento modernizador».

En cuanto a la infraestructura técnica con que contó el IOP para realizar las encuestas hay que destacar que en 1972 aún no se contaba con ordenadores adecuados para el tratamiento de datos de encuesta. Se seguían empleando ordenadores y programas diseñados para la gestión administrativa ministerial. Se tuvo que recurrir al tratamiento externo de los datos en empresas privadas[33].

[30] DÍEZ NICOLÁS J.(a): op. cit.

[31] LÓPEZ PINTOR, R. (1982): *La opinión pública española del franquismo a la democracia.* CIS, Madrid.

[32] DÍEZ NICOLÁS, J.(b): op. cit., pág. 13.

[33] Ante la inadecuación de los instrumentos informáticos para la realización de encuestas, se contratan los servicios de una empresa privada, ODEC, para el procesamiento de los datos. (Entrevista concedida por Ángel de Lucas en enero de 2003, sobre su participación como asesor técnico del IOP, bajo la dirección de Ramón Cercor, en los primeros años setenta).

Pero la publicación en la prensa diaria de encuestas de contenido político no se produce hasta los primeros años setenta. Estas encuestas son, sobre todo, encargadas por la prensa a empresas privadas de investigación, aunque también se difunden y se hace referencia a las realizadas por el IOP. La novedad no es bien recibida por el agonizante régimen, lo que lleva al gobierno a intentar poner en marcha un sistema de control de la realización y publicación de las encuestas, mediante un decreto de octubre de 1975, que será derogado sin que se llegue a desarrollar la normativa pertinente[34]. Hasta 1976 no se realizan en el IOP encuestas sobre la actualidad política nacional, que incluyeran temas como las declaraciones del presidente del gobierno, la reforma política, o imagen de líderes políticos[35]. Los gobiernos de Adolfo Suárez dispusieron de la información obtenida de las encuestas y las utilizaron en la toma de decisiones en un proceso que Díez Nicolás califica de auténtica «retroalimentación». Con las primeras elecciones democráticas y la práctica cotidiana de los sondeos de opinión concluye el proceso de recuperación del tiempo perdido, que lleva a la normalización en el uso de las encuestas de opinión.

La realización de encuestas de opinión durante el largo período de dictadura contradice la idea de Lazarsfeld acerca de un modelo universalmente aplicable con independencia del contexto político. Tanto las técnicas como su aplicación constituyen constructos y hechos sociales que difícilmente pueden ser considerados con independencia de su contexto. La aplicación concreta de los modelos abstractos de medición de la opinión en la dictadura nos invitan a la reflexión acerca del uso que se hace de las herramientas formales y de las consecuencias políticas de la divulgación de los resultados.

[34] LÓPEZ PINTOR, R. (1981): *La opinión pública española del franquismo a la democracia.* Centro de Investigaciones Sociológicas, pág. 189.

[35] Una primera tentativa de realizar un barómetro de opinión periódico que incluyera preguntas sobre la popularidad de los ministros fue realizada de modo experimental en 1972, pero los recelos despertados entre los ministros por los resultados obtenidos, hizo que se desistiera del proyecto. Entrevista con Ángel de Lucas, asesor técnico en el IOP en ese período.

CAPÍTULO 31

Las escalas de equivalencia. Concepto y medición

M.ª ROSARIO GONZÁLEZ RODRÍGUEZ
Universidad de Sevilla

Introducción

Las «escalas de equivalencia» que son introducidas para transformar hogares heterogéneos (que se diferencian en composición y tamaño) en unidades comparables, se van a distinguir en los siguientes aspectos:

1. En la definición del «bienestar» implícito en las mismas (bienestar material o inmaterial).
2. Las personas a las que se refiere tal concepto de bienestar. Determinadas escalas utilizan un concepto de bienestar referido a los adultos, o bien, a todos los miembros del hogar.
3. Y por último, en cómo el bienestar es derivado, ya sea a partir de la observación directa de los datos de gasto y/o ingreso proporcionados por las encuestas (enfoque objetivo en la obtención de las escalas), o de forma indirecta a través de dichas encuestas (enfoque subjetivo).

El concepto de escalas de equivalencia

La unidad básica de análisis en microeconomía es el individuo que toma decisiones. Así, en la Teoría de la Demanda el consumidor constituye una entidad económica representada por un individuo, que recibe satisfacción por el consumo de bienes, y que utiliza los recursos disponibles, sus ingresos, para la compra de dichos bienes buscando con ello maximizar la satisfacción recibida en el consumo. Ahora bien, la realidad es mucho más compleja de lo que nos ofrecen las abstracciones teóricas de la microeconomía. En la práctica las unidades de consumo suelen ser grupos de dos o más personas, constituyendo familias u hogares que toman decisiones de consumo colectivas en beneficio de sus miembros. La teoría, en cambio, tiene en consideración a un único individuo del hogar o familia, que puede coincidir con el sustentador principal, considerando la conducta de dicho individuo e ignorando los aspectos internos del hogar o familia a la que pertenece. De ello se deriva que no es inmediato que un modelo teórico que describa el comportamiento individual sea adecuado para describir el comportamiento de un grupo de personas. Por otra parte, si hablamos de hogar en lugar de individuo la evaluación en términos de bienestar cambia, pues puede que el hogar se encuentre en mejor situación aunque algunos de sus miembros vean su nivel de bienestar reducido. Destacamos pues, que aunque el individuo es la unidad económica básica de la Teoría de la Demanda y de la Economía del Bienestar, el hogar constituye el centro de atención en la mayoría de las «aplicaciones prácticas» y de la «política económica». Muchos son los trabajos empíricos que analizan el patrón de gasto del hogar ante la dificultad que supone cuantificar las cantidades consumidas por cada uno de sus miembros. Otras aplicaciones prefieren centrarse en la distribución del bienestar entre hogares más bien que en la distribución personal del bienestar, al ignorar esta última distribución que determinados miembros del hogar no perceptores de ingresos participan de los ingresos totales del mismo.

La sustitución del individuo por el hogar refleja que otros determinantes influyen en la elección de consumo, es decir, dos hogares que difieren en tamaño y composición, enfrentándose a los mismos precios y con el mismo nivel de ingreso no tendrían el mismo patrón de consumo. Del mismo modo, dos hogares que difieran en tamaño y composición necesitarían diferente nivel de ingreso para alcanzar el mismo nivel de bienestar. Con el objetivo de recoger los efectos que determinadas características del hogar tienen sobre el consumo y el bienestar surge el concepto de «escala de equivalencia». Existen varias razones por las que el tamaño y la composición del hogar afectan al comportamiento y al bienestar de los hogares, entre las que destacamos: *a*) el nivel de bienestar de un hogar decrecerá cuando aumente su tamaño y el ingreso total del hogar permanezca constante; *b*) hogares de mayor tamaño pueden beneficiarse de economías de escala en el consumo. De hecho, determinados bienes pueden consumirse conjuntamente por todos los miembros del hogar al mismo tiempo, nos referimos a la luz, calefacción, televisión, electrodomésticos, etcétera. Otros pueden consumirse por un miembro del hogar en un momento determinado, sin excluir por ello a otros miembros del hogar de su consumo en un momento distinto de tiempo, es el caso del teléfono, libros, etcétera; *c*) los miembros del hogar pueden tener diferentes «necesidades». La edad, el sexo, el tipo de trabajo de una persona, etcétera, determina de alguna forma sus necesidades. Así, hogares con el mismo tamaño e igual nivel de ingreso pueden diferir en patrón de consumo y nivel de bienestar dependiendo de estas circunstancias.

Las escalas de equivalencia aparecieron pues con el objetivo de convertir el hogar como unidad heterogénea, según su tamaño y composición, en unidades homogéneas o equivalentes de algún hogar tomado como referencia. Las escalas permiten así que los hogares fuesen comparables en términos, por ejemplo, de su nivel de bienestar. La «escala de equivalencia» más sencilla, sin lugar a dudas, es la escala «per capita». Ésta, tomando el hogar de referencia como aquél formado por una persona, permite expresar a todos los demás hogares como múltiplo del de referencia. No obstante, esta escala no está exenta de críticas dado que no tiene en cuenta la diferencia en necesidades de sus miembros, ni las «economías de escala» que pueden darse en el hogar. Ahora bien, la construcción de una escala de equivalencia adecuada es un tema ampliamente debatido en la literatura económica durante más de un siglo. Los factores a considerar, y que pueden incidir sustancialmente en las necesidades de los hogares pueden ser indefinidos: edad de los miembros del hogar, lugar de residencia (ámbito rural o urbano), etcétera, por lo que la construcción de una escala puede complicarse tanto como se desee. Aún así, fue y continúa siendo una práctica generalizada considerar la edad y el sexo de los miembros del hogar, de forma que se adjudiquen diferentes ponderaciones a individuos pertenecientes a diferentes grupos de edad y sexo. Así, el tamaño del hogar vendría definido por: $N_h = \sum_l \lambda_l n_{lh}$, donde n_{lh} es el número de individuos del tipo l (según categoría de edad y sexo) en el hogar h, y λ_l, la ponderación asignada a aquellos hogares del tipo l. En la práctica ha sido común normalizar λ_l, asignando un peso unitario a los hombres adultos. De ahí que a tales conjuntos de ponderaciones se las conozcan con el nombre de «escalas de adultos equivalentes». Así, el número de adultos equivalentes correspondientes a un hogar vendría dado por la suma de adultos equivalentes de sus miembros. Se pueden distinguir dos importantes funciones de las escalas de equivalencia:

1. Estandarización y comparación

En investigaciones empíricas, especialmente en lo que respecta a análisis de pobreza y desigualdad, las escalas de equivalencia actúan como verdaderos deflaccionadores, permitiendo que los datos de gastos e ingresos sean comparables entre los hogares. Actualmente, una de las escalas de equivalencia más empleadas para este tipo de investigaciones es la escala Oxford o de la OCDE que consiste en asignar el coeficiente 1 al sustentador principal, 0,7 a cada uno de los miembros adicionales adultos y 0,5 a cada uno de los miembros menores de 14 años. Esta escala ha sido muy criticada al no tener en cuenta las economías de escala que se producen a partir del segundo miembro. Las conclusiones que se puedan extraer sobre análisis de pobreza y desigualdad están muy condicionadas a la escala de equivalencia que se elija. De hecho, el empleo de una escala u otra dará lugar a distintas ordenaciones de los hogares en las correspondientes distribuciones de gastos e ingresos[1].

2. Compensación

En materia de política económica, la estimación empírica de las escalas de equivalencia han tenido un importante impacto en la determinación de subvenciones a las familias, y en las transferencias de la Seguridad Social de acuerdo con diferentes tipos de hogares. Este uso de las escalas de equivalencia presupone que el hogar debería ser compensado por su composición.

En España, al igual que en otros países de la Unión Europea, encontramos cómo las transferencias de ingreso por parte del gobierno se diferencian de acuerdo con la composición del hogar. Evidencia de ello puede encontrarse en determinados artículos del Real Decreto Legislativo 1/94 de 20 de junio, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley General de la Seguridad Social (BOE 29/06/94), y en artículos del Decreto 400/1990 BOJA (27/11/1990), y el Decreto 2/1999 BOJA (12/01/1999) por el que se regula el Programa de Solidaridad de los andaluces para la erradicación de la marginación y la desigualdad en Andalucía.

Las escalas y el concepto de «bienestar»

Las escalas de equivalencia han experimentado una importante evolución no sólo en cuanto a los métodos que se han utilizado para su construcción sino también en cuanto a la interpretación del concepto de bienestar implícito en las mismas. La interpretación del bienestar ha estado condicionada por dos escuelas de pensamiento: la «escuela utilitarista» y la «escuela ordinalista». Para la escuela utilitarista la utilidad se equiparaba al grado en que las necesidades materiales eran satisfechas siendo, por tanto, la utilidad objetivamente medible y comparable. La noción de utilidad de los ordinalistas estaba, sin embargo, más relacionada con la capacidad de satisfacer deseos de un individuo, y no con el grado en que los objetos permitían cubrir las necesidades materiales. La «utilidad» que los ordinalistas defendían no era observable, tenía carácter subjetivo y, por tanto, no podía compararse entre individuos.

La idea de «bienestar material» fue compartida por Engel en 1857 al admitir que la proporción del presupuesto dedicado a alimentos podría considerarse como un indicador indirecto del bienestar. De hecho, dicha proporción constituía un indicador inverso del bienestar. Esta afirmación se debió a la observación de Engel de dos

[1] MERCADER (1993): págs. 22-28.

regularidades empíricas[2]: la primera se correspondía al hecho de que los hogares más pobres dedicaban una fracción del presupuesto a alimentos mayor que la de los hogares más ricos, regularidad conocida como la Ley de Engel; la segunda se refería a que parte del presupuesto gastado en alimentos se incrementaba con el número de hijos.

Se admite que aquellas escalas de equivalencia que se han definido como el ratio de ingresos y_h/y_r (siendo *h* un hogar cualquiera y *r* aquél que se toma como referencia) de dos hogares que dedican la misma fracción del presupuesto a alimentos, utilizan el método de Engel en la construcción de escalas de equivalencia.

La idea del bienestar material estaba también presente en las primeras investigaciones sobre pobreza. En dichas investigaciones, las escalas de equivalencia estaban basadas en una estimación de las «necesidades básicas», usualmente definidas como alimentación, vivienda y vestido, en base al «juicio de los expertos». El término «necesidades básicas» tenía la misma connotación que el de «necesidades materiales» utilizado por la escuela del bienestar material o utilitarista, ya que el cálculo del gasto en alimentación estaba basado en una estimación de las calorías necesarias para proporcionar el consiguiente «rendimiento físico». Destacamos en este sentido, el estudio de pobreza realizado por Rowntree en la ciudad de York en 1899 en el que obtuvo una escala de equivalencia basada en las necesidades nutritivas, más un gasto mínimo necesario estimado para alquiler, vestido, y diversos gastos domésticos[3].

En 1921, Sydenstricker y King sugirieron determinar el nivel de bienestar de un hogar, no en base a aquello que los hogares deberían gastar para satisfacer sus necesidades de acuerdo con la opinión de los expertos, sino de acuerdo con el «patrón de gasto» de los mismos. Sydenstricker y King defendían que el concepto de nivel bienestar empleado por Engel y Rowntree necesitaba una reconsideración. De acuerdo con esta visión, las escalas de equivalencia no deberían reflejar sólo la opinión de los expertos sobre diferencias fisiológicas, sino también la evaluación por parte del hogar de sus necesidades, y los juicios del hogar acerca de cómo satisfacer estas «necesidades reveladas» por el patrón de gasto. El enfoque de Sydenstricker y King (1921) fue retomado por Prais y Houthakker en los años cincuenta. Prais y Houthaker compartían la noción de bienestar material utilizando un enfoque más basado en el «comportamiento» del hogar, y no tanto en las prescripciones de los expertos para estimar las escalas de equivalencia.

Nelson[4] subraya que la idea del bienestar material y el uso de la información proporcionada por los expertos en nutrición ha permanecido después de la revolu-

[2] DEATON, A. y MUELLBAUER, J. (1980): pág. 193.

[3] ATKINSON, A. B. (1981): págs. 62-63.

[4] NELSON (1993): pág. 488.

ción ordinalista, sobre todo en aquellas investigaciones referentes a la medición del bienestar en países en desarrollo. Además, se puede destacar que esta idea de bienestar material está también presente en los cálculos que sobre la línea de pobreza se realiza en los Estados Unidos al basarse en los requisitos alimenticios[5].

En 1943, Rothbarth favoreció un cambio en el significado que hasta entonces se había venido dando al «nivel de vida» o «bienestar» del hogar. Hasta entonces, el significado de bienestar del hogar incorporado en el cálculo de la escala de equivalencia se refería a bienestar de todos los miembros, mientras que para Rothbarth el bienestar de un hogar se identificaba con el «bienestar de los padres».

Hacia los años cincuenta y sesenta tuvo lugar un cambio de enfoque en la Teoría de la Demanda, prestándose menos atención a la estimación de la demanda de una sola mercancía y curvas de Engel, y dirigiéndose la atención hacia la estimación de un sistema completo de demanda. Estos sistemas completos de demanda parten de la proposición de que la demanda del consumidor de cualquier mercancía es determinada por el ingreso y el precio de todas las mercancías. Barten en 1964 fue el primero que derivó las implicaciones que la composición del hogar tenía en las funciones de demanda. De acuerdo con Barten, la función de bienestar del hogar adoptaría la siguiente expresión:

$$U = U\left(\frac{q_1}{m_1(a^h)}; \frac{q_2}{m_2(a^h)}; \cdots; \frac{q_n}{m_n(a^h)}\right)$$

donde q_i son las cantidades consumidas de los distintos bienes, y m_i, son los deflacionadores de los bienes específicos. Estos deflacionadores dependen sólo de las variables demográficas, tales como el tamaño y la composición del hogar, siendo independientes de variables económicas como el ingreso y el precio. Barten, cuyo principal interés estuvo relacionado con el análisis de la demanda, concretamente en la estimación elasticidades precio y no en la determinación de escalas de equivalencia, hacía referencia a la función $U(.)$ como función de utilidad del hogar, sin especificar si esta función se refería al bienestar de los padres, hijos o a un concepto de bienestar medio. Deaton y Muellbauer (1986) interpretaban esta función de utilidad como la función de utilidad de los padres derivada del consumo de sus propios bienes.

Muellbauer (1974) explotó la idea de Barten para la interpretación y estimación de las escalas de equivalencia, utilizando el marco general que proporcionaba la Teoría de los Números Índices. Asumiendo que las preferencias del hogar podrían representarse por medio de una función de utilidad, tal y como proponía Barten, la escala de equivalencia podría construirse como un verdadero índice de coste de la vida que

[5] CITRO, C. y MICHEL, R. (1995): pág. 24 y siguientes.

relaciona el coste de vivir en un hogar con características específicas a_h respecto de aquél que se toma como referencia con características, digamos, a_r[6].

Muellbauer, y posteriormente Jorgenson y Slenisck (1987), reconocieron que la definición de tal escala asumía un supuesto fuerte en el marco de la Teoría Ordinal de la Utilidad al exigir comparaciones interpersonales de bienestar, un supuesto que es adoptado con toda generalidad en aquellas aplicaciones empíricas que basan el bienestar en los patrones de gasto. Pollak y Wales (1979, 1991) advirtieron que de la observación del comportamiento de un hogar con características demográficas específicas en relación a la demanda, se pueden deducir las preferencias condicionadas (esto es, sus preferencias sobre un conjunto de bienes condicionadas a su composición)[7] pero no sus preferencias no condicionadas (esto es, sus preferencias en un conjunto de bienes y composición demográfica).

En resumen, Pollak y Walles y otros como Fisher (1987), admitían que la verdadera escala de equivalencia debería basarse en una función de utilidad descrita por U^* que capturase un concepto de bienestar más amplio que el que recoge la función U. Según defiende Fisher[8], la función directa de utilidad U falla en que no captura el efecto directo que sobre el bienestar tienen determinados atributos de la familia como el tamaño. Consideran que del comportamiento del consumidor observado a partir de los datos, se podrían derivar curvas de indiferencia que reflejasen las preferencias de dicho consumidor, y de esta forma, podrían obtenerse escalas de equivalencia a partir de U pero no de U^*. No obstante, según Pollak y Walles[9], estas escalas así obtenidas no atienden a la cuestión de comparación en términos de bienestar tal y como ellos entienden el concepto. Sólo en el caso en que los efectos de otras características sobre la función U^* pudieran observarse, podrían estimarse las escalas de equivalencia.

Se puede advertir, por tanto, una nueva dirección en cuanto al término bienestar, repercutiendo así en la definición e interpretación de las escalas de equivalencia. Así, mientras que en la mayor parte de la literatura sobre las escalas de equivalencia, y en la mayoría de las aplicaciones políticas puede advertirse que el concepto de bienestar está ligado al de «bienestar material», el concepto de bienestar que aparece en los argumentos de Pollak y Wales (1979, 1991) y Fisher (1987) está

---

6 La escala vendría, entonces dada por:

$$m^h = \frac{c(u,\ p;\ a^h)}{c(u,\ p;\ a^r)}$$

7 Es decir, lo que se conoce es la función de utilidad $U = U(q_1, q_2, ..., q_n; a)$ siendo a las características demográficas del hogar.

8 FISHER, F. (1987): pág. 522.

9 POLLAK, R. y WALLES, T. (1991): pág. 46.

más relacionado con la idea de «felicidad» presentándose, por tanto, como un concepto subjetivo.

Deaton, Muellbauer (1986) y Gronau (1988), compartieron la crítica de Pollak y Walles (1979) respecto a la naturaleza restrictiva de la definición de bienestar, implícita en la estimación de las escalas de equivalencia en el marco general de la Teoría de los Números Índices. Definición, que como ya hemos comentado, ignoraba el efecto directo que sobre el bienestar tenían determinadas características demográficas del hogar (como es el caso de los hijos). Deaton, Muellbauer y Gronau defendieron que el uso más perverso que se puede hacer de las escalas de equivalencia obtenidas en el marco de la Teoría de Números Índices para hacer comparaciones de bienestar, se debe a lo restringido del concepto de bienestar utilizado, ya que esté basado en el bienestar que los padres deriva de su propio consumo ignora el bienestar que se deriva de tener hijos. Gronau (1988) concluye exponiendo que la escala de equivalencia condicionada debido al concepto restringido de bienestar que incorpora, no sólo no es adecuada para realizar comparaciones de bienestar sino que tampoco serviría de base para cualquier esquema de compensación, dado que compensaría de más a los padres que han decidido tener hijos al ignorar la utilidad que derivan de sus propios hijos. En relación al problema de comparabilidad interpersonal de la utilidad, se puede afirmar que mientras que los economistas proceden asumiendo que la comparación interpersonal de la utilidad es necesaria para el cálculo de la escala de equivalencia, lo que realmente es difícil es conocer qué concepto de bienestar es medido por esta escala.

Por otra parte, un grupo de investigadores también llamados Escuela de Leyden basaron las comparaciones de bienestar entre hogares en otro tipo de información distinta a los datos de gasto. El punto de partida de este método se basaba en que el ingreso actual de un hogar es evaluado por un miembro de la familia, que normalmente suele ser sustentador principal, contestando a la Pregunta de Evaluación del Ingreso (IEQ, Income Evaluation Question)[10]. En el enfoque de Leyden se asume que aquellos individuos que pertenecían a una misma comunidad de lenguaje concedían el mismo significado, en términos de bienestar, a los calificativos verbales, «bueno», «malo», etcétera. Los economistas de la Escuela de Leyden proponían utilizar la información sobre cómo valoran los encuestados otros niveles de ingreso dados como respuesta para derivar las escalas de equivalencia. El concepto de bienestar implícito en el cálculo de la escala de equivalencia se basaba en la opinión que un miembro del hogar tenía acerca del ingreso de dicho hogar. Este concepto de bienestar como derivado del ingreso es denominado por este grupo de investigadores como «concepto estrecho de bienestar», reconociendo que no cubría un concepto más amplio de bienestar.

[10] VAN PRAAG, B. M. S. (1971).

Escalas de equivalencia: métodos de medición

Aunque si bien es cierto existe un acuerdo generalizado sobre el hecho de que, diferentes tipos de familias le corresponden distintos umbrales de pobreza, que familias con distinto tamaño y composición tienen diferentes necesidades, y que familias de mayor tamaño pueden beneficiarse de economías de escala en el consumo, no existe un acuerdo sobre la forma de medir tales diferencias en necesidades. En este sentido, puede apreciarse en la literatura distintos enfoques a la hora de determinar las escalas de equivalencia. En esta sección consideramos dos enfoques:

1. Un primer enfoque que se basa en el «comportamiento del hogar» para determinar las escalas. En dicho enfoque distinguimos:
   a) Aquellas escalas basadas en los «patrones de gasto» del hogar, también denominadas escalas econométricas.
   b) Las escalas subjetivas.
2. Un enfoque alternativo, el «enfoque paramétrico». A través de dicho enfoque, la escala depende de un parámetro que refleja las economías de escala que tienen lugar en familias de distinto tamaño.

Escalas basadas en los patrones de gasto

Las escalas de equivalencia determinadas según este enfoque se enmarcan dentro de la Teoría de los Números Índices. Dichas escalas tratan de responder a la pregunta: ¿cuál debería ser la compensación en términos monetarios que se le debería conceder a un hogar, h, formado por tres miembros, para que alcanzase el mismo nivel de bienestar, u^R, que el de un hogar de referencia, R, formado por un solo miembro en un determinado período?[11] Para responder a la pregunta sería necesario comparar el coste que le supone a ambos hogares alcanzar dicho nivel de bienestar, u^R, obteniéndose así la expresión:

$$m^h = \frac{c(u^R, p^R; a^h)}{c(u^R, p^R; a^R)} \qquad (1)$$

que no es más que el valor de la escala de equivalencia para un hogar h formado por tres miembros respecto de aquella familia R tomada como referencia.

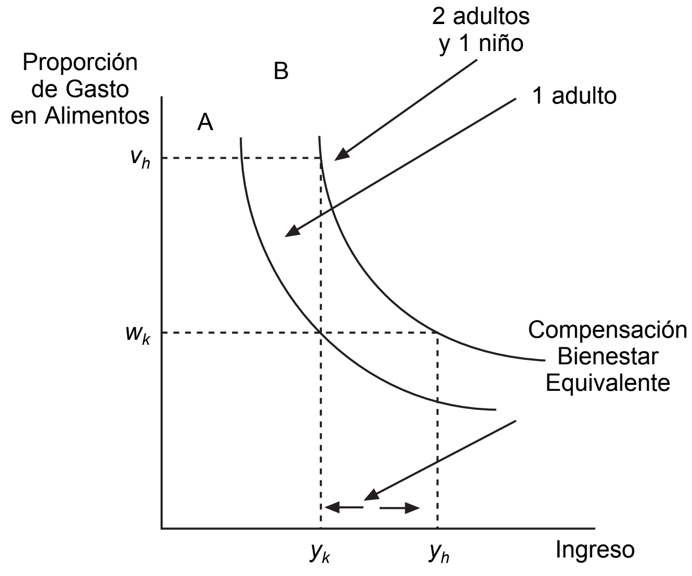
Los métodos que se encuadran dentro de este enfoque son modificaciones de las versiones de Engel, Prais and Houthaker y Rothbarth. Con carácter ilustrativo atendemos a la Figura 1 que muestra el Método de Engel en la construcción de las escalas de equivalencia. La curva A representa al hogar formado por dos adultos y la B

[11] Puesto que nos referimos al mismo instante de tiempo, ambos hogares se enfrentan a los mismos precios.

al hogar formado por dos adultos y un niño. En la situación inicial, la familia A se caracteriza por tener un nivel de ingreso y_k y una proporción del presupuesto gastado en alimentos w_k. Esa participación en el presupuesto asciende a *wh* ante la llegada de un hijo. De acuerdo con Engel, para que la familia tuviera el mismo nivel de bienestar que al principio, la proporción del gasto en alimentos tendría que volver al nivel inicial w_k. Sin embargo, para que ello ocurra, el nivel de ingreso tendría que haber ascendido a y_h, es decir, el hogar tendría que haber recibido una compensación equivalente a y_h-y_k. De esta forma, la escala de equivalencia para un hogar formado por dos adultos y un niño, respecto de aquél formado por dos adultos vendría dado por el ratio y_h/y_k.

Figura 3.1

El Método de Engel para las escalas de equivalencia.



Desde un punto de vista empírico, se han sugerido en la literatura distintas especificaciones para la proporción del gasto dedicado a alimentación. No obstante, la especificación más utilizada es la de Working-Leser's (Linear Function of Logarithmic Expenditure), cuya expresión vendría dada por 4:

$$\widehat{w}_f^h = \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} \ln y^h \qquad (2)$$

donde y^h es el total de gasto del hogar *h, h* = 1, 2, ..., *n*. Y $\widehat{w}_f^h$ la proporción de gasto en alimentación.

Escalas subjetivas

Las escalas subjetivas se obtienen de preguntar a las personas qué niveles de ingreso creen que se corresponden a diferentes niveles de bienestar. De la relación existente entre las respuestas que ofrecen y su composición se determinan dichas escalas. El enfoque subjetivo más conocido es el enfoque de Leyden, y en el que se distinguen dos versiones:

1. El *enfoque cardinal.* Dicho enfoque asume comparabilidad de los niveles de bienestar entre los hogares, así como la medición cardinal del bienestar al aceptar una forma funcional específica para la función de bienestar individual, la función de distribución log-normal Λ.

$$U(y_h) = L(y_h; \mu_h, \sigma_h) = N(\ln(y_h); \mu_h, \sigma_h) \qquad (3)$$

   Los parámetros m_h y s_h que caracterizan la función de bienestar individual del hogar *h* pueden ser estimados a partir de los ingresos que se hubieran ofrecido como respuesta en la cuestión de evaluación del ingreso. En Van Praga (1971) y Van Praag y Kapteyn (1973) se encontró, a través de la evidencia empírica, que *m* dependía del ingreso actual, mientras que no se observó relación alguna para σ. Así, para una población heterogénea en cuanto a tamaño, se encontró la siguiente relación para μ:

$$\mu_h = \beta_0 + \beta_1 \ln y_{ch} + \beta_2\, y_{s_h} + \varepsilon_h \qquad (4)$$

   siendo y_{ch} el ingreso actual del hogar *h*, f_{s_h} el tamaño del hogar *h*, y ε_h los errores normalmente distribuidos. Estimando los parámetros de la regresión anterior, la escala de equivalencia de acuerdo con el enfoque cardinal vendría dada por la siguiente expresión:

$$\frac{y_1}{y_0} = \left(\frac{f_{s_1}}{f_{s_0}}\right)^{\frac{\hat{\beta}_1}{1-\hat{\beta}_2}} \qquad (5)$$

   Como se puede observar, dicha escala no depende del nivel de bienestar. Se aprecia que las escalas así obtenidas evitan la complejidad de las escalas de equivalencia que se derivan de un sistema completo de demanda.

2. El *enfoque ordinal* asume comparabilidad interpersonal de los niveles de bienestar pero no admite ninguna función cardinal de utilidad. Este enfoque alternativo expuesto por Van Praag y Van der Sar (1988), que tuvo su motivación en respuesta a las críticas que recibieron acerca del supuesto cardinalidad de la función de la bienestar, constituye un método simple para estimar las funciones de coste y las escalas de equivalencia. La forma de proceder en la obtención de las escalas que está recogida en Van Praag y Van der Sar (1988) y Plug y Van Praag (1995) es como sigue:

Denotando por $\{y_{ih}\}_{i=1}^{6}$, los seis niveles de ingreso que han sido seleccionados como respuesta por el hogar h, se pueden estimar las siguientes seis ecuaciones de regresión[12]:

$$\ln y_{ih} = \beta_{0i} + \beta_{1i} \ln f_{s_h} + \beta_{2i} \ln y_{ch} + \varepsilon_{ih} \qquad (6)$$

Ecuaciones que describirían la percepción del hogar sobre cuál sería el ingreso necesario para atender un determinado nivel de bienestar, i, en función de su composición familiar dada por f_s y su ingreso actual. La escala de equivalencia de acuerdo con este método vendría dada por:

$$m(i, f_s) = \frac{y_i^*(f_s)}{y_i^*(f_{s_r})} = \left(\frac{f_s}{f_{s_r}}\right)^{\frac{\hat{\beta}_{1i}}{1-\hat{\beta}_{2i}}} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 6 \qquad (7)$$

donde $y_i^*(f_{s_r})$ sería el ingreso necesario para alcanzar el nivel de bienestar i, de un hogar que se toma como referencia.

Escalas paramétricas

Ante la enorme literatura sobre escalas de equivalencia y ante la creencia de que ningún método proporcionaría una escala totalmente defendible, se han propuesto unas escalas que dependen de uno o varios parámetros que recogen las economías de escala que se producen dentro del hogar, y que permitirían resumir las escalas legales, econométricas, subjetivas y pragmáticas, a través de un rango de valores de dichos parámetros. Muchos son también los investigadores que han trabajado en esta línea como Buhman *et al.* 1988, Coutler *et al.* 1992, Ruggles 1990, Citro y Robert 1995, etcétera.

Coutler, Cowells y Jenkins (1992) propusieron una nueva solución para ajustar los ingresos de los hogares a sus necesidades potenciales. La escala recomendada por Coutler, Cowell y Jenkins ha sido ampliamente utilizada por la literatura reciente y consiste en considerar que las familias difieren sólo en el número de miembros del hogar lo que permite que la escala dependa de un solo parámetro:

$$M_s = M(s, \theta) \qquad (8)$$

La escala es una función del tamaño del hogar, s, definido exclusivamente por el número de miembros del hogar[13] que es conocido, y por un parámetro $\theta \geq 0$. La función M_s es creciente en θ y s; además se admite que el hogar de referencia es

[12] No existe una justificación teórica acerca de la elección del doble logaritmo, sólo una fuerte evidencia empírica. (VAN PRAAG y VAN DER SAR (1988): pág. 20)

[13] Los hogares se distinguen por su tamaño, s el número de personas en el hogar, donde $s = 1, 2, ..., n$ y definimos ps como la proporción de la población del grupo $s \left(\sum_{i=1}^{n} p_s = 1\right)$.

aquél formado por una sola persona, $M_1 = 1$. Bajo el supuesto de que los hogares de mayor tamaño tendrían unas necesidades mayores que aquéllos de menor tamaño, el parámetro θ capturaría estas diferencias en necesidades.

El ingreso equivalente para un hogar h de tamaño s vendría dado por el cociente entre el ingreso no ajustado x_h y la escala de equivalencia:

$$y_h^{[\theta]} = \frac{x_h}{M_{s_h}} \qquad (9)$$

Un caso particular de (8) fue propuesto por Buhman *et al.* (1988):

$$M_s = s^{\theta} \qquad (10)$$

definiéndose, por tanto, el ingreso equivalente de acuerdo con (11):

$$y_h^{[\theta]} = \frac{x_h}{s_h^{\theta}} \qquad (11)$$

La Ecuación 10 permite una interpretación de las escalas de equivalencia en términos de economías de escala de los hogares en función de su tamaño, apreciándose los siguiente casos:

1. *Inexistencia de economías de escala.* En este caso θ =1, es decir, las necesidades se duplicarían al duplicarse el número de miembros. Bajo este supuesto, el ingreso equivalente coincidiría con el ingreso per capita $y_h^{[1]} = \frac{x_h}{s_h}$.
2. *Economías de escala infinitas,* θ = 0. Las necesidades permanecerían invariantes al modificarse el tamaño del hogar. En este caso, el ingreso equivalente coincidiría con el ingreso del hogar $y_h^{[0]} = x_h$.
3. *Economías de escala variables,* $\theta \in (0, 1)$. Las necesidades crecerían con el tamaño del hogar pero menos que proporcionalmente.

BIBLIOGRAFÍA

ATKINSON, A. B. (1981): *La economía de la desigualdad.* Ed. Crítica, Barcelona.

ATKINSON, A. B. (1991): «Measuring Poverty and Differences in Family Composition». *Económica*, 59, págs. 1-16.

BANKS, J., BLUNDELL, R. y PRESTON, I. (1991): «Adult Equivalence Scales: a Life-Cycle Perspective». *Fiscal Studies,* 12, págs. 16-29.

BLUNDELL, R. y LEWBEL, A. (1991): «The Information Content of Equivalence Scales». *Journal of Econometrics,* 50, págs. 49-68.

BOJER, H. (1977): «The Effect on Consumption of Household Size and Composition». *European Economic Review,* 9, págs. 169-193.

BUHMAN, B., RAINWATER, L., SCHAMAUS, G. y SMEEDING, T. (1988): «Equivalence Scales, Well-being, Inequality and Poverty: Sensitivity Estimates Across Ten Countries Using the Luxemburg Income Sutudy (LIS) Database». *Review of Income and Wealth,* 34(2), págs. 115-142.

CITRO, C. y MICHEL, R. (1995): «*Measuring Poverty. A New Approach».* National Academy Press, Washington D.C.

COOTER, R. y RAPPOPORT, P. (1984): «Were the Ordinalist Wrong about Welfare Economics?» *Journal of Economic Literature,* XXII, págs. 507-530.

COUTLER, F., COWELL, F. y JENKINS, S. (1991): «Differences in Need and Assesment of Income Distributions». *Bulletin of Economic Research*, págs. 77-124.

COUTLER, F., COWELL, F. y JENKINS, S. (1991): «Equivalence Scale Relativities and the Extent of Inequality and Poverty». *The Economic Journal,* 102, págs. 1.067-1.082.

CRAMER, J. (1973): «Econometría empírica». *Fondo de Cultura Económica,* México.

DEATON, A. y MUELLBAUER, J. (1980): «Economics and Consumer Behaviour». *Cambridge University Press,* Cambridge.

DEATON, A., RUIZ CASTILLO, J. y DUNCAN, T. (1989): «The Influence of Household Composition on Household Expenditures Patterns: Theory and Spanish Evidence». *Journal of Political Economy,* 97(1), págs. 179-200.

FISHER, F. (1987): «Household Equivalence Scales and Interpersonal Comparisons». *Review of Economic Studies,* (54), págs. 519-524.

GOEDHART, T., HALBERSTADT, V., KAPTEYN, A. y VAN PRAAG, B. M. (1977): «The Poverty Line: Concept and Measurement». *The Journal of Human Resources,* 12, págs. 503-520.

GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, M. R. (2001): *Aspectos conceptuales y metodológicos de la pobreza. Las prestaciones sociales y el perfil de la pobreza.* Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

GRONAU, T. (1988): «Consumption Technology and Intrafamily Distribution of Resources: Adult Equivalence Scales Reexamined». *Journal of Political Economy,* 96, págs. 1.183-1.205.

HENDERSON, A. (1949): «The Cost of a Family». *Review of Economic Studies,* 17, págs. 127-148.

JENKINS, S. y COWELL, F. (1994): «Parametric Equivalence Scales and Scale Relativities». *Economic Journal,* 104, págs. 891-900.

JOGERSON, D. y SLESNISCK, D. (1987): «Aggregate Consumer Behaviour and Household Equivalence Scales». *Journal of Business and Economic Statistics,* 5(2), págs. 219-232.

KAPTEYN, A. y VAN PRAAG, B. M. (1976): «A new Approach to the Construction of Family Equivalence Scales». *European Economic Review* (7), págs. 313-335.

KAPTEYN, A., KOOREMAN, P. y WILLEMSE, R. (1988): «Some Methodological Issue in the Implementation of Subjective Poverty Definitions». *Journal of Human Resources,* 23(29), págs. 222-242.

KAPTEYN, A. (1994): «The Measurement of Household Cost Functions. Revealed Preferences Versus Subjective Measures». *Journal of Population Economics,* (7), págs. 333-350.

LAZEAR, E. y MICHEL, R. (1980): «Family Size and the Distribution of Real per capita Income». *The American Economic Review,* 70(1), págs. 91-107.

LEWBEL, A. (1986): «Additive Separability and Equivalence Scales». *Econométrica*, 54(1), págs. 219-222.

_________, (1989): «Household Equivalence Scales and Welfare Comparisons». *Journal of Public Economics,* 39, págs. 377-391.

_________, (1991): «Cost of Characteristics Indices and Household Equivalence Scales». *European Economic Review,* 35, págs. 1.277-1.293.

MERCADER, M. (1993): «The Low Income Population in Spain in Comparison with France and the UK. Evidence from the Household Expenditure Surveys». *The Welfare State Program, WSP/95.*

MUELLBAUER, J. (1974): «Household Composition, Engel Curves and Welfare Comparisons Between Households». *European Economic Review,* 5, págs. 103-122.

____________, (1980): «The Estimation of the Prais-Houthaker Model of Equivalence Scales». *Econométrica*, 48(1), págs. 153-176.

NELSON, J. (1988): «Household Economies of Scale in Consumption: Theory and Evidence». *Econométrica*, 56(6), págs. 1.301-1.314.

_________, (1992): «Methods of Estimating Household Equivalence Scales: an Empirical Investigation». *Review of Income and Wealth,* 38(3), págs. 295-310.

_________, (1993): «Household Equivalence Scales: a Theory Versus Policy?» *Journal of Labor Economics,* 11(3), págs. 471-493.

PLUG, E. y VAN PRAAG, B. M. (1995): «Family Equivalence Scales within a Narrow Welfare Context». *Journal of Income Distribution,* (482), págs. 171-186.

POLLAK, R. y WALES, T. (1979): «Welfare Comparisons and Equivalence Scales». American *Economic Review,* 68, págs. 216-221.

POLLAK, R. (1991): «Welfare Comparisons and Situations Comparisons». *Journal of Econometrics,* (50), págs. 31-48.

PRAIS, S. (1953): «The Estimation of Equivalent Adult Scales from Family Budgets». *Economic Journal,* pág. 63.

RAO, V. (1981): «Measurement of Deprivation and Poverty based on the Proportion Spent on Food». *World Development,* 4(9).

RENWICK, T. y BERGMANN, B. (1992): «A Budget based Definition of Poverty with an Application to Single Parent Families». *Journal of Human Resources,* págs. 1-23.

SENECA, J. y TAUSSIG, M. (1971): «Family Equivalence Scales and Personal Income Tax Exemptions for Children». *Review of Econocmics and Statistics,* (53), págs. 253-262.

SINGH, B. y NAGAR, A. (1973): «Determination of Consumer Unit Scales». *Econométrica*, 41(2), págs. 347-355.

SRINIVISAN, T. N. y POVERTY (1977): «Same Measurement Problems». *World Bank Reprint Seires, 77*.

STIEGLER, G. (1954): «The Early History of Empirical Studies of Consumer Behaviour». *Journal of Political Economy,* 62, págs. 95-113.

STREETEN, P. y BURKI, R. J. (1978): «Basic Needs: Some Issues». *World Development,* 3(6), págs. 411-421.

SYDENSTRICKER, E. y KING, W. (1921): «The Measurement of the Relative Economic Status of Families». *Americal Statistical Association,* 17, págs. 842-857.

VAN PRAAG, B. M. (1971): «The Welfare Function of Income in Belgium: an Empirical Investigation». *European Economic Review,* (2), págs. 337-369.

_______________, (1991): «Ordinal and Cardinal Utility: an Integration of the two Dimensions of the Welfare Concept». *Journal of Econometrics,* 50, págs. 69-89.

VAN PRAAG, B. M. y VAN DER SAR, N. (1988): «Household Cost Functions and Equivalence Scales». *Journal of Human Resources,* 23, págs. 193-210.

CAPÍTULO 32

Los modelos factoriales de la estructura de la inteligencia técnica en las décadas de los años 1920 y 1930: su aplicación a la selección de personal y en orientación profesional

MARCELO PASCUAL FAURA
Universidad San Pablo CEU

Los modelos factoriales de la estructura de la inteligencia

El objetivo fundamental de los primeros psicólogos experimentales durante el siglo XIX consistió en formular descripciones generalizadas de la conducta humana, no interesándose por la medida de las diferencias individuales, que o se ignoraban o se consideraban como un mal necesario que limitaba la aplicación de las generalizaciones. El hecho de que un sujeto reaccionara de modo distinto a otro, observados ambos en condiciones idénticas, se consideraba un forma de error.

Con esta actitud hacia las diferencias individuales, se crean los primeros laboratorios; en 1879 funda Wundt[1] en Leipzig el laboratorio en el que se forman la mayor parte de los primeros psicólogos experimentales.

Los fundadores de la Psicología Experimental reflejan la influencia de su formación fisiológica y médica, estudiando en sus laboratorios la sensación, la percepción y los tiempos de reacción simple, como materias propias de la psicología, ignorando los procesos mentales superiores, como el pensamiento y la solución de problemas, actualmente considerados como equivalentes a la inteligencia.

El biólogo inglés Sir Francis Galton[2], considerado como el padre de los tests mentales, pensaba que los procesos sensoriales simples, perceptivos y motores, eran los principales componentes de la inteligencia humana. Como biólogo, e influenciado por Darwin[3], consideró los problemas de la evolución humana estudiando las diferencias entre las especies y entre los miembros de una misma especie. Como estadístico, se impresionó por el descubrimiento de Quetelet[4] sobre la distribución normal de características tales como la estatura y el peso en la población humana. Su colaborador, Karl Pearson[5] desarrolla un gran número de métodos estadísticos para el análisis de las diferencias individuales: el coeficiente de correlación producto-momento, las correlaciones múltiple y parcial, y además sentó las bases del análisis factorial, así como de otros procedimientos de análisis multivariante.

Galton, basándose en que las diferencias individuales en ciertas características fisiológicas se ajustaban a una ecuación matemática bien conocida, trató de determinar si las diferencias psicológicas entre los individuos eran igualmente sistemáticas.

---

[1] WILHELM WUNDT (1832-1920): Nacido en Badem. Psicólogo y filósofo, considerado como fundador de la moderna psicología experimental, fue profesor de Fisiología en Heidelberg desde 1865 a 1874, que pasó a Zurich y al año siguiente a Leipzig, en cuya universidad ocupó hasta 1918 una Cátedra de Filosofía (FERRATER MORA, J., 1965).

[2] FRANCIS GALTON: Fue el principal promotor del movimiento a favor de los tests en el curso de sus investigaciones sobre la herencia humana, para medir las características de las personas emparentadas y no emparentadas. En 1862 establece en Londres un laboratorio antropométrico, en el que acumula gradualmente el primer gran cuerpo sistemático de datos sobre las diferencias individuales en procesos psicológicos sencillos (ANASTASI, A., 1966).

[3] CHARLES ROBERT DARWIN (1809-1882): Nacido en Shrewsbury, estudió medicina en Edimburgo y en Cambridge, formuló la Teoría de la Evolución de las Especies basada en un tronco común y en una selección natural (FERRATER MORA, J., 1965).

[4] LAMBERT ADOLPHE JACQUES QUETELET: Matemático, astrónomo y sociólogo belga (1796-1874), uno de los fundadores de la estadística demográfica.

[5] KARL PEARSON (1857-1936): Nacido en Londres. Matemático, graduado en la Universidad de Cambridge en 1879. Cursó estudios de derecho, aunque dedicó la mayor parte de su vida a enseñar matemáticas aplicadas, mecánica y genética en el University College de Londres. En 1901 funda la revista *Biométrica*. Su investigación sentó en gran medida las bases de la estadística del siglo XX.

En 1882 fundó un laboratorio antropométrico en Londres, donde tomaba medidas de los rasgos físicos y aplicaba tests de agudeza visual y auditiva, energía muscular, tiempo de reacción, y otras funciones sensomotoras sencillas, acumulando así gradualmente, el primer gran cuerpo sistemático de datos sobre las diferencias individuales en procesos psicológicos simples. Se estima que en seis años aproximadamente, diez mil sujetos pasaron las pruebas.

La cuantía de los datos recogidos y las incipientes técnicas de análisis de datos desbordaron la posibilidad de una elaboración estadística adecuada, motivos por los cuales Galton no encontró diferencias psicológicas importantes. Aproximadamente 100 años más tarde, Johnson y colaboradores (1984) analizaron nuevamente los datos de Galton con un ordenador, y encontraron diferencias individuales sistemáticas en el tiempo de respuesta.

A pesar de todo, Galton planteó muchas cuestiones importantes sobre la inteligencia, su medida, el influjo de la herencia, medio ambiente, etcétera; elevando el estudio de las diferencias psicológicas humanas a una posición eminente, y diseñando una serie de tests psicológicos para este propósito.

J. McCattell fue el primer psicólogo norteamericano que propone una psicología de las diferencias individuales, y que utilizó la expresión «test mental». En sus primeros contactos con Wundt se interesó por las diferencias individuales en la ejecución de tareas psicológicas, disertando en 1886 sobre el estudio de las diferencias individuales en el tiempo de reacción. Su interés por el estudio de las diferencias individuales se ve reforzado por sus contactos con Galton, ya que como él, creía que los procesos sensoriales, perceptivos y motores eran los elementos fundamentales del pensamiento.

A su regreso a EE.UU inicia y dirige lo más notable de sus investigaciones sobre las diferencias individuales. En un artículo escrito por él en 1890 se emplea por primera vez la expresión «test mental», y en él describe una serie de tests que aplicaba a estudiantes universitarios en un intento de determinar su nivel intelectual, incluyendo entre otras medidas la velocidad de movimientos, energía muscular, sensibilidad al dolor, agudeza visual y auditiva, discriminación de pesos, y tiempos de reacción.

El psicólogo francés Alfred Binet[6] director del Laboratorio de Psicología de la Sorbona, dedica sus investigaciones a cómo medir la inteligencia, probando numerosos métodos, cuyos resultados le conducen a la conclusión de que la medida

---

6 ALFRED BINET (1857-1911): Nació en Niza. Cursó estudios de Derecho en La Sorbona, aunque posteriormente se interesó más por la Medicina y la psicología, inició estudios en este campo la los 37 años de edad. En el año 1889 ayudó a fundar el primer Laboratorio de Investigación Psicológica de Francia, del que fue director. En 1895 fundó la primera revista psicológica francesa, *L'Année Psychologique.*

directa, aunque burda, de las funciones intelectuales complejas era la mejor solución, y propone la utilización de pruebas para medir la memoria, la formación de imágenes, la atención, la comprensión, la apreciación estética, los sentimientos morales, la fuerza de voluntad, y las capacidades motoras.

En 1904, estudiando procedimientos para la identificación de niños cuya capacidad intelectual era tal que no podían obtener beneficios en el sistema escolar tradicional, y en colaboración con el psiquiatra francés Théodore Simon, preparó la primera escala conocida con el nombre de Binet-Simon o Escala de 1905. Constaba de treinta problemas o tests colocados por orden creciente de dificultad, que abarcaban una amplia variedad de funciones, ya que, aunque incluía tests sensoriales y perceptivos, se encontraban en mayor proporción los de contenido verbal, haciendo hincapié en el juicio, la comprensión, y el razonamiento, elementos considerados por Binet como componentes esenciales de la inteligencia.

El procedimiento utilizado consistía en comparar la ejecución en la escala de niños considerados como retrasados o débiles mentales con la ejecución de chicos de la misma edad cronológica del grupo normativo. En 1908 y 1911 aparecen respectivamente una segunda y tercera revisión de la escala, con nuevos elementos y métodos para calcular el nivel intelectual, y con un numeroso grupo de tipificación.

De los tests de Binet-Simon aparecen numerosas adaptaciones y traducciones en varios idiomas. En EE.UU se hacen varias revisiones, destacando la llevada a cabo bajo la dirección de L. M. Terman[7] en la Universidad de Stanford en 1916, conocida como la revisión de Starford-Binet. Junto con los resultados de seis años de investigación, algunas modificaciones como instrucciones más claras y detalladas para cada problema, amplios grupos de tipificación, se utiliza por primera vez para expresar el nivel de ejecución del chico en la escala el término «cociente de inteligencia» o razón entre edad mental y cronológica.

Investigaciones factoriales sobre la inteligencia técnica

Orígenes de las investigaciones

Históricamente, la identificación de la aptitud espacial, tiene sus raíces en el estudio de la «aptitud mecánica» (Cox, 1928; O'Conor, 1928; en Smith, 1964; Patterson, Elliot, Anderson, Toops y Hidbreder, 1930; Stenquist, 1922), y de la «aptitud práctica» (Alexander, 1935; Kohs, 1923; McFarlane, 1925). Pero es a fina-

[7] Lewis Madison Terman (1877-1956): Nació en Indiana. Profesor de Psicología y Pedagogía en la Universidad de Stanford. Entre sus obras destacan: *La medida de la inteligencia* (1916), *La inteligencia de los escolares* (1919), *The Stanford Achievement Test* (1923) y *El estudio genético del genio* (1925-1959), un análisis en cinco volúmenes de 1.500 niños superdotados.

les del siglo XIX y comienzos del XX (BINET, 1903) cuando se hacen los primeros intentos para crear tests que evalúen aptitudes espaciales, o según la terminología usual de la época tests de «imaginación»; sin embargo, los objetivos marcados por los investigadores, impuestos por las definiciones dadas sobre estas habilidades imaginativas, hacen que se estudien tanto las manipulaciones mentales de objetos (ANGELL, 1910) como la capacidad de retención de material verbal (FERNALD, 1912), como si de un mismo todo se tratase, siendo preciso que pasaran varios años para que se diera la unicidad de criterios.

Galton (1880, 1883), que introdujo el cuestionario como nuevo método de trabajo en sus investigaciones sobre la «imaginación mental», encuentra que los sujetos varían en la facilidad y claridad con la que reproducen «imágenes mentales interiores» en diferentes campos sensoriales. Estos resultados influyen en la psicología descriptiva de la época, llegándose a elaborar la Teoría de Tipos de Imaginación, donde se exponía que los sujetos podían clasificarse, según su imaginación mental, en alguna de las cuatro categorías establecidas: visualizadores, auditivos, motóricos, o gustativos. De tal manera que la presencia de una de estas cualidades excluía las tres restantes. Investigaciones posteriores demostraron que la exclusiva preponderancia de una clase de imaginación sobre las otras era la excepción más que la regla, siendo G. H. Betts (BETTS, 1909) quien demostró que no existía la menor oposición entre la viveza de las imágenes que provienen de distintos sentidos.

Pero el estudio sistemático de la «imaginación mental» y de la «aptitud mecánica» se inicia con la Escuela de Spearman, que utilizando el coeficiente de correlación como punto de partida de sus investigaciones sobre la inteligencia, descubre y desarrolla un nuevo método de investigación experimental, el Análisis factorial, para probar matemáticamente su teoría.

La inteligencia técnica en las décadas de los años veinte y treinta

Escuela inglesa

La Teoría Bifactorial de Spearman

La primera Teoría de la Organización de Rasgos, basada en el análisis estadístico de las puntuaciones de los tests, fue la Teoría Bifactorial de la Inteligencia, desarrollada por Charles Spearman[8] (1904, 1927). Parte del supuesto de que toda actividad cognoscitiva es función de dos factores, uno general (*g*), común a todas las activi-

[8] CHARLES EDWARD SPEARMAN (Londres 1863-1945): Psicólogo inglés. Militar de carrera, fue destinado a las colonias. Después inició los estudios de filosofía. Se doctoró y estudió la percepción sensorial humana, y posteriormente la medida de la inteligencia.

dades; y otro específico (s), exclusivo de cada actividad, e independiente de todas las demás actividades y de g.

Aplicó numerosos tests cognoscitivos a un número considerable de sujetos, y obtenidas las matrices de intercorrelaciones comprobó que todas las correlaciones eran positivas, lo que parecía confirmar la existencia de g, puesto que estas expresan lo que tienen en común las operaciones cognoscitivas manifestadas por los sujetos al realizar los tests. Estas correlaciones no eran perfectas, debido a la existencia de los factores específicos (s), propios y exclusivos de cada actividad; y las correlaciones son jerárquicas, es decir, las columnas de las tablas de correlaciones son proporcionales, (criterio de las diferencias tetracóricas nulas).

Pensaba Spearman (1927) que la cuantía de g se mantenía intraindividualmente constante, e interindividualmente variable, por lo que el valor de g no aumentaba con la práctica, mientras que el valor de s podía aumentar en determinadas condiciones y circunstancias. Además consideraba que si una actividad cualquiera reclama g en alto grado, no puede deducirse que un individuo que posea g en alto grado alcance un alto grado de perfección en esa actividad, pues para ello necesitaríamos conocer también el valor de s, tanto en la actividad como en el individuo.

En función de su teoría, Spearman y sus discípulos emprenden una serie de investigaciones, tratando de explicar las actividades humanas. Intentan demostrar que g, además de participar en todas las actividades intelectuales, influye en otras muchas conductas, desde las más complejas, hasta las más simples, como por ejemplo, desde la imaginación, que aunque no depende de g en cuanto a capacidad para formar imágenes, sí depende en lo referente a la llamada «imaginación creativa», la cual consiste fundamentalmente en descubrir relaciones, siendo precisamente esto lo distinto de g. Hasta en los movimientos y percepciones sencillas, que aunque interviene en cuantía pequeña, ésta no es nula, ya que siempre se requiere percibir o establecer relaciones.

Spearman indagó sobre las causas que podían influir en varias actividades cognoscitivas, pero no en todas, pues de ser así correspondería al factor g, y de surgir en una sola actividad, correspondería al factor s, tratando de encontrar una base que le permitiera descartar la hipótesis de la existencia de la que denominó Teoría Oligárquica de la Inteligencia, ya que de existir facultades como la memoria, la imaginación, etcétera, tendrían que aparecer grupos de actividades cognoscitivas que influyesen por igual en todas las operaciones que se atribuyesen a cada facultad, denominando a estas actividades «factores de grupo».

El criterio seguido por Spearman para confirmar la existencia de g y s consistió en observar si las diferencias tetrádicas, simbolizadas por la letra F, eran nulas o tendían a cero; y si ocurría esto, entonces y sólo entonces, concluía que intervenían los dos factores. Consideraba como nulas, desde el punto de vista estadístico, todas las diferencias tetrádicas que no sobrepasaran cinco veces su error probable, desarrollando métodos estadísticos adecuados para el cálculo de los errores típicos de las tétradas.

Aplicando este criterio, no obtiene factores de grupo en ninguna de las actividades atribuibles al entendimiento, ni en las de abstracción, ni atención, ni en la rapidez y exactitud de la intelección. Tampoco en la discriminación sensorial ni en las operaciones motrices, admitiendo con ciertas reservas la existencia de algunos factores de grupo como el de razonamiento y generalización, uno de aptitud para la aritmética y otro para la geometría, abarcando ambos todas las operaciones, tanto de un tipo como de otro independientemente, por lo que consideró más específicos que de grupo, por tratarse de operaciones muy semejantes. También consideró otro factor de grupo que abarcaba las diversas aptitudes para apreciar la música. Los diversos tipos de memoria visual, verbal y retención de símbolos no verbales originarían otros tantos factores de grupo.

Además de éstos, admitió un factor de grupo verbal y otro de influencia; el primero identificaba la capacidad para asociar las palabras con su significado; y el segundo, se manifestaba en la rapidez para reproducir las ideas adquiridas.

Estudia la imaginación visual y auditiva, concluyendo que o no existe, o tiene poca influencia, un factor común que se extiende a las dos aptitudes y al que puede atribuirse una facultad para formar imágenes (imaginación creativa), admitiendo en cambio, un factor de grupo que influye en la facultad de formar imágenes visuales, y otro en la formación de imágenes auditivas.

Respecto al factor de grupo mecánico *m* que representa la aptitud para todas las operaciones que implican la mecánica constructiva, inicialmente al obtenerlo sólo en muestras de varones, le hace pensar que probablemente se trata de una habilidad adquirida, aunque finalmente termina por admitir un factor espacial, emparentado con el mecánico, ya que tras diversos estudios encuentra que tests de tipo espacial y manipulativos satisfacían el criterio de las tétradas.

A este respecto, aunque ya había descartado la posible existencia de una facultad motriz y otra discriminativa, estudia la imaginación visual y auditiva concluyendo que o no existe o tiene poca influencia. Obtiene un factor común que se extiende a las dos aptitudes y al que puede atribuirse una facultad para formar imágenes o inventarlas (imaginación creativa), admitiendo un factor de grupo que influye en la facultad de formar imágenes visuales y otro en la formación de imágenes auditivas.

El factor espacial, que en un principio niega su existencia, termina por admitirlo como relacionado con el mecánico, ya que los tests de relaciones de tipo espacial y manipulativo estudiados en diversos trabajos, satisfacían el criterio de las tétradas.

Las investigaciones de Cox, Stephensom y El Koussy

Un año más tarde, J. W. Cox (Cox, 1928), en sus investigaciones en el campo de las aptitudes de tipo mecánico, que representa uno de los primeros intentos para estudiar su naturaleza más que de medir esa aptitud, demuestra la existencia de un factor involucrado en numerosas tareas de tipo mecánico que era distinto de *g* y que denominó *m*, considerando que este factor, el mecánico, constituía una aptitud innata que definió como la capacidad para comprender y utilizar relaciones y principios mecánicos.

Considera Cox que el rasgo esencial que distingue los tests de *m* de las pruebas de inteligencia y de la parte de los datos en que no se encuentra *m* es el carácter espacial del material utilizado y el modo peculiar de pensar sobre este material, que no se limita a aprehender ciertos elementos espacialmente ordenados como en un dibujo, ni a captar las relaciones espaciales por las que conocemos que el dibujo tiene una estructura o forma distinta. El movimiento viene a unirse a este orden definido de partes, y como los elementos del mecanismo se desplazan, su estructura cambia continuamente. Este factor *m* constituye para Cox una aptitud innata, pues piensa que el material utilizado excluye el recurso a informaciones anteriores a diferencia del factor verbal que recurre a este tipo de conocimientos. Concede también gran importancia a los procesos de deducción de las tareas que había utilizado e insiste en la diferencia entre *m* y la aptitud motriz.

Las investigaciones de Cox sobre el trabajo mecánico en su aspecto educativo y vocacional, identifican varios factores de los cuales sólo uno, el mecánico, contribuye a la varianza del trabajo mecánico, diferenciándose claramente del espacial y manual. Refiriéndose principalmente a una aptitud para apreciar las causas de los procesos mecánicos, que implicaban la comprensión de las relaciones dinámicas más que las estáticas, y se manifestaba no sólo en tests de aprehensión y comprensión, sino también en los de comprensión y ejecución, para aprender con mayor rapidez y eficacia con una formación o experiencia adecuada.

Spearman aceptó con reservas este factor de grupo *m*, aunque consideró que más que una aptitud, o además de una aptitud, representaba la experiencia adquirida en el campo de los principios, leyes y material de tipo mecánico.

Investigaciones posteriores probaron, que como pensaba Spearman, el factor *m* de Cox viene a representar más que una aptitud, la experiencia o conocimientos adquiridos en el campo de los principios, leyes y material de tipo mecánico. El propio Cox modifica sus postulados, eliminando el carácter innato de la aptitud, e incluyendo el de conocimientos adquiridos por la experiencia en el área mecánica.

Los trabajos de Stephensom (1931) sobre inteligencia, siguiendo la trayectoria marcada por Spearman, utilizan una muestra de mil treinta y siete jóvenes de 10 a 12 años, a los que administra siete tests verbales y ocho no verbales de inteligencia.

Comprobó al analizar las intercorrelaciones entre las pruebas no verbales, que podían explicarse por un solo factor común, que identificó como *g*, mientras que al estudiar las intercorrelaciones entre las pruebas verbales, que eran mucho más complejas, y sus relaciones con las no verbales, pensó que podía explicarse por el factor *g* y por un factor de grupo verbal.

A A H. El Koussy (EL KOUSSY, 1935) es el primero en demostrar claramente la existencia de un factor de grupo espacial distinto de *g* y *m* en tests mecánicos y espaciales que denominó *K*, y basándose en los informes introspectivos de los participantes en el estudio, consideró que el proceso mental activo en la solución de problemas implicados en el factor *K*, estaba caracterizado por la aptitud para obtener, manipular, y utilizar imágenes visuales espaciales.

Piensa El Koussy que su factor *K* no se extiende a todos los tests espaciales, sino que solamente interviene cuando los problemas presentados, espaciales o mecánicos, implican la visualización y manipulación mental, afirmando que los tests espaciales son en primer lugar medidas de *g*, intentado así armonizar sus resultados con las ideas de Spearman, quien suponía que los tests no verbales dependen únicamente de *g*.

La inteligencia práctica

La general aceptación de la teoría y método de Spearman lleva a los investigadores a tratar de compatibilizar los resultados de sus estudios con la existencia de un factor común en todas las actividades inteligentes exploradas. Poco a poco sin embargo, van surgiendo otros factores, que sin ser generales ni específicos, abarcan ciertos aspectos particulares de la actividad inteligente, y así Spearman fue admitiendo la existencia de otros factores de grupo como el verbal, mecánico y espacial. Pero, a medida que se amplía la investigación sobre estas actividades inteligentes, observan una clara diferencia entre la facilidad de algunos sujetos para manejar material verbal y, la habilidad de otros con el material no verbal, o para manipular objetos concretos. Este hecho lleva a la consideración de la posible existencia de dos tipos de inteligencia, una abstracta o académica y otra concreta o práctica.

Tratando de apreciar este tipo de inteligencia, W. P. Alexander (ALEXANDER, 1935) realiza un estudio sobre dichos aspectos de la inteligencia. Esta investigación sobre la inteligencia abstracta y concreta representa además el primer intento de reconciliación entre los métodos de L. L.Thurstone, principal representante de la Escuela Americana y la Teoría de Spearman, pues asocia la concepción del factor general *g* y el uso de las tétradas, con el método centroide y la rotación de ejes de Thurstone.

Analiza los datos obtenidos en una muestra de trescientos cuarenta y siete sujetos, divididos en cuatro grupos, para realizar análisis separados y poder comparar.

Administró una batería compuesta por tests verbales, mecánicos, perceptivos y manipulativos; éstos, los manipulativos son los mismos que en la actualidad constituyen la escala de Alexander: passalong, cubos de Kohs y construcción con cubos.

Obtiene cinco factores comunes a los cuatro grupos de sujetos que interpreta:

— Factor general *g*; común a todos los tests de la batería. Su eje fue localizado a través de un test de *g*, lo que le permitió su identificación como el factor general de Spearman, definiéndolo como un «factor general intelectivo».

— Factor *v*; en él presentaban saturaciones los tests verbales, estando ausentes las restantes pruebas. Lo definió como un factor distinto de *g* que se obtiene con tests verbales de inteligencia.

— Factor de ejecución *F*; definido por los siguientes tests: construcción de cubos, los tests de Cox, cubos de Kohs, passalong, y el trabajo de taller, lo que le llevó a considerarlo como un factor independiente de *g*, que surge en tests manipulativos de inteligencia.

En el grupo tercero surgen además otros dos factores:

— Un factor temperamental o de carácter *X*; presente en todas las pruebas de rendimento escolar y en el que están ausentes las restantes pruebas; lo definió como un factor que influye en el rendimiento escolar, independiente de *g* y *v*, al que denominó «persistencia o voluntad de éxito».

— Un factor *Z*; cuya naturaleza no encontró clara y dejó sin interpretar, pero que propuso como relacionado con el rendimiento escolar.

El resultado más interesante del trabajo de Alexander lo constituye la obtención del factor práctico *F*, que interpreta ajustándose a la Teoría de Spearman, del cual dice que es independiente de *g*, pues sus ejes son ortogonales, y que surge en los tests manipulativos de inteligencia.

Las indeterminaciones de Alexander sobre su factor práctico motivó una serie de investigaciones que trataron de aclarar el sentido y significado psicológico de este factor.

El Dr. D. Mariano Yela, pionero de la psicología en España, durante su permanencia en la Universidad de Chicago con el profesor Thurstone reanaliza los datos de Alexander (YELA, 1949) ajustándose en la rotación a los principios de la estructura simple y, consecuentemente, estudia las correlaciones entre los primarios en el segundo orden.

Obtiene cinco factores en el dominio de primer orden, tres de estos, *v*, *X* y *F*, vienen definidos por los mismos tests que en el trabajo de Alexander; el cuarto factor *Z*, no interpretado por Alexander, lo interpreta Yela como un factor de «síntesis perceptual» semejante a los factores de flexibilidad y clausura perceptiva de Thurstone.

El quinto, que no aparece en el estudio de Alexander, surge en la estructura simple de Yela como un factor de «razonamiento», abarcando tanto la inducción como la deducción.

En el segundo orden surge un factor común a todos los cognoscitivos del primer orden, menos el factor *X* que tiene saturación nula, y por tanto, aparece como independiente y, como pensaba Alexander, no pertenece al campo cognoscitivo.

Escuela americana

Antecedentes: los modelos multifactoriales

Entre los años 1920 y 1930, comienzan a aparecer en EE.UU algunas publicaciones sobre la estructura de la inteligencia, que postulan la independencia de las aptitudes entre sí y su no vinculación a instancias superiores, lo que difiere sustancialmente de la teoría defendida por Spearman.

Thorndike[9] (1922) sostiene la opinión de que existe un numeroso grupo de aptitudes, cada una de ellas específica de la tarea a realizar. Esta idea, similar en cuanto a los factores específicos a la de Spearman, rechaza la existencia de una habilidad general o común a todas las aptitudes específicas.

Kelley (1928) al que se puede considerar precursor de los modelos multifactoriales, critica la Teoría de Spearman y propone la existencia de distintos factores de grupo, entre los que destaca: el manejo de relaciones espaciales, facilidad para los números, facilidad para el material verbal, la memoria, y la velocidad.

Investigaciones posteriores modifican y amplían esta lista de factores aplicando la metodología factorial. Uno de los primeros investigadores que adopta el método multifactorial para abordar el campo de las aptitudes es L. L. Thurstone, identificando factores que todavía hoy son utilizados.

Estos estudios muestran el esfuerzo realizado para mantener el punto de vista de la escuela de Spearman sobre la importancia del factor general *g*; pero en esta misma época, década de los años veinte, los psicólogos americanos inician también una serie de investigaciones sobre la aptitud mecánica, tratando de conocer su naturaleza y dimensiones, ya que la psicología industrial necesitaba medir y analizar esta aptitud especial para poder tomar decisiones, teóricas y prácticas, en este campo de la psicología.

---

[9] EDWARD, L. THORNDIKE (1874-1949): Fue profesor de psicología durante más de 30 años en el Teachers College de Columbia, Estados Unidos. Uno de sus más influyentes libros fue *Introduction to the the Mental and Social Measurement* (Introducción a la Teoría de las Mediciones Mentales y Sociales), 1904. En la actualidad se reconoce a Thorndike como una figura señera en los comienzos del desarrollo de tests psicológicos.

La investigación práctica iba principalmente dirigida al conocimiento de la validez predictiva de los tests utilizados. El concepto de validez predictiva constituyó en esta y en épocas ulteriores la línea central sobre los tests de aptitud, de tal forma que, a partir de los años treinta, el uso de tests validados y tipificados se convierte en una práctica habitual para la toma de decisiones en orientación y selección profesional.

La creciente industrialización de la época y la necesidad de conocer la naturaleza de las habilidades requeridas en el manejo de útiles y herramientas, mantenimiento de máquinas, y ejecución de trabajos con maquinaria en general, unidos al afán de aproximar las aptitudes estudiadas por los psicólogos a la actividad profesional del productor en una fábrica, originan una serie de programas de investigación, con el fin de elaborar sistemáticamente tests válidos para medir los principales tipos de habilidades exigidos por los diversos trabajos y, en concreto, por el trabajo mecánico.

Con esta idea, se plantea y realiza en la Universidad de Minneapolis, Minnesota, el primer estudio a gran escala sobre la aptitud mecánica.

Proyecto de aptitud mecánica Minnesota

Esta investigación, conocida como Proyecto de Aptitud Mecánica Minnesota, realizada por D. G. Paterson (PATERSON y *col.* 1930), representa, junto con la de Cox, en Inglaterra, uno de los primeros intentos para estudiar y determinar la naturaleza de la «aptitud mecánica».

La expresión «aptitud mecánica» se consideraba adecuada para referirse a cualquier tipo de aptitud o aptitudes exigidas por los trabajos que requerían el uso y empleo de herramientas y máquinas, pensando en esta aptitud como una función general semejante a la inteligencia, formada por varias partes componentes, variando la identidad precisa e importancia de cada parte de una actividad a otra.

Administran una batería de tests, compuesta por veintiséis pruebas, que agrupan en siete categorías, de acuerdo con la naturaleza de las operaciones requeridas inteligencia, tests motores simples, pruebas de equilibrio, de coordinación ojo-mano complejas, tests de ensamblaje que implicaban manipulación o relaciones espaciales, tests de conocimientos mecánicos y tests varios, a una muestra de doscientos diecisiete adolescentes de 13 años de clase media que seguían cursos de taller en la escuela superior de Minneapolis.

Analizan los datos, siguiendo las ideas de Spearman sobre las funciones intelectuales, tratando de encontrar en los resultados una aptitud general, pero no obtienen el orden jerárquico, lo que les lleva a la conclusión de que los datos no ofrecen pruebas suficientes sobre la existencia de un factor general, y por tanto, la «aptitud mecánica» se encontraba lejos de ser unitaria.

Los resultados de la investigación, en lo que respecta a intentar llevar a cabo un estudio definitivo sobre la aptitud mecánica a estas edades había fracasado; pero a pesar de ello, los tests utilizados en el estudio fueron y en algunos casos son hoy utilizados por su valor predictivo, en orientación y selección profesional.

Años más tarde, J. R. Witterborn (WITTERBORN, 1945) realiza un análisis de los resultados obtenidos en el Proyecto de Aptitud Mecánica Minnesota (1930) para completar la investigación original y tratar de esclarecer algunos aspectos de la medida de la aptitud mecánica.

Analiza la matriz de correlaciones por el método centroide y obtiene seis factores: visualización espacial, movimientos estereotipados, aptitud escolar, destreza manual, perceptivo y firmeza o estabilidad motora.

Sugiere que los autores del proyecto no pudieron encontrar ningún factor común en el estudio original, puesto que los obtenidos por él se deben al método de rotación utilizado, rotación ortogonal.

En la segunda parte del trabajo hace referencia a los tests que contribuyen a las aptitudes motoras, dirigiendo la investigación hacia la llamada «aptitud manual», para lo cual analiza las dieciséis variables del estudio que hacen referencia a la destreza manual y el grado en que el desarrollo físico y la fuerza participan de esta aptitud.

Obtiene cuatro factores: «magnitudes», definido por varias medidas de tipo físico; «fuerza», definido por medidas de fuerza; «visualización», formado por las mismas variables que en la parte primera del estudio; y «destreza manual», definido por las pruebas que parecen reclamar destreza manual.

Respecto a los dos primeros factores, observa que no son independientes pues todos los tests que definen el de «fuerza» tienen saturaciones más altas en el de «magnitudes»; del factor de «visualización» opina que es un índice prometedor de la «aptitud mecánica» debido a la contribución de los intereses mecánicos y al criterio del taller, que además son independientes de los restantes factores del estudio. En lo que hace referencia al factor de «destreza manual», encuentra sorprendente que ni el factor de fuerza ni el de magnitud contribuyan a facilitar la destreza manual identificada por este factor; asimismo, esta destreza es también independiente de la visión directa y depende de la modalidad táctil o cinestésica.

Concluye el estudio indicando que la importancia del aspecto motor de la aptitud mecánica no se encuentra limitada a los factores obtenidos, sugiriendo la necesidad de profundizar en la investigación incluyendo otros datos sobre satisfacción y rendimiento en el trabajo, lo que permitirá definir esta aptitud sobre una base más firme y de aplicación más general.

Pero Kelley (1928), usando una nueva técnica de factorización, ejes principales de Kelley, estudia la matriz de correlaciones entre una serie de tests, administrados en tres muestras, de unos cien alumnos, con edades de 13, 9 y, 3 años y medio, obteniendo los siguiente factores: espacial, verbal, numérico, memoria repetitiva y rapidez, surgiendo también un factor general, pero, a diferencia de Spearman, no le da importancia, atribuyéndolo a la heterogeneidad de la muestra.

La batería de aptitud mecánica de McQuarrie

En 1925 se publica por el California Tests Bureau, la Escala de McQuarrie, compuesta por los subtests de trazado, marcado, punteado, copiado, localizado y recuento, lo que constituye uno de los primeros intentos para medir la aptitud de los sujetos para profesiones de tipo mecánico y manual. La intención del autor era medir los aspectos más destacables del éxito en este tipo de tareas, lo que le lleva a construir una escala independiente de la inteligencia general, cultura y conocimientos del sujeto y, que apreciase lo que él consideró una aptitud unitaria, la «aptitud mecánica».

Thurstone y el factor primario S

En 1938 Louis León Thurstone, publica la primera de una larga serie de investigaciones sobre las aptitudes humanas. Mediante la aplicación de una metodología factorial propia, obtiene una serie de factores, a los que denomina «aptitudes mentales primarias». Entre los más frecuentemente verificados por él y otros autores destacan:

— Factor verbal: hace referencia al uso inteligente del lenguaje. Comprende dos direcciones de covariación distintas pero independientes: comprensión verbal (*V*), capacidad para comprender el significado de palabras; fluidez verbal (*W*), como indicador de la cantidad de verbalización o fluidez en la expresión, no implicando la comprensión de dichos términos.

— Factor numérico (*N*): representa la aptitud para realizar rápida y correctamente operaciones aritméticas elementales.

— Factor espacial (*S*): capacidad del sujeto para imaginarse los objetos y sus partes en diversas posiciones del espacio. Este factor a su vez se subdivide en: espacial estático (*S1*), capacidad para resolver problemas con objetos que se desplazan en el espacio, conservando su estructura interna; espacial dinámico (*S2*) o de visualización, que representa la capacidad para solucionar problemas con objetos que modifican su estructura interna; topológico (*S3*) o aptitud para comprender y percibir relaciones espaciales; cinestésico (*K*) o imaginación de los movimientos corporales.

— Factor mnemónico (*M)*, o capacidad para memorizar palabras, números, etcétera, en general relacionado con el recuerdo de informaciones relativamente simples o asociaciones aparecidas.

— Factor perceptivo (*P*), que parece abarcar dos grupos de factores, uno caracterizado por propiedades materiales, como la percepción visual, auditiva, etcétera, y otros que reflejan los caracteres formales, como los de estructuración, flexibilidad y rapidez.

En el campo de la inteligencia formal, obtiene Thurstone tres factores: Razonamiento (*R*), que surge en condiciones restrictivas, en las que los datos implican una solución única; Deducción (*D*), implica la deducción de consecuencias a partir de una premisa; Inducción (*I*), implica descubrir las reglas o principios para encontrar una solución.

Estos factores primarios no son simples ni independientes, sino que sus intercorrelaciones señalan direcciones de covariación más simples y generales, lo que le lleva a Thurstone a pensar que alguno de sus factores primarios, y sobre todo los de razonamiento, tienen cierto parecido con el factor *g* de Spearman, ya que las correlaciones observadas entre los factores conducen a factores de segundo orden, alguno de los cuales sería *g* o expresaría aspectos de *g*.

En investigaciones posteriores (THURSTONE, 1944, 1947; YELA, 1949), utilizando muestras más heterogéneas y permitiendo la rotación oblicua, obtienen una estructura jerárquica de factores múltiples, complejos e interdependientes. Los factores de cada nivel se subdividen en otros más abundantes y menos amplios hasta llegar a los de nivel específico más bajo. Los factores son interdependientes y definen áreas de covariación de nivel superior, más amplias y menos numerosas; los llamados por Thurstone factores primarios representarían amplias zonas de la inteligencia, destacando los de razonamiento, memoria, numérico, verbal, espacial, perceptivo y psicomotriz (YELA, 1963).

Por último señalar que Thurstone, al referirse al factor primario espacial *S*, al que considera como la aptitud para visualizar objetos en el espacio, indica que muchos sujetos se encuentran bien dotados en este factor pero que otros, con gran inteligencia, son deficientes en esta aptitud primaria y que muy pocos de éstos se dedican a las ciencias. Todas las pruebas que presentaban saturaciones elevadas en este factor requerían de los sujetos percibir o imaginar objetos para reconocerlos cuando cambian de posición en el espacio o para someterlos mentalmente a diversas transformaciones.

Trabajo de Harrell sobre la aptitud mecánica

El estudio de T. W. Harrell (HARRELL, 1940) sobre la «aptitud mecánica» constituye un nuevo intento para esclarecer la naturaleza de esta aptitud. Elabora una batería compuesta por tests de probado valor predictivo para la ejecución de tareas mecánicas, otros utilizados en el estudio Minnesota, alguno elaborado por Thurstone y la escala de McQuarrie. Además introduce como criterios la edad, el nivel escolar, la experiencia en trabajos mecánicos y dos escalas de méritos, una referente a la competencia en el trabajo, y otra que denominó «aptitud mecánica». Administró la batería a una muestra de noventa y un operarios, con edades comprendidas en 19 y 51 años, de variado nivel académico.

De los cinco factores primarios que obtiene, uno era «verbal» y lo identifica con el factor verbal primario de Thurstone; otro lo denomina «juventud» y lo identifica por la menor edad y falta de experiencia; un tercero implica claramente «destreza» o «agilidad manual»; otro, siguiendo a Thurstone lo identifica como factor «espacial» y un quinto factor, no previsto al proyectar la batería, lo identifica con el «perceptivo» de Thurstone. En el segundo orden surgen dos factores, uno lo identifica como g y el otro, con un factor común de velocidad.

Concluye que los tests de aptitud mecánica dependen principalmente, de los factores espacial S y perceptivo P, aunque en ella puedan existir algunos otros factores y que, además, y quizá de lo más importante para la época, todos los factores del estudio pueden medirse con tests de papel y lápiz.

Conclusiones

Las investigaciones realizadas en este campo de la inteligencia, iniciadas a principios de siglo por la Escuela inglesa y continuadas con gran profusión de medios y material por la Escuela americana, plantean una serie de diferencias entre ambas escuelas, aunque son más aparentes que reales. La inglesa, caracterizada fundamentalmente por sus teorías acerca de la estructura jerárquica de la inteligencia, en la cual destacaron Burt y Vernon, y en lo referente a la aptitud práctica o aptitud mecánica, Alexander y El Koussy. La americana, representada fundamentalmente por Thurstone y posteriormente por Guilford, destaca la importancia del criterio de estructura simple demandado por los datos, y cuando ésta es oblicua analizan los datos en el dominio de segundo orden u órdenes superiores, o bien, como harán Guilford y seguidores, que con criterios parecidos dirigen los ejes en rotación a una estructura ortogonal.

En lo que se refiere a la inteligencia técnica han descubierto factores del mismo tipo en el campo cognoscitivo; espacial, razonamiento, perceptivo, motores y experiencia mecánica; que cuando se aplican los criterios de rotación adecuados presentan correlaciones entre sí. El análisis de estas correlaciones descubre un factor espacial general muy semejante al $K{:}m$ (práctico-mecánico) de la Escuela inglesa, que a su vez está correlacionado con los demás factores no espaciales de la inteligencia, lo que conduce a una teoría jerárquica con un factor general a modo del g de Spearman en la cúspide de la jerarquía (YELA, 1963, 1966, 1973).

Los estudios acerca de la estructura factorial-diferencial de la inteligencia y de las aptitudes constituyen un importante núcleo de interés de los psicólogos hasta la mitad de la década de los setenta, donde el entusiasmo que caracterizaba a los factorialistas decayó considerablemente, produciéndose un gran descenso en el número de publicaciones sobre estos temas. Se observó que el análisis factorial era una poderosa técnica o tecnología psicométrica para la construcción de tests, que servía para caracterizar la naturaleza de la inteligencia, poniéndose de relieve numerosas anomalías, reflejadas especialmente en la incapacidad para llegar a teorías útiles y unificadas acerca del constructo «inteligencia».

BIBLIOGRAFÍA

ALEXANDER, W. P. (1935): «Intelligence, Concrete and Abstract». *British Journal of Psychology, Monograph Supplement,* n.º 29.

BETTS, G. H. (1909): *The Distribution and Functions of Mentalimagery.* Contributions to Education Series, n.º 26. New York: Columbia University, Teachers College.

BINGHAM, W. V. (1937): *Aptitudes and Aptitude Testing.* New York: Harper.

BLAKEY, R. (1940): «A Re-analysis of a Test of the Theory of Two Factors», *Psychometrika*, 5, págs. 121-136.

COX, J. W. (1928): *Mechanical Aptitude.* London: Methuen.

EL KOUSSY, A. H. (1935): «The Visual Perception of Space». *British Journal of Psychology, (Monograph Supplement),* n.° 20.

FLEISHMAN, E. A. (1953): «Testing for Psychomotor Abilities by Means of Apparatus Tests». *Psychol.*, 50-4, págs. 241-262.

FRENCH, J. W. (1951): «The Description of Aptitude and Achievement Test in Terms of Rotated Factors». *Psychometric Monograph,* n.° 5.

GALTON, F. (1880): «Statistics of Mental Imagery». *Mind 5*, págs. 300-318

________, (1883): «Inquiries Into Human Faculty and its Development». Londres: Macmillan.

HARREL, W. (1940): «A Factor Analysis of Mechanical Ability Tests». *Psychometrika,* 5, págs. 17-33.

KELLEY, T. L. (1928): «Crossroads in the Mind of Man. A Study of Differentiable Mental Abilities». Stanford: Stanford University Press.

KOHS, S. C. (1923): *Intelligence Measurement.* New York: Macmillan.

MCFARLANE, M. (1925): «A Study of Practical Ability». *British Journal of Psychology, (Monograph Supplement),* n.° 8.

MCQUARRIE, T. W. (1968): *Test de aptitud mecánica (manual),* Madrid, Técnicos Especialistas Asociados.

MORRIS, C. M. (1939): «A Critical Analysis of Certain Performance Test». *J. Gent. Psychol.,* 54, págs. 85-105.

MURPHY, L. W. (1936): «The Relation Between Mechanical Ability Tests and Verbal and Non-verbal Intelligence Test». *Journal of Psychology,* 2, págs. 353-66.

PATERSON, D. G., ELLIOTT, R. M., ANDERSON, L. D., TOOPS, H. A. y HEIDBREDER, E. (1930): *Minnesota Mechanical Ability Tests.* Minneapolis: University of Minnesota Press.

SPEARMAN, C. (1904): «General Intelligence, Objectively Determined and Measured». *American Journal of Psychology,* 15, págs. 201-293.

___________, (1927): *The Abilities of Man,* London, McMillan; en castellano, *Las habilidades del hombre*, Buenos Aires, Paidós, 1955.

STENQUIST, J. L. (1922): *Mechanical Aptitude tests.* Yonkers: World Book.

STEPHENSOM, W. (1931): «Tetrad Differences for Non-Verbal SubTests. Tetrad-Differences for Verbal SubTests. Tetrad Differences for Verbal Subtests Relative to Non-Verbal Subtests». *Journal of Educational Psychology,* 22, págs. 167-185, 255-267 y 334-350.

THORNDIKE, E. L. (1922): «Practice Effects on Intelligence Tests». *Journal of Experimental Psychology,* 5, págs. 101-107.

THURSTONE, L. L. (1938a): *Primary Mental Abilities.* Chicago: University of Chicago Press.

______________, (1944): *A Factorial Study of Perception,* Chicago, University of Chicago Press.

______________, (1947): *Multiple Factor Analisys,* Chicago: University of Chicago Press.

THURSTONE, L. L. y THURSTONE, T. G. (1941): *Factorial Studies of Intelligence.* Chicago: University of Chicago Press.

VERNON, P. E. (1950): *The Structure of Human Abilities.* New York: Wiley.

___________, (1971): *The Structure of Human Abilities.* Methuen & Co. London, Nueva impresión de la 2a edición de 1961.

WISSLER, C. (1901): «The Correlation of Mental and Physical Traits». *Psychological Monographs,* 3, págs. 1-62.

WITTEBORN, J. R. (1945): «Mechanical Ability, its Nature and Measurement I: An Analysis of the Variables Employed in the Preliminary Minnessota Experiment». *Educational and Psychological Measurement* 5, págs. 241-260.

YELA, M. (1949): «The Application of the Principe of Simple Structure to Alexander's Data». *Psychometrika,* 2, págs. 121-135.

________, (1963): «Los factores de orden superior en la estructura de la inteligencia». *Rev. Psic. Gral. Apl. 68 y 69*, págs. 1.075-1.092, Madrid y *Actas del I Congreso Nacional de Psicología*, págs. 613-619, Madrid.

CAPÍTULO 33

Investigaciones españolas sobre la estructura factorial de la inteligencia técnica y su aplicación a la selección de personal

MARCELO PASCUAL FAURA
Universidad San Pablo CEU

Antecedentes

Los trabajos sobre la inteligencia técnica, bajo el punto de vista factorial, que inicia el profesor D. Mariano Yela con el profesor Thurstone durante su permanencia en la Universidad de Chicago fueron continuados en España en el entonces recién creado Departamento de Psicología Experimental del CSIC, posteriormente en su Cátedra de Psicología en la Facultad de Filosofía de la Universidad Complutense, el Instituto Nacional de Psicología Aplicada y Psicotécnica, y posteriormente en la actual Facultad de Psicología de la Universidad Complutense.

El propósito inicial de estos estudios puede resumirse en: confirmar en muestras españolas los factores descubiertos y claramente verificados en otros países, como los factores espacial dinámico *S2* y experiencia mecánica *M*; aclarar la naturaleza de varios factores mal conocidos, como por ejemplo, el de «relaciones espaciales»; y someter a comprobación experimental nuevas hipótesis acerca de las aptitudes técnicas y mecánicas, y a partir del año 1964, indagar sobre la estructura y dimensiones de la «inteligencia técnica».

Con este propósito se procede a la recopilación y estudio de la bibliografía y material de tests más característicos de los factores descubiertos hasta entonces, así como de las baterías con mayor validez para pronosticar el éxito en estudios técnicos, oficios y profesiones de tipo mecánico; adaptación de tests extranjeros y elaboración de otros nuevos; formulación de hipótesis directivas para la investigación, experimentación de los tests elaborados y adaptados en diversas muestras de la población industrial y técnica española; selección en función de los resultados obtenidos, de las pruebas más adecuadas para la investigación, y aplicación experimental definitiva de los tests seleccionados.

El estudio de las investigaciones realizadas en este campo le llevan a la conclusión de que la «inteligencia técnica» o aptitud mecánica, como prefieren denominarla los autores anglosajones, consiste en una buena disposición para realizar con éxito tareas que requieren, por lo general, la comprensión y uso de máquinas; así entendida, esta aptitud parecía encontrarse constituida por un complejo de capacidades, intereses y conocimientos, formando parte de la misma la invención de mecanismos y la inteligencia que se manifiesta en la solución de problemas en los que intervienen objetos espaciales en movimiento. En distinto grado y con diversos matices debe ser poseída por ingenieros, pilotos, conductores, operarios especializados, etcétera, que realizan diversas tareas industriales.

Los resultados de estos primeros trabajo (YELA, 1949; 1954; 1967) sobre la inteligencia técnica que, como aspecto de la misma inteligencia se consideró también como un campo de covariación continuo, heterogéneo y jerarquizado, se exponen resumidamente a continuación.

> *La inteligencia técnica —aptitud mecánica de los anglosajones— es la capacidad para comprender y manejar herramientas y máquinas y resolver problemas relativos a su funcionamiento. Es el tipo de inteligencia que reclaman muy especialmente los estudios de ingeniería, que exigen las diversas tareas profesionales de carácter mecánico y que, en sus niveles más altos, interviene en la comprensión e invención de máquinas y aparatos y, en general, en el dominio inteligente del mundo físico.*
>
> *La inteligencia técnica, así entendida, es una capacidad muy compleja, y constituye una de las dimensiones principales de la estructura diferencial de la inteligencia y en su composición intervienen numerosos factores de tipo lógico, perceptivo, imaginativo y psicomotor. Su núcleo distintivo y característico está constituido por las diversas dimensiones del factor espacial.* (YELA, 1967)

Los requisitos y conclusiones de estas primeras investigaciones sobre la inteligencia técnica que, como aspecto de la misma inteligencia, se consideró también como un campo de covariación continuo, heterogéneo y jerarquizado, se recogen en Yela (1949); Yela, Pascual y Murga (1965); Yela (1967); Yela y Pascual (1965); Pascual (1975 a, b; 1992) y Yela (1973).

Inteligencia técnica y aptitud de vuelo

Los estudios sobre la aptitud de vuelo se inician en el año 1954, intentando esclarecer experimentalmente los fundamentos teóricos y prácticos de la medida de esta hipotética aptitud. Las investigaciones que se venían realizando sobre la inteligencia técnica o aptitud mecánica constituían el marco adecuado para indagar sobre la estructura y dimensiones de la aptitud de vuelo.

Así, en el año 1964 se comienza la recopilación y estudio de trabajos que complementarán los ya realizados hasta entonces. Se realiza un análisis factorial de los tests de aptitud mecánica de McQuarrie (YELA, PASCUAL y MURGA, 1965) tratando de encontrar una base empírica que permitiera formular con rigor hipótesis sobre algunos aspectos poco conocidos de la inteligencia técnica, concretamente sobre los factores más estrictamente motores y periféricos de dicha aptitud.

En base a los resultados obtenidos en estudios anteriores se pensó que la aptitud de vuelo, en lo que tiene de inteligencia técnica, es la capacidad para comprender y manejar artefactos o ingenios aéreos y resolver problemas relativos a su funcionamiento. Es el tipo de inteligencia que reclaman muy especialmente los estudios que realizan los pilotos profesionales, que exigen las diversas tareas de carácter mecánico-aeronáutico y, que junto con otros aspectos que forman la inteligencia técnica, se requiere en los estudios y trabajos de ingeniería aeronáutica e interviene, en los niveles más altos, en la comprensión e invención de ingenios aeronáuticos y astronáuticos y, en general, en el dominio inteligente del mundo físico (PASCUAL, 1992).

Estudios factoriales sobre la inteligencia técnica habían mostrado que esta aptitud era una de las dimensiones principales de la estructura diferencial de la inteligencia y que en su composición intervienen muchos factores de tipo lógico, perceptivo, imaginativo y psicomotor, siendo su núcleo distintivo y característico el factor espacial.

En una primera etapa, los estudios se orientan a determinar el grado en que la puntuación denominada «aptitud de vuelo» representa la capacidad de los aspirantes a piloto para aprender a volar y, al mismo tiempo, se intenta averiguar el poder discriminativo de esta puntuación entre los pilotos españoles con variada experiencia de vuelo y edad. Marcelo Pascual (PASCUAL, 1971) resume las investigaciones realizadas en tres muestras de pilotos con variada experiencia de vuelo y edad (n = 634) y tres muestras de aspirantes a piloto de diferente nivel socioeconómico y cultural (n = 1.624) demostrándose el poder discriminativo de la batería de tripulaciones aéreas (USAF Aircrew Classification Battery) entre los pilotos y aspirantes a piloto.

La necesidad y posibilidad de medir esta hipotética aptitud de vuelo viene determinada por tres aspectos distintos pero íntimamente relacionados que, a su modo de ver, justificaban la necesidad de seleccionar a los aspirantes a pilotos el problema de las bajas y su repercusión económica durante la formación de los futuros pilotos; la seguridad de vuelo, consecuencia de una buena selección y formación de pilotos y, finalmente, los problemas de adaptación a los nuevos modelos de aviones.

Para darnos una idea acerca de la complejidad de las aptitudes que se requieren para el vuelo, se puede considerar que lo que vulgarmente se entiende por inteligencia general llega a explicar hasta el 50 % de la varianza común en la mayoría de los aprendizajes más académicos, mientras que en el adiestramiento de pilotos viene a determinar aproximadamente el 10 % de la varianza del criterio práctico de vuelo. El empleo de los tests de aptitud ha contribuido a reducir los gastos en la formación de pilotos y a aumentar la seguridad del vuelo. Con anterioridad a la selección psicológica: tres de cada cuatro aspirantes a piloto solían fracasar en alguna parte de este aprendizaje, con el consiguiente riesgo de accidentes y un incremento considerable de los gastos.

Como ocurre con la mayoría de las actividades humanas, en la acción de pilotar se ponen de manifiesto las diferencias individuales. Estas diferencias en cuanto a la aptitud de vuelo se refiere, hacen necesaria una medición rigurosa, fiable y válida de la misma, con objeto de pronosticar y discriminar qué sujetos obtendrán éxito en el aprendizaje y ejecución de vuelo y cuáles no.

Los estudios realizados con alumnos de la Milicia Aérea Universitaria (MAU) y con los aspirantes a ingreso en la Escala de Pilotos de Complemento en la Escuela Elemental de Pilotos para determinar sus aptitudes de vuelo demuestran, sin lugar a dudas, que la batería de tests de vuelo utilizada por el Ejército del Aire español tiene una validez comparable a la de los utilizados por otros ejércitos.

Los siguientes gráficos muestran el poder predictivo de la puntuación «Aptitud de Vuelo». En el primer gráfico puede apreciarse cómo un porcentaje mínimo de alumnos que obtienen puntuaciones de ocho y nueve (en una escala de estaninos) no aprobaron los cursos, mientras que la mayoría de alumnos con puntuaciones inferiores a seis, no superan los cursos. En el segundo de los gráficos se compara el valor predictivo de la puntuación «Aptitud de Vuelo» con la «Nota Cultural», poniéndose de relieve el nulo poder predictivo de esta última para pronosticar el éxito en vuelo.

Batería de Tests	***RESULTADOS PRÁCTICOS DE LA ENSEÑANZA EN LAS ESCUELAS ELEMENTAL, BÁSICA, REACTORES Y POLIMOTORES***										
Puntuaciones en «Actitud Vuelo»	***Ingresados los que hicieron los test***	***BAJAS Y MOTIVOS POR EL QUE SE PRODUJERON***								***APROBARON LOS CURSOS***	
		POR VUELO		***POR TEÓRICAS***		***OTRAS CAUSAS***		***TOTAL***			
		N.°	***%***	***N.°***	***%***	***N.°***	***%***	***N.°***	***%***	***N.°***	***%***
8 y 9	81	20	25	4	5	6	7	30	37	51	63
6 y 7	279	100	36	33	12	46	16	179	64	100	36
4 y 5	293	128	44	43	14	46	16	217	74	76	26
1, 2 y 3	136	60	44	41	30	18	13	119	87	17	12

Gráfico 1
Validez predictiva de la puntuación «Aptitud de vuelo». *Fuente*: Pascual M. (1971).

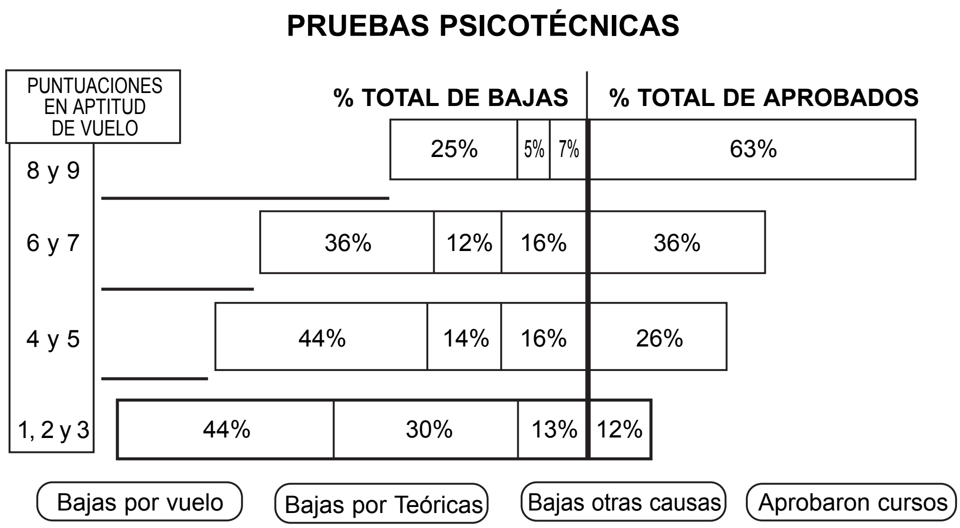


Gráfico 2
Validez predictiva de las pruebas psicotécnicas. *Fuente*: Pascual M. (1971).

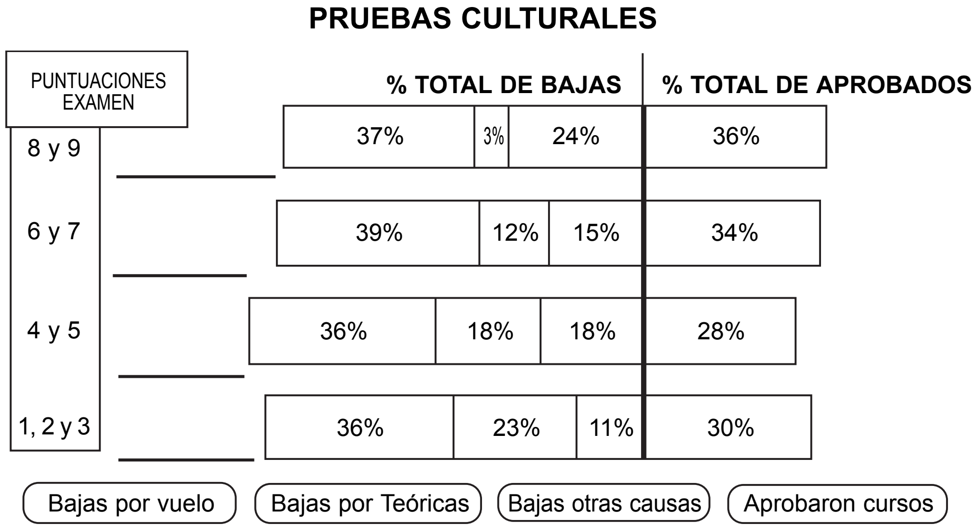


Gráfico 3
Validez predictiva de las pruebas culturales. *Fuente*: Pascual M. (1971).

Comprobada la utilidad práctica de la batería de tripulaciones aéreas, se intenta averiguar a qué se debe su utilidad para predecir el éxito del aprendizaje de vuelo, así como su poder para diferenciar entre pilotos y aspirantes a piloto, tratando de confirmar en muestras españolas los factores descubiertos y claramente verificados a nivel internacional, al mismo tiempo que se intenta ampliar el conocimiento sobre la inteligencia técnica y la hipotética aptitud de vuelo.

En 1968 se publica el primero de los estudios realizados con aspirantes a piloto, Yela y Pascual (1968). Se administran las baterías de McQuarrie, Guilford y algunos tests de Thurstone, en total treinta variables, a una muestra de ciento ochenta y tres aspirantes a piloto, con edades comprendidas entre 17 y 21 años y una formación equivalente a bachiller elemental; obteniendo seis factores de primer orden: rapidez manual (*RM*), espacial complejo (*S*), cibernético (*CB*), precisión manual (*PM*), perceptivo (*P*) y detallismo (*Dt*); y un factor de segundo orden, que interpretan como «aptitud mecánica general», que viene a representar la unidad de covariación de una estructura compleja, en la que se distinguen varias aptitudes interdependientes, destacando entre ellas los factores espaciales y perceptivos y, en segundo lugar, los factores de tipo psicomotor.

Posteriormente, se repitió la aplicación de la batería junto con otras pruebas complementarias, entre ellas la escala de Alexander, en otro grupo de doscientos veinticinco aspirantes a piloto y con las mismas características que el anterior, pasando éstos por cuarenta y dos situaciones experimentales.

Marcelo Pascual (PASCUAL 1975a, 1975b) resume los resultados obtenido en los dos estudios factoriales. En el análisis de primer orden se habían verificado los factores: espacial complejo (*S*), que en el segundo estudio se logró descomponer en espacial estático (*S1*), dinámico (*S2*) y topológico perceptivo (*S3*); cibernético (*CB* o *S4*), o coordinación psicomotora múltiple; orientación espacial (*S5*); cinestésico (*S6*); razonamiento complejo (*R*); perceptivo (*P*) o rapidez de percepción activa; información mecánica (*IM*); rapidez manual (*RM*); precisión manual (*PM*) y detallismo (*Dt*); resultados que parecían confirmar los factores hipotetizados excepto en lo que se refería a la flexibilidad y clausura perceptiva.

En el análisis de segundo orden se obtienen dos factores, uno general de relaciones espaciales (*RE*) y otro de visualización general (*Vz*). El primero representa la «aptitud de vuelo general», constituida por la covariación de una estructura compleja en la que destacan los factores espaciales, perceptivos, de información y razonamiento. El otro factor de segundo orden viene definido, fundamentalmente, por la visualización dinámica (*S2*) que constituye una dimensión más específica e independiente de la anterior.

Los resultados obtenidos muestran que las diversas aptitudes espaciales descubiertas son interdependientes. De los nueve factores obtenidos en el primer orden, seis son netamente espaciales y los tres restantes, rapidez manual, información mecánica y razonamiento, también presentan cierto contenido de naturaleza espacial.

Los nueve factores de primer orden determinan dos factores independientes de segundo orden, interpretados como «visualización general» y «general de relaciones espaciales».

Los factores «topológico» y «cibernético» parecen constituir el núcleo distintivo de las relaciones espaciales en lo que concierne a la aptitud de vuelo. El factor «topológico» representa el aspecto predominantemente perceptivo de dicha aptitud. El factor «cibernético» representa el aspecto «directivo» predominantemente coordinador y psicomotor de la aptitud de vuelo.

El piloto ha de permanecer alerta durante el vuelo para prever y prevenir cualquier incidencia o emergencia que pueda presentarse. En todo momento tiene que percibir con rapidez los estímulos procedentes del espacio que le circunda, para elaborar, controlar y dirigir una serie de movimientos, integrándolos en una respuesta espacial psicomotora que se ajuste a la situación espacial estimulante del campo perceptivo, a fin de orientar en una cierta dirección —decisión— el desplazamiento del avión, y reconocer imaginativamente la posición final del aparato antes de que haya realizado la maniobra requerida.

En estrecha relación con los factores indicados se encuentran otros, reiteradamente confirmados, como los de «información mecánica», «razonamiento» y «rapidez manual».

Las conclusiones indicadas se basan en resultados empíricos y experimentales, obtenidos mediante el análisis estadístico y factorial de numerosas variables que cubren un amplio campo de las actividades espaciales, mecánicas y técnicas exigidas para el aprendizaje y realización correcta de la compleja tarea del piloto. El estudio de la aptitud de vuelo puede y debe hacerse desde diversos puntos de vista. Nosotros lo hemos abordado, fundamentalmente, bajo el punto de vista factorial. En esta metodología se fundamentan los resultados y en ella reside su garantía científica y sus limitaciones (Pascual, 1975a).

Inteligencia técnica y aptitud de conducción

En 1954 inicia su funcionamiento el gabinete psicotécnico de la Escuela Central de Automóviles del Ejército del Aire español. Bajo la dirección del Dr. D. José Luis Pinillos se comienzan una serie de estudios tratando de averiguar las aptitudes más destacables de los conductores de automóviles.

Tras la realización de diversos estudios (Germain, Pinillos, Ramo y Pascual, 1958, 1959; Germain, Pinillos y Pascual, 1959) dirigidos a comprobar la utilidad práctica de las baterías de tests aplicadas, surge la necesidad de averiguar por qué lo eran.

Con los datos procedentes de una muestra formada por ciento tres mecánicos conductores, de edades comprendidas entre los 37 y 50 años, con un nivel profesional homogéneo, y nivel cultural equivalente a enseñanza primaria, que estaban realizando un curso de perfeccionamiento para su promoción a una categoría profesional equivalente a mandos medios, los cuales habían pasado por treinta y seis situaciones experimentales; se realiza un análisis factorial exploratorio, ya que no se disponía de hipótesis bien definidas de antemano, tratando de averiguar las dimensiones principales de covariación en el campo de las «aptitudes de conducción» y así poder elaborar hipótesis provisionales basadas en la interpretación de cada una de las posibles dimensiones.

El análisis de los datos, Marcelo Pascual Faura (Pascual Faura, 1979), se basó en el supuesto de que las aptitudes de conducción en lo que tienen de inteligencia técnica o aptitud mecánica pueden considerarse como la capacidad para comprender y manejar vehículos automóviles y resolver tanto los problemas relativos a su funcionamiento, como los que puedan presentarse durante la conducción.

El análisis de primer orden permitió verificar los siguientes factores: orientación de la respuesta; destreza y rapidez perceptivo manual; precisión de coordinación visomanual; precisión de control; experiencia mecánica y razonamiento general.

En el análisis de segundo orden surgieron dos factores, uno «General de relaciones espaciales» y otro de «Coordinación múltiple». El primero representa la aptitud general del mecánico conductor, constituido por la covariación de una estructura compleja en la que destacan los factores espaciales, perceptivos, manipulativos, informativo y de razonamiento. El otro factor de segundo orden viene definido por la coordinación psicomotora múltiple, que constituye una dimensión independiente de la anterior.

Las conclusiones a las que se llega fueron:

— La aptitud de conducción se ha verificado por la covariación empírica de todos los tests y factores de carácter espacial.
— La aptitud de conducción puede expresarse en función de una aptitud general de tipo técnico-mecánico-espacial, que permite resolver inteligentemente problemas espaciales y cinéticos, y constituye un aspecto de la inteligencia técnica.
— La aptitud de conducción forma parte de la estructura diferencial de la inteligencia, interdependiente con las demás dimensiones y dependiente, como todas las otras dimensiones, de factores cognoscitivos más amplios y fundamentales.
— La aptitud de conducción es compleja y está constituida por un factor de razonamiento, y más característicamente, por un complejo de factores psicomotores y sobre todo espaciales.
— El núcleo distintivo de la aptitud de conducción, como parte o aspecto de la inteligencia técnica, es el factor espacial general *S*. Comprende en esta muestra dos subfactores: «General de relaciones espaciales» y «Coordinación múltiple».
— El factor general de relaciones espaciales se manifiesta en tareas que requieren la aptitud para realizar movimientos diestros y bien dirigidos bajo condiciones de velocidad.
— El factor de coordinación múltiple, prácticamente independiente de las relaciones espaciales, en esta muestra, se manifiesta en tareas que requieren la realización de movimientos coordinados y ajustes precisos en operaciones de control y la percepción e interpretación de las características espaciales del estímulo.
— El amplio factor de relaciones espaciales está ligado de forma compleja a otros factores cognoscitivos y, en la muestra considerada al factor de razonamiento, a la precisión de coordinación visomanual y a la experiencia.

Resultados de las investigaciones sobre la inteligencia técnica

Marcelo Pascual Quintana (PASCUAL, 1992) extracta los resultados y conclusiones de las investigaciones realizadas hasta ese momento sobre la estructura y dimensiones de la inteligencia técnica.

La estructura factorial del conjunto de variables utilizadas, representativas de las baterías de aptitud mecánicas de McQuarrie, Alexander, Guilford y Thurstone obtenidas en muestras de aspirantes a pilotos españoles, se muestra en la Figura 1.

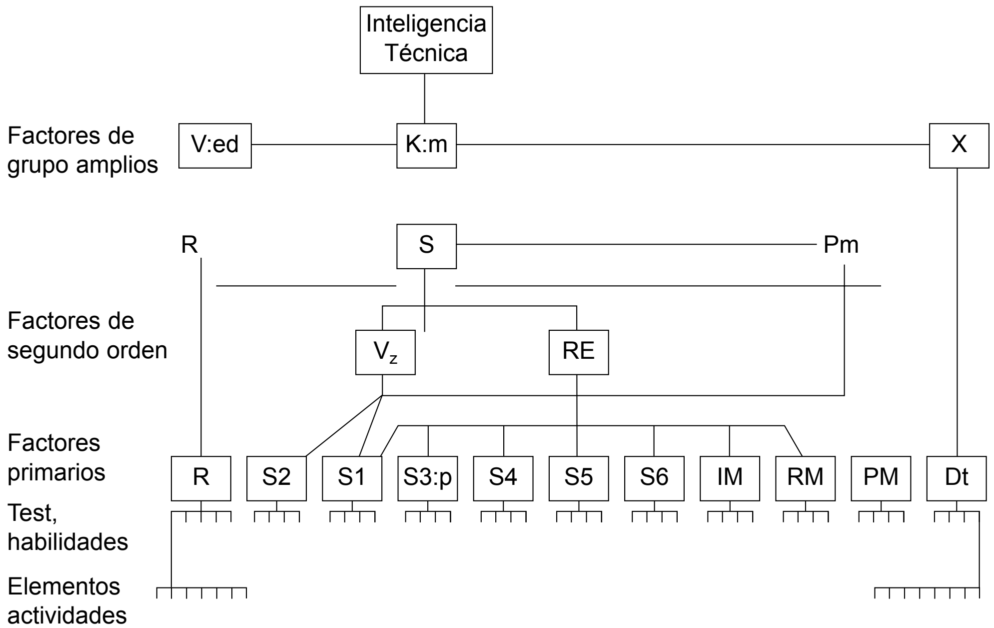


Figura 1
Estructura factorial de la inteligencia técnica. *Fuente*: Pascual M. (1992).

En el área espacial-técnico-mecánica (*K:m*) se incluyen los factores descubiertos en varios estudios, tratando de plasmar en el esquema las relaciones de dependencia y subordinación de los factores de primero y segundo orden, así como la posible equivalencia entre algunos de los primarios obtenidos.

El esquema resume y condensa los resultados de estas investigaciones. El conjunto de tareas realizadas por aspirantes a pilotos típicas de los tests y baterías de probado valor selectivo en trabajos técnicos, mecánicos y aeronáuticos, puede expresarse en función de una aptitud general de tipo técnico-mecánico-espacial.

La estructura diferencial de la inteligencia técnica está formada por un factor general técnico-espacial que se subdivide en una aptitud espacial —su núcleo más importante— y varias perceptivas y psicomotoras. Los dos grandes subfactores —que han recibido cierta confirmación neurológica—, se expresan a través de la covariación de otros varios en una jerarquía escalonada, como acontece en todos los campos de la inteligencia. Todos los resultados conducen a la síntesis descriptiva que ha denominado Yela Teoría del Continuo Heterogéneo.

Otras investigaciones sobre la aptitud espacial

De especial interés son las investigaciones de Juan Carro y Gerardo Prieto (CARRO, 1985 y PRIETO y colaboradores, 1992) en la Universidad de Salamanca sobre la inteligencia espacial y la aptitud de vuelo.

Carro (1985), utilizando una muestra de pilotos con una media de edad de 22 años de nivel universitario que se encontraban en el mismo momento de aprendizaje de vuelo, fase inicial del vuelo visual, realiza un análisis factorial de las puntuaciones obtenidas por la muestra en una batería de tests multifactorial de aptitudes compuesta de quince pruebas de papel y lápiz, utilizando el procedimiento de extracción de factores de componentes principales y rotación varimax. Extrae tres factores cuyos valores propios superan la unidad y explican el 52,4 % de la varianza. Éstos son: factor de visualización espacial general; factor de habilidad perceptiva general; factor de razonamiento abstracto.

Por último, y en lo que respecta a la inteligencia espacial, considera Carro que la estructura factorial de la inteligencia espacial está caracterizada por tres dimensiones básicas: visualización espacial general, habilidad perceptiva general, y razonamiento abstracto.

Las dos primeras dimensiones son de naturaleza general en cuanto que en ellas se encuentran subaptitudes que han sido descritas de forma aislada en otros niveles de edad o por razón de sexo (PRIETO y VEGA, 1979; GONZÁLEZ TABLAS, 1983). Así, en la visualización espacial encontramos incluidas la visualización estática (*S1*) y dinámica (*S2*), en la perceptiva general, la rapidez (*P*) y la topológica (*S3*).

Este hecho pone de manifiesto que la estructuración de la inteligencia en esta muestra se compone de dimensiones de amplio espectro sin diferenciación en las subaptitudes específicas de que se compone la habilidad espacial. (CARRO, 1985)

Verificación de los modelos tradicionales de la estructura factorial de la inteligencia técnica mediante técnicas de análisis factorial confirmatorio, en función del nivel académico de los sujetos y al eliminar el influjo del factor de razonamiento

Objetivos e hipótesis generales

Hasta este momento las muestras de referencia en estos trabajos estaban formadas por obreros adultos no cualificados de diferentes edades, procedencia y nivel cultural, Yela (1967); Yela, Pascual y Murga (1965); y por aspirantes a pilotos, con edades comprendidas entre los 17 y los 21 años y, formación académica equivalente a bachiller elemental (YELA y PASCUAL, 1968), (PASCUAL, 1975, 1992).

Marcelo Pascual Faura (PASCUAL FAURA, 1997) plantea en su tesis doctoral, como un intento de establecer con procedimientos de análisis factorial confirmatorio, la mencionada estructura.

La hipótesis que se pone a prueba por lo tanto, es la siguiente:

— La inteligencia técnica no es una aptitud simple, sino que es un constructo de naturaleza multidimensional de tipo técnico —mecánico— espacial, constituida por una jerarquía de factores, fundamentalmente espaciales, como son el de visualización y relaciones espaciales, ligado éste de forma compleja a otros factores verbales, de razonamiento y psicomotores, así como a la experiencia y a los conocimientos técnico-mecánicos.

Otras dos hipótesis ligadas a la anterior son que se obtendrán estructuras factoriales en la inteligencia técnica equivalentes:

— En muestras de diferente nivel académico y/o cultural.

— Al eliminar de las correlaciones el influjo del razonamiento.

La hipótesis principal objeto de esta investigación, se examinará por el medio de técnicas de reducción de la dimensionalidad: análisis factoriales exploratorios y fundamentalmente con técnicas de análisis factorial confirmatorio no utilizadas hasta el momento en los estudios revisados.

Para la segunda y tercera hipótesis especificadas se utilizarán las técnicas ya mencionadas y el análisis de componentes simultáneos[1].

Para comprobar las referidas hipótesis sobre la inteligencia técnica se han obtenido datos sobre un total de trescientos noventa y siete sujetos, repartidos en dos muestras de aspirantes a pilotos de diferente nivel académico.

---

[1] Se realizaron los siguientes análisis estadísticos: 1) Análisis descriptivo univariante de todas las variables del estudio. Estos análisis fueron realizados con el programa SPSSW; 2) Análisis bivariante de las correlaciones entre las variables y de sus correlaciones parciales, eliminando el influjo de los tests de razonamiento. Estos análisis fueron realizados con el programa BMDP6R del paquete estadístico BMDP; 3) Comparaciones entre grupos, para cada uno de los tests administrados. Estos análisis se realizaron con el programa SPSSW; 4) Análisis discriminante entre ambas muestras. Este análisis se realizó con el programa BMDP7M del paquete estadístico BMDP; 5) Análisis factoriales exploratorios, por el procedimiento de extracción de factores de componentes principales y, dos procedimientos de rotación: Ortogonal (procedimiento Varimax); Oblicua (procedimiento Oblimin). Interpretando los componentes del patrón rotado. Estos análisis fueron realizados con el programa factorial del SPSSW; 6) Análisis de componentes simultáneos (SCA) con el fin de tratar de encontrar la mejor estructura común a las dos muestras. Este análisis fue realizado con el programa SCA; 7) Los análisis factoriales confirmatorios se realizaron todos con el programa LISREL 8W (JÖRESKOG y SORBON, 1993).

La primera de ellas, formada por ciento setenta y tres sujetos, eran aspirantes a pilotos del centro de selección de la Academia General del Aire (CSAGA), y se les exigía para el ingreso en dicho centro tener aprobado como mínimo el Curso de Orientación Universitaria.

La segunda muestra, compuesta por doscientos veinticuatro sujetos, también aspirantes a pilotos, pero en este caso a la Escuela de Pilotos de Complemento (PC), para lo cual se les exigía como mínimo bachiller elemental o un nivel equivalente.

Respecto a las muestras utilizadas, cabe destacar que los resultados del análisis discriminante señalan que prácticamente el 99 % de los sujetos, aspirantes a pilotos del centro de selección de la Academia General del Aire, de nivel académico universitario, así como el 98 % de los sujetos, aspirantes a pilotos de la Escuela de Pilotos de Complemento, de nivel académico más bajo, bachiller elemental están correctamente clasificados en los grupos de procedencia, lo que representa un 98,5 % de casos bien clasificados.

Se evalúan treinta y siete variables, los tests más representativos de las baterías de aptitud mecánica de Guilford y de Thurstone, así como la de McQuarrie.

Los objetivos generales del estudio pueden considerarse dobles. En primer lugar, realizar un estudio exploratorio de las aptitudes que integran la estructura factorial de la inteligencia técnica y en segundo lugar, un estudio confirmatorio de ajuste de un modelo teórico a los datos empíricos, con las correspondientes pruebas de hipótesis de bondad de ajuste del modelo.

La finalidad del estudio exploratorio también era doble; de un lado, comparar la estructura factorial de la inteligencia técnica en muestras de diferente nivel académico; por otra parte, todos estos estudios servirían para la formulación de los modelos teóricos verificados mediante procedimientos de análisis factorial confirmatoria.

Análisis factoriales exploratorios

Los resultados de los análisis factoriales exploratorios es la técnica utilizada en las investigaciones anteriores para poner a prueba la estructura factorial de la inteligencia técnica, realizados en este trabajo con dos muestras de aspirantes a pilotos de diferente nivel académico, en los que se han obtenido soluciones con nueve factores al incluir todas las variables utilizadas y con ocho factores, cuando se elimina el influjo de los tests de razonamiento, y se analiza la matriz de correlaciones parciales; para lo cual se ha utilizado en ambas soluciones el método de extracción de factores de componentes principales y los procedimientos de rotación ortogonal, varimax y el procedimiento de rotación oblicua, Oblimin; interpretándose en todos los casos los componentes del patrón rotado.

Resultados de los análisis factoriales exploratorios con todas las variables

En el análisis de primer orden se extrajeron nueve factores para cada una de las muestras, de los cuales ocho resultaron prácticamente idénticos, viniendo definidos por los mismos tests y con saturaciones similares. Aunque en términos generales, están ligeramente inferiores en la muestra de nivel académico más bajo, y otro factor, uno en cada muestra, es diferente.

Los factores comunes a las dos muestras y los tests que los definen fueron:

- Factor de visualización espacial (*S2* o *Vz*).
- Factor espacial estático (*S1*).
- Factor de información mecánica (*IM*).
- Factor cinestésico (*K* o *S6*).
- Factor topológico (*S3*).
- Factor cibernético o de coordinación múltiple (*CB* o *S4*).
- Factor de razonamiento (*Rz*).

Los factores que resultaron distintos fueron:

- Factor de percepción activa (*Pa*). —El factor surgió en la muestra de aspirantes al CSAGA.

  La nota distintiva de los tests que definen el factor, además de la percepción rápida de igualdades y diferencias entre objetos sensorialmente presentes, reclaman cierta intervención activa del sujeto en la realización perceptiva de instrucciones generales y la identificación del objeto que las cumple.
- Factor de orientación (*Ortc*. o *S5*). —El factor surgió en la muestra de aspirantes a PC.

  Las pruebas que lo definen exigen la orientación del sujeto respecto al espacio entorno, por lo que parece representar la aptitud para orientarse en el espacio y comprender el modelo de estímulos visuales con respecto al cuerpo del observador como marco de referencia.

En el análisis de segundo orden se obtuvieron soluciones con uno, dos y tres factores. En el primero de los casos, el factor general obtenido en ambas muestras indica que existe cierta unidad en el conjunto de la batería de tests administrada. En la medida que esta batería aprecia la inteligencia técnica, este factor representa la aptitud técnico-espacial general. Esta unidad se encuentra representada por la unidimensionalidad del primer componente principal de segundo orden, pero no en la unidad de una aptitud simple, sino en la unidad de covariación de una estructura compleja en la que se distinguen varias subdimensiones o aptitudes interdependientes, siendo su núcleo fundamental la aptitud espacial y varias perceptivas y psicomotoras, en cuya ordenación jerárquica influye determinantemente el nivel académico de los sujetos que integran las muestras utilizadas en las investigaciones así como las estrategias de solución de problemas utilizados por éstos, verificándose así la Teoría del Continuo Heterogéneo y Jerárquico de la Inteligencia del profesor Yela.

Los resultados obtenidos en las soluciones con dos y tres factores muestran patrones factoriales algo diferentes en las muestras utilizadas. Así, éstos parecen indicar que los sujetos de la muestra de nivel académico universitario han resuelto mayoritariamente las tareas requeridas por los elementos de los tests sintéticamente procediendo a su resolución por impresión global y mediante procesos relativamente rápidos de percepción y visualización; mientras que los sujetos de la otra muestra, de nivel académico más bajo, han recurrido mayoritariamente a resolverlos analíticamente, procediendo discursivamente mediante procesos relativamente largos de abstracción, aprehensión de relaciones y razonamientos diversos, hecho éste que se refleja en la reiterada presencia del factor de razonamiento, con pesos muy elevados, en todos los factores de segundo orden y en los coeficientes de correlación que muestran con el resto de los primarios.

Resultados de los análisis factoriales exploratorios eliminando el influjo del razonamiento

En investigaciones anteriores, Yela y Pascual (1968); Pascual (1975), surgía un factor que exigía procesos de inducción, deducción de relaciones y correlatos, así como comprender instrucciones complejas y en general resolver problemas espaciales en los que se requiere apreciar y ponderar datos y verificar resultados. Estos procesos netamente intelectuales caracterizan un factor de razonamiento complejo, fundamentalmente de tipo inductivo. Además, este factor mostraba correlaciones apreciables con los restantes factores primarios y, en el segundo orden con el general de relaciones espaciales, resultando independiente del de visualización general.

Con el fin de intentar esclarecer la naturaleza de este factor de razonamiento complejo, se incluyeron en la batería administrada dos tests característicos del factor de razonamiento, analogía de figuras y series numéricas, con el objetivo de una vez confirmado este factor, eliminar el influjo de los citados tests mediante correlaciones parciales, y poder así comparar la estructuras factoriales.

Nuestros resultados confirman los de anteriores investigaciones: en ambas muestras surge un factor de razonamiento complejo de tipo inductivo, definido fundamentalmente por los mismos tests, aunque con saturaciones más bajas en la muestra de nivel académico universitario. En esta muestra presenta correlaciones prácticamente nulas con el resto de factores primarios excepto con el espacial estático y el cinestésico; si bien son coeficientes más bajos que los obtenidos en la otra muestra, de nivel académico inferior, pero similar al de las utilizadas en las investigaciones anteriores, en las que sí presenta correlaciones apreciables con todos los factores primarios.

Además cabe destacar que hemos vuelto a confirmar que ninguno de los tests que componen la batería de McQuarrie presenta saturaciones apreciables en los factores de razonamiento y de experiencia mecánica; lo que ratifica la idea original del autor, cuando en el año 1927 publica una batería para medir la aptitud mecánica, independiente de la inteligencia general, cultura y conocimientos mecánicos de los sujetos.

En lo que respecta a los resultados que se obtienen en los análisis factoriales exploratorios cuando se elimina el influjo de los tests de razonamiento, series numéricas y analogía de figuras, utilizados como indicadores del factor mediante correlaciones parciales y que analiza factorialmente la matriz resultante, cabe destacar:

— Los tests que inicialmente presentaban saturaciones superiores a 0,40 en el factor de razonamiento, lectura de instrumentos, lectura de tablas y lectura coordinada en la muestra de aspirantes a pilotos de nivel universitario, y además el de direcciones dos en la muestra de aspirantes a pilotos de complemento, que inicialmente compartían su varianza, fundamentalmente con el topológico han pasado ahora a representar las medidas más puras de ese factor, es decir, a presentar las saturaciones más altas.

— De los ocho factores extraídos en ambas muestras, ninguno se asemeja al inicial de razonamiento, reproduciéndose los restantes factores primarios. De éstos, los de rapidez manual, cinestésico, cibernético y espacial estático son prácticamente iguales, variando en algún caso ligeramente las saturaciones de los tests que los definen. En los de información mecánica y espacial dinámico se verifica lo indicado por Lohman (1989), que cuando se elimina el influjo del razonamiento, los tests de movimientos mecánicos y comprensión mecánica dejan de saturar en el factor espacial dinámico y se mantienen, en nuestro caso incrementados, en el de información mecánica. En lo que respecta a los factores topológico y perceptivo en la muestra del CSAGA y, topológico y orientación en la de PC, en los cuales saturaban los tests que inicialmente compartían su varianza con el de razonamiento, éstos han pasado a presentar los pesos más elevados.

— Al comparar las matrices de correlaciones entre factores primarios, estos coeficientes son en términos generales más bajos cuando se elimina el influjo del razonamiento. Y a su vez, las intercorrelaciones son inferiores en la muestra de nivel académico universitario.

En el análisis de segundo orden, los resultados no son tan uniformes como en el de los factores primarios. En la muestra de aspirantes a pilotos de nivel universitario, de los dos factores extraídos en el segundo orden, uno se identifica como espacial general, *S*, y el otro psicomotor *Pm*, resultados similares a los obtenidos antes de eliminar el influjo del razonamiento.

En la muestra de aspirantes a pilotos de complemento de nivel académico más bajo, de los dos factores extraídos, el primero lo identificamos igualmente como espacial general *S*, y el otro como general de relaciones espaciales *RE*.

Análisis de componentes simultáneos SCA

Los resultados del análisis de componentes simultáneos, SCA, utilizado en esta investigación con la finalidad de obtener la mejor estructura común a los datos de las muestras utilizadas, indican que las varianzas explicadas por el SCA y el correspondiente PCA, es decir, en la mejor solución conjunta y en la mejor solución para cada grupo por separado, el porcentaje de varianza que se pierde en el SCA con respecto al PCA es de 0,72 en la muestra de aspirantes a pilotos de nivel universitario; de 1,11 en la muestra de aspirantes a pilotos de nivel académico más bajo; y de 0,95 cuando se incluyen las dos muestras simultáneamente. Lo que representa que la mejor solución factorial conjunta total, es decir, para las dos muestras, no representa prácticamente ninguna pérdida de la varianza explicada en relación con las mejores soluciones factoriales para cada muestra por separado.

De los ocho factores primarios obtenidos en cada muestra, siete son comunes a ambas y uno diferente, el de percepción activa en la muestra de nivel académico universitario y el de orientación en la muestra de nivel académico más bajo. A excepción del factor de orientación, los componentes factoriales obtenidos en el SCA reproducen, casi idénticamente, los siete factores comunes y el de percepción activa, obtenido en la muestra de aspirantes a pilotos de nivel universitario.

En lo que respecta a las matrices de correlaciones entre los componentes obtenidos para cada una de las muestras, son un fiel reflejo de las matrices de correlaciones entre los factores primarios, reflejando también éstos el predominio de la estrategia analítica utilizada mayoritariamente por los sujetos de la muestra de aspirantes a pilotos de complemento y de la estrategia de visualización, seguida mayoritariamente por los aspirantes a pilotos del CSAGA.

Resultados del análisis confirmatorio

Los resultados del análisis confirmatorio ponen de relieve la solidez del modelo planteado para la inteligencia técnica, bien definida a partir del conjunto de ocho factores, que se ajusta bien a las dos muestras estudiadas.

El modelo pone de relieve la complejidad de este tipo de inteligencia en la que intervienen varios factores de carácter espacial: estático, dinámico y cinestésico, así como otro de orientación y otros factores no específicamente espaciales, pero relacionados con aquéllos, como la información mecánica, percepción activa, rapidez manual y cibernético.

El modelo también establece que la estructura no es simple, puesto que existen numerosos tests que muestran saturaciones en varios de los factores, lo que lleva a importantes relaciones entre los factores primarios.

Conclusiones

Los resultados obtenidos parecen indicar que cuando no se elimina el efecto del razonamiento la misma tarea cambia de composición factorial según los sujetos. A medida que los sujetos van siendo de niveles mentales, culturales y profesionales más altos, las saturaciones de los tests se desplazan sistemáticamente desde los factores de razonamiento a factores de visualización, de relaciones espaciales, de rapidez perceptiva y, finalmente, de pura rapidez motora.

En definitiva, los factores resultantes de un estudio vienen definidos por los tests que saturan en ellos, pero no dependen únicamente de los tests, sino también de las respuestas de los sujetos. Si un mismo test es abordado y resuelto mediante distintos procedimientos o estrategias por los distintos sujetos, cada procedimiento determina una distinta composición factorial del test. En consecuencia, los sujetos distintamente dotados pueden realizar las tareas de distinto modo y las mismas tareas pueden reclamar distintas aptitudes según su nivel de dificultad.

La psicología cognoscitiva ha contribuido enormemente a la comprensión de cómo los sujetos resuelven las tareas figurales tomadas como indicativas de la aptitud espacial y al hacerlo así, han confirmado la sospecha de Spearman, Thurstone y otros acerca de que a menudo, tales tareas miden aptitudes diferentes en los distintos sujetos.

Además, los sujetos no se pueden categorizar fácilmente de acuerdo con las estrategias de solución que utilizan en muchas tareas espaciales, puesto que pueden cambiar de estrategia, particularmente cuando los elementos van siendo cada vez más difíciles.

Este trabajo se enmarca dentro de la tradición psicométrica de la estructura de la inteligencia y las aptitudes, en la línea de las investigaciones iniciadas por Yela y continuadas por Yela y Pascual y tenía como objetivo poner a prueba el modelo de la inteligencia técnica, planteado por los mencionados autores. Creemos que desde este punto de vista, dicha finalidad está cumplida.

BIBLIOGRAFÍA

CARRÓ, J. (1985): *Inteligencia espacial y aptitud de vuelo: estudio desde las perspectivas psicométricas y del procesamiento de la información.* Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca, Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación, Sección Psicología.

GERMAN, J.; PINILLOS, J. L.; RAMO, M. y PASCUAL, M. (1959): «Selección de pilotos en el Ejército del Aire Español». *Revista Psicol. Gral. Apli.,* 49, págs. 75-114.

LOHMAN, D. F. (1989): «Human Intelligence: An Introduction to Advances in Theory and Research». *Review of Educational Research,* Winter, vol. 59, 4, págs. 333-373.

PASCUAL FAURA, M. (1979): «Un análisis factorial de las aptitudes de conducción», Tesis de licenciatura, Facultad de Psicología, Universidad Complutense de Madrid.

_______________, (1997): «La estructura factorial de la inteligencia técnica, en una muestra de aspirantes a piloto». Tesis de doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Psicología.

PASCUAL QUINTANA, M. (1975a): «Estructura y dimensiones de la aptitud de vuelo». Tesis doctoral, Universidad Complutense, Facultad de Filosofía y Letras, Madrid.

__________________, (1975b): «Estructura y Dimensiones de la aptitud de vuelo». *Rev. Ps. Gral. y Apld.,* 30, 133 y 134, págs. 287-332.

__________________, (1992): «Mariano Yela y la inteligencia técnica». En *Inteligencia y Cognición.* Complutense, Madrid.

PRIETO, G. y VEGA, J. L. (1979): «Cambios evolutivos de la estructura de la aptitud espacial». *Revista de Psicología General y Aplicada,* n.º 159. Instituto Nacional de Psicología Aplicada y Orientación Profesional. Madrid.

PRIETO, G.; CARRO, J.; GONZÁLEZ TABLAS, M.; PALENZUELA, P. L.; PULIDO, R. F. y ORGAZ, B. (1992): «La aptitud espacial y el aprendizaje del vuelo aeronaútico». En *Inteligencia y Cognición.* Homenaje al Profesor Mariano Yela. Ed. Complutense.

YELA, M. (1949): «The Application of the Principle of Simple Structure to Alexander's Data», *Psychometrika*, 2, págs. 121-135.

_______, (1967): «El factor espacial en la estructura de la inteligencia técnica». *Rev. Psic. Gral. y Apl.,* 88-89, XXII, págs. 609-635.

_______, (1973): Artículos: «Aptitudes, Inteligencia, Análisis Factorial, Cociente de Inteligencia, etcétera». *Proliber, Gran Enciclopedia Rialp,* Madrid.

YELA, M.; PASCUAL, M. (1968): «La significación estadística de la estructura simple en el análisis factorial». *Rev. Psic. Gral. y Apl.,* 92, págs. 313-323.

YELA, M.; PASCUAL, M. y MURGA, A. (1965): «Análisis factorial de los tests de aptitud mecánica de MacQuarrie», *Rev. Psic. Gral. y Apl.,* 79, págs. 663-675.

CAPÍTULO 34

Historia de las técnicas estadísticas aplicadas al estudio del crecimiento de la información

GLORIA CARRIZO SAINERO
Universidad Carlos III
ANTONIO FRANCO RODRÍGUEZ DE LÁZARO
Universidad San Pablo CEU
PILAR ORDÁS AMO
Universidad San Pablo CEU

Introducción

La comunicación entre los hombres permite eliminar barreras geográficas y temporales haciendo factible el intercambio de conocimientos y el progreso científico en todo momento.

Es evidente que, inicialmente, la comunicación fue oral; las ideas o simplemente las relaciones de cualquier signo estaban basadas en el lenguaje, forma de transmisión que se mantiene durante un período de tiempo desconocido, pero que se supone largo, incluso pudieran haber sido milenios, pues es sabido que esta forma de intercambio de ideas, narrativa, comercio, etcétera, convivía con los albores del libro (prehistoria del libro) hasta que este alcanza una forma tangible y fácilmente manipulable.

Los inicios de la comunicación

El material del libro comienzan siendo los *petroglifos*, signos grabados o pintados en piedra (pictografía como las pinturas rupestres), para transformarse poco a poco, siguiendo el avance de las culturas y las civilizaciones de los pueblos. Así aparecen mensajes escritos sobre barro cocido, tablillas de cera, papiros, pergaminos y papel hasta llegar a los soportes electrónicos actuales que conviven con el papel impreso.

También cambia la forma de la manejabilidad de los soportes independientemente del mensaje que contengan. Los materiales duros: pétreos, arcillosos, de madera recubiertos de cera..., podían presentarse con formas irregulares o geométricas, pero siempre difíciles de manejar, manipular o almacenar, diferentes de los materiales blandos: los papiros, que pueden manipularse en rollos o tiras continuas enrollados en torno a dos ejes; los pergaminos, con los que pueden formarse hojas y cuadernos de diferentes tamaños, y el papel, muy dúctil y manejable.

Los contenidos iniciales son, generalmente, leyes, normas religiosas, leyendas (épicas o líricas), hazañas de dioses, héroes y hombres, magia, música, medicina, filosofía en la que aparecen los números en forma de estudios de astronomía, geometría y aritmética.

La cultura escrita

Mesopotamia y Egipto por el momento parece que son el inicio de la cultura escrita que prolifera en Grecia y Roma.

El hecho de que durante muchos siglos parece que no hubo comercio de libros, no supone que hubiera quienes poseyeran grandes colecciones de ellos. Eran los sacerdotes o los faraones, en Egipto, de donde se tiene memoria de la existencia de la gran Biblioteca de Alejandría, siglo II a.C. (propiciada por los ptolomeos), y su bibliotecario Calímaco, que ideó un sistema de ordenación por materias para facilitar el aumento y el control de la colección libraria así como el acceso a la misma.

En Roma, Calpurnio Pisón, suegro de César, poseía una gran biblioteca que fue sepultada por la erupción del Vesubio y en la que predominaban obras de filosofía escritas en griego en forma de rollos.

Otras grandes colecciones aparecidas en la antigüedad fueron los doscientos papiros encontrados cerca de Gaza correspondientes a los siglos VI y VII d.C., los conocidos como documentos del Mar Muerto o rollos de Qumran, escritos en griego y hebreo, arameo y nabteo, de los siglos I y II d.C., relacionados con la secta religiosa de los exenios.

Con Grecia se extiende el tipo de narrativa o textos. Se publican poemas, obras de teatro (dramas, comedias, sátiras,...), discursos, enciclopedias, diccionarios, historia y obras científicas sobre materias conocidas.

En Roma comienza la proliferación y circulación del libro. Aparecen los editores. Del primero que se tiene noticia es Tito Pompeyo Atico. Estos editores hacían publicidad de sus obras colgando relaciones de las obras disponibles en las termas, el ágora o las *tabernae* (librerías).

La riqueza del Imperio Romano hace que abunden los bibliófilos que coleccionan obras, y que se creen las primeras bibliotecas públicas, disponibles para todos los ciudadanos, y en las que aquéllos que tenían escasas posibilidades económicas podían copiar libros y así poseer obras que les interesaban.

Los editores publicaban sólo novedades, así, no había forma de hacerse con los libros agotados ni con obras de la antigüedad, por lo que aparecen los *libreros de viejo* que poseían las obras difíciles de obtener, adquiridas por diferentes procedimientos y vendidas a precios variables al desconocer el valor de su contenido.

La Edad Media

La extensión de la enseñanza, no sólo a las castas sacerdotales y nobles, sino a otros estamentos sociales (aunque no muy extensos), hace que proliferen libros para estudiantes. Boecio (480-525) escribió varios manuales dedicados a la enseñanza y tradujo obras de Aristóteles a las que añadió reflexiones y comentarios. Estas obras fueron muy utilizadas durante la Edad Media.

Hacia el año 529, el Monasterio de Montecasino (Italia) poseía una importante biblioteca.

Ya introducidos en la Edad Media, comienza el período conocido por los historiadores como «Los Siglos Oscuros», denominación poco acertada ya que la cultura no se detiene, se refugia en los monasterios ante el retroceso que sufre la sociedad.

En esta época surgen obras de gran envergadura como la *Historia francorum,* debida a Gregorio, Obispo de Tours, en el siglo VI, en la que se hace alusión a la situación de la cultura y el desarrollo de la enseñanza; San Isidoro de Sevilla, autor de *Las Etimologías,* obra enciclopédica escrita en XX volúmenes en los que se pretende recoger todos los conocimientos habidos desde la antigüedad hasta el momento de su publicación; en Inglaterra, Beda el Venerable (673-735) era considerado el hombre más culto de su tiempo cuyas obras tuvieron un alcance semejante a las de San Isidoro.

La imprenta y el auge de los libros

En el siglo XVI aparece el libro impreso, con lo que la producción de libros y su circulación aumenta considerablemente. Otro factor que influye en la abundancia libraria es el auge de las universidades.

Otro hecho importante es la generalización del comercio del libro impulsado no sólo por los hechos ya apuntados sino por la proliferación de editores-impresores y la aparición de las ferias comerciales. Las primeras y más importantes fueron las de Frankfort y Leipzig a las que acudían impresores y libreros para comprar y vender obras.

Los siglos XVII y XVIII suponen un importante auge para el libro. Circulan y se editan tantos ejemplares de tan diversas materias que se hace obligatoria la compilación de bibliografías generales, especializadas, regionales y retrospectivas para poder conocer el acervo cultural disponible.

Hechos importantes son la aparición de la enciclopedia moderna (tal como hoy se concibe) impulsada por Francia y los enciclopedistas, las publicaciones periódicas que van a proliferar de forma continua, donde se van a dirigir los especialistas y científicos para comunicar sus ideas, investigaciones, experiencias y hallazgos en las diversas materias que cultivan.

Llama la atención el gran número de libros que circulan y que los Estados deben reunir y ordenar. Esta proliferación de obras tienen diversas causas entre las que son destacables el auge económico de la sociedad que permite la adquisición de libros; el desmembramiento de importantes bibliotecas monacales por la desamortización y nobiliarias cuyos ejemplares salen a subasta; gran cantidad de obras disponibles procedentes de expropiaciones particulares, testamentarías, etcétera.

Técnicas de tratamiento de los libros

Esta abundancia de libros obliga a los países a tomar medidas para recoger toda la disponibilidad cultural circulante. Aparecen las Bibliotecas de los Ateneos, lugares de cultura y discusión donde se reúnen los políticos y los intelectuales; las Bibliotecas Nacionales, que tienen su inicio en las colecciones de los reyes con las que se habían constituido las Reales Bibliotecas, las particulares de los nobles, las que se donan por próceres de la cultura, a las que se suman las obras adquiridas y las conseguidas mediante intercambio entre las grandes bibliotecas de los diferentes países. La gran acumulación de libros en las bibliotecas nacionales se produce con la promulgación de la Ley del Depósito Legal que obliga a depositar cinco ejemplares de cada obra que se edite en cada país.

La implantación de las bibliotecas de acceso libre para todo tipo de públicos es un gran impulso al acceso a la cultura y a la difusión de la información. Con esto se extienden estas unidades de información dando lugar a la redes de bibliotecas públicas dependientes del Estado, las municipales y el desarrollo de las universitarias, además de otras consideradas menores, no por su importancia sino por su especialización o el tipo de lectores concretos a quienes van dirigidas.

El auge que adquiere la lectura en estros centros obliga a perfeccionar las técnicas bibliotecarias (catalogación y clasificación), así como técnicas de gestión. Se hace necesario conocer la situación de la colección libraria y la idoneidad de la misma para los usuarios, las carencias y demandas de obras según materias y la orientación de las personas que acuden para la consulta de las publicaciones.

Estas necesidades expuestas, dan lugar al empleo de técnicas de medidas cuantitativas conocidas como bibliometría, que están basadas en el desarrollo de la Estadística, fundamentalmente la probabilidad.

Fundamentación de la bibliometría

La bibliometría sirve de apoyo a la selección y adquisición de documentos, pero su tarea comienza cuando éstos están suficientemente tratados y dispuestos para ser difundidos.

La metodología bibliométrica es la que se utiliza para construir explicaciones lógicas de zonas de la realidad de las disciplinas científicas a partir de datos extraídos de ellas mismas. Para verificar la validez de esos datos se utilizan leyes, teorías y modelos estadísticos basados en la probabilidad.

Leyes empíricas bibliométricas

Las tres leyes en las que se basa la bibliometría —Bradford, Zipf y Lotka—, surgen a partir de la observación de casos particulares de distribuciones bibliométricas. Han dado lugar a múltiples aplicaciones y estudios bibliométricos. Aunque cada ley se aplica a un determinado fenómeno específico, todas intentan demostrar una sola cosa, que unas pocas publicaciones recogen la mayoría de los artículos o referencias.

Los esfuerzos de los investigadores se han centrado en relacionar estas leyes entre sí, estudiar su validez y ampliar el campo de sus aplicaciones, desde estudios de poblaciones en ciudades hasta su utilización en las publicaciones electrónicas. Mandelbrot y Brookstein se encuentran entre el reducido número de investigadores que se han dedicado a estudiarlas en el campo teórico, ya que elaboraron unas leyes que contemplan, como casos especiales, las derivaciones empíricas de las leyes de Bradford, Zipf y Lotka.

Ley de Zipf

George Kingsley Zipf (1902-1950), filólogo y profesor de la Universidad de Harvard, estudió los cambios fonéticos en el lenguaje y se interesó en la frecuencia de uso de los fonemas. La frecuencia de las palabras de una lengua en el discurso da lugar a estructuras fonéticas. Se puede observar que en todos los idiomas la tendencia general es utilizar más las palabras cortas. De ahí que palabras largas como «cinematógrafo» den lugar a otras como «cine», los nombres largos se sustituyen por siglas, etcétera. A partir de estas investigaciones, Zipt centró su interés en la lingüística, llegando a enunciar la ley que lleva su nombre.

La Ley de Zipf establece que el producto de las frecuencias de utilización de las palabras de un texto dado por sus rangos es una constante que depende del texto analizado. Por tanto, si en un texto ordenamos sus palabras de mayor a menor utilización, se observa que el número de veces que aparece una palabra es inversamente proporcional a la posición que ocupa en la lista.

La ley viene expresada mediante la ecuación:

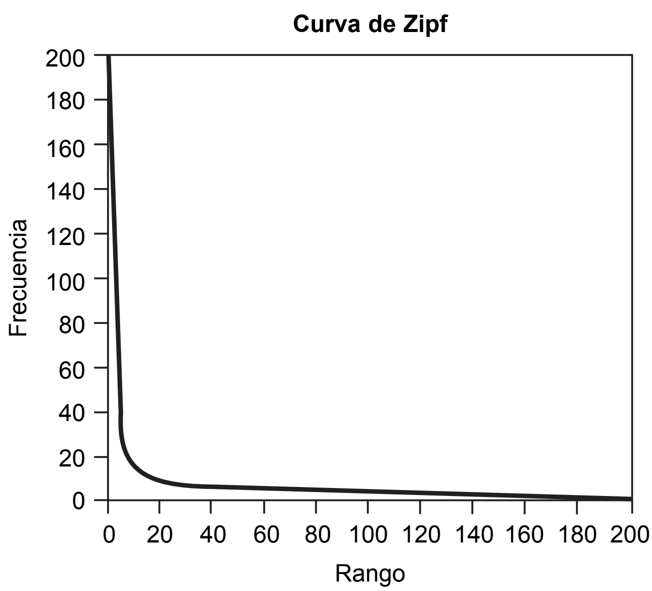
$$rf = C$$

donde r es el rango de una palabra,

f es su frecuencia de utilización,

y C es una constante.

Un ejemplo que describe la distribución de Zipf es:



En el gráfico se observa que hay pocos datos con frecuencia alta, un número medio de datos con frecuencia media, y muchos datos cuya frecuencia es muy baja.

El estadístico Gustav Herdan dijo de esta ley: «Los matemáticos creen en la Ley de Zipf porque piensan que los lingüistas la desarrollaron como una ley lingüística, y por su parte los lingüistas creen en ella porque piensan que los matemáticos la desarrollaron como una ley matemática»[1].

En sus investigaciones, Zipf utilizó el *Ulises*, de James Joyce, en el que obtuvo las frecuencias de utilización de las palabras para después ordenarlas de mayor a menor aparición, asignando el 1 a la palabra más utilizada del texto, el 2 a la segunda más utilizada, etcétera. Donde mejor se aplica la Ley de Zipf es en muestras grandes, al menos de 5.000 palabras.

Benoit Mandelbrot especifica una generalización de esta ley que obtiene realizando dos modificaciones sucesivas. En la primera, añade una constante a al rango y en la segunda incorpora una potencia b a esta expresión. La Ley de Zipf es entonces el caso especial en el que la primera constante es 0 y la potencia es 1.

$$(a + r)^b f = C$$

La generalización de la Ley de Zipf es muy simple, la complejidad añadida radica solamente en ajustar los valores de las dos nuevas constantes. Con esta generalización, se obtienen valores esperados de la frecuencia para cada rango que se ajustan mejor a los datos originales.

En todo documento elaborado en lenguaje natural existe un pequeño grupo de palabras cuya frecuencia es muy alta, mientras que existe un grupo muy amplio de escasa utilización. Se puede observar que la frecuencia relativa de las categorías gramaticales es estable, aunque varíe levemente de un individuo a otro, o de un texto a otro. Así, en español y en francés, los nexos —artículos, pronombres, conjunciones, preposiciones— representan el 50 % de cualquier texto; la otra mitad está constituida por las palabras con significado: sustantivos, verbos, adjetivos, adverbios.

En los diccionarios, esta proporción es distinta, ya que las palabras conectoras representan el 0,5 % del léxico total. Zipf atribuye este fenómeno a la Ley del Mínimo Esfuerzo, según la cual el lenguaje generado por las personas presta un significado amplio a ciertas palabras, como pueden ser «hacer» en español, «faire» en francés, o «get» en inglés, provocando su uso continuo.

En su Ley del Mínimo Esfuerzo, desarrollada en el libro *Human Behaviour and the Principle of Least Effort: An Introduction to Human Ecology,* Zipf defiende que los individuos se esfuerzan en resolver sus problemas minimizando el trabajo total que dedican a solucionar, tanto los problemas inmediatos como los posibles que se planteen en el futuro. Aunque la idea queda perfectamente expresada por Zipf, nunca dio un argumento claro de cómo aplicar este principio a su ecuación.

---

[1] HERDAN, G. (1966): *The Advanced Theory of Language as Choice and Chance,* Berlin: Springer-Verlag.

Benoit Mandelbrot aplica este principio al coste de la comunicación, medido en términos del número de letras y espacios que tiene un texto o un discurso, coste que aumenta cuando se incrementa el número de palabras y su longitud. Otra aplicación es la sugerida por H. S. Sichel, al establecer que la utilización de las palabras pertenecientes al vocabulario de un autor se puede expresar en términos de probabilidad como una distribución de Poisson. Así por ejemplo, un autor empleará con mayor frecuencia las palabras que le resulten familiares que las que no lo son.

Las ideas de Sichel están de acuerdo con el Principio del Mínimo Esfuerzo y con la Ley de Zipf, aunque la distribución Poisson requeriría que la constante de la Ley de Zipf fuera estable (no varíe), sin embargo, la constante de la Ley de Zipf es relativamente inestable, cambiando según el tamaño de la muestra analizada. Otros autores que han estudiado aplicaciones de la Ley de Zipf han sido Herbert Simon, Abraham Bookstein, Chen, Leimkuhler, Bruce M. Hill, y Derek de Solla Price, entre otros.

La Ley de Zipf se aplica a la indexación automática en sistemas de información. El ordenador hace un recuento de las palabras sustantivas o las frases, siendo las palabras que aparecen con mayor frecuencia las que se eligen para representar los sujetos indexados del documento.

La igualdad que expresa matemáticamente la Ley de Zipf no es más que una aproximación que se cumple independientemente de los autores, del tipo de texto y del idioma utilizado. Zipf estaba más interesado en los principios filosóficos de su trabajo que en los aspectos matemáticos. En lo que concierne a los aspectos filosóficos planteó sus ideas sin dejar opción a ninguna duda razonable, mientras que en los aspectos técnicos se limitó a exponer los modelos logrados en sus análisis bibliográficos, dejando a otros el desarrollo matemático.

Ley de Lotka

Alfred Lotka (1889-1949) nació en Leopoli (Lviv), que en aquel momento pertenecía a Austria y en la actualidad a Ucrania. Se licenció en Física y Química en la Universidad de Birmingham. En 1902, se traslada a Estados Unidos donde escribe numerosos artículos de química teórica y el libro *Elements of Physical Biology.* Posteriormente dejó la Academia de Ciencias para trabajar en la compañía de seguros Metropolitan Life Insurance de Nueva York.

Es conocido en el ámbito científico por el modelo predador-presa que propuso al mismo tiempo, aunque de manera independiente que Volterra. Por eso este modelo básico para el estudio de poblaciones dinámicas se conoce como Modelo Lotka-Volterra. Estudió el crecimiento de las poblaciones, tanto animales como humanas en territorios cerrados, a partir de los estudios del economista Malthus y el demógrafo Verhulst.

Sobre poblaciones estacionarias ya habían escrito Stuart Mill y Pigou, pero Lotka presenta una ley matemática, representada mediante una curva logística, que explica la relación existente entre consumidores y consumo hasta llegar a un equilibrio de convivencia. La novedad que incorpora Lotka es que establece una relación entre los fenómenos ecológicos y los económicos, comparando un territorio cerrado con un mercado de dimensiones finitas. Su prestigio científico le llevó a ser presidente de la Population Association of America (PAA).

En las investigaciones que realizó en el campo de la bibliometría destaca el artículo publicado en 1926 en *The Journal of the Washington Academy of the Sciences,* donde analiza el comportamiento de la distribución de autores del índice decenal *Chemical Abstracts 1807-1916*, y de *Auerbach's Geschichtstafeln der Physik*, que ofrece las mejores obras publicadas desde principios de 1900. En este artículo, Lotka comprobó que estas dos fuentes ofrecían los mismos resultados, aunque la temática y el período estudiado fuesen diferentes. Generalizó estas conclusiones en una ley, donde enuncia que el número de autores con n publicaciones en una bibliografía sigue una distribución de la forma C/n^2, donde C es una constante.

$$A(n) = \frac{C}{n^2}$$

donde n es el número de publicaciones,

$A(n)$ es el número de autores con n publicaciones, y

C es una constante.

En su libro *Little Science, Big Science,* Price defiende que la fórmula de Lotka tiende a sobreestimar el número de autores con productividad elevada. De hecho, el número de autores con la mayor productividad se acerca más a la inversa al cubo que al cuadrado. Price también observó similitudes entre la Ley de Lotka y la Ley de Pareto de distribución de la renta, la cual establece que la renta acumulada sigue una ley $\frac{1}{n^{1,5}}$.

Larry J. Murphy en su artículo «Lotka's Law in the Humanities?»[2] dice que la Ley de Lotka puede aplicarse únicamente a la física y a la química, aunque se haya aplicado en otros ámbitos sin ningún test de validación.

Henry Voos aplicó la Ley de Lotka a *Information Science Abstracts*[3] y encontró inconsistencias en este campo. La relación estaba más cerca de la inversa al cubo que de la inversa al cuadrado.

---

[2] MURPHY, L. J. (1973): «Lotka's Law in the Humanities?» *Journal of the American Society for Information Science.* November-December, págs. 461-462.

[3] VOOS, H. (1974): «Lotka and Information Science». *Journal of the American Society for Information Science.* July-August, págs. 270-272.

Alan Edward Schorr realizó pruebas con *Library Quarterly* y con *College Research Libraries*[4], en el campo de mapas bibliotecarios relativos a la historia de la medicina legal, concluyendo que la Ley de Lotka podía aplicarse con éxito en estos campos.

En 1994, L. Egghe[5] estudió matemáticamente las diferencias entre los sistemas de autor-publicación y los sistemas de revista-artículo, mostrando que la Ley de Lotka también es válida.

William Potter[6] estudió empíricamente los datos empleados por Lotka, encontrando que al aplicar el test de Kolmogorov-Smirnov, algunos de estos datos no se ajustan a la ley. Por eso, no hay que seguir la Ley de Lotka como una distribución estadística precisa, sino entenderla como una generalización en términos aproximados, ya que con una muestra suficientemente grande, las dos terceras partes de los autores producen solamente un artículo. La precisión del test de Kolmogorov-Smirnov no es tan importante como la regla general de que una gran muestra de autores en un período de tiempo largo se adapta a la Ley de Lotka.

La Ley de Lotka puede aplicarse con éxito en la ayuda de la adopción de reglas de catalogación: como la mayoría de los autores sólo aparecen una vez, no es trascendente su lugar de aparición en el catálogo; en la planificación del almacenamiento: los autores con más entradas causan la mayoría de los errores e inconsistencias en el catálogo, la utilización de la ley anticipa los costes de mantenimiento.

Este mismo planteamiento puede aplicarse en las bibliotecas: sólo un pequeño porcentaje de la colección se prestará muy a menudo y sólo un pequeño porcentaje de los usuarios requerirá la mayoría de los servicios de la biblioteca. En el diseño de catálogos online, una biblioteca puede considerar que la mayoría de las entradas aparecerán sólo unas pocas veces, y algunos comandos de búsqueda se usarán más que otros.

La Ley de Lotka puede generalizarse mediante la expresión

$$A(n) = \frac{C}{n^a}$$

---

[4] SCHORR, ALAN EDWARD (1974): *Lotka's Law in the Library Science.* RQ. Fall, págs. 32-34.

[5] EGGHE, L. (1994): «Special Features of the Author-Publication Relationship and a New Explanation of Lotka's Law Based on Convolution Theory». *Journal of the American Society for Information Science.* July, págs. 422-427.

[6] POTTER, W. G.: «Lotka's Law Revisited». *Library Trends. Summer,* 1981, pág. 21-39.

POTTER, W. G.: «Of Making Many Books There Is No End». *Bibliometrics and Libraries. Journal of Academic Librarianship.* 14(4), págs. 238a-238c.

POTTER, W. G. (1980): «When Names Collide: Conflict in the Catalog and AACR 2». *Library Resources and Technical Services. Winter*, págs. 3-16.

Rousseau[7] revisa la Ley de Lotka como una distribución estadística de frecuencias relativas, encontrando que el exponente a converge habitualmente a 2, C es $\frac{6}{\pi^2}$, aproximadamente 0,61, lo que significa que el 61 % de los autores de una bibliografía contribuyen a ella con un solo artículo.

La Ley de Lotka también se ha utilizado para analizar el número de citas en trabajos y artículos publicados, donde el sistema para establecer el índice de citas puede responder a varios métodos: recuentos, citas/artículos, etcétera. En este campo, la Ley de Lotka ha derivado en otras dos:

— Ley de Platz: La visibilidad de un autor es el logaritmo de las citas que produce.

— Ley de Price: El 50 % de las citas se concentra en un reducido número de trabajos y el otro 50 % se reparte entre la totalidad de los artículos publicados.

Ley de Bradford

El químico y bibliotecario del Museo de Ciencias de Londres, Samuel Clements Bradford (1878-1948) ha sido uno de los pioneros en el ámbito de la bibliometría. En su artículo de 1934, «Sources of Information on Specific Subjects», publicado en el *British Journal of Engineering*, estudió la distribución de los temas científicos en las publicaciones periódicas, estableciendo que las dos terceras partes de los documentos científicos de los científicos o de los investigadores, útiles para la sociedad, publicados cada año, no se incorporaban en las publicaciones periódicas dedicadas a resúmenes e indexaciones.

En 1965, Derek de Solla Price obtuvo unos resultados en sus investigaciones que avalan los hallazgos de Bradford, de tal forma que cada año el 35 % de los documentos publicados no son citados, el 49 % se citan solamente una vez y el 16 % se citan dos o más veces. Las razones que motivan esta falta de citaciones son diversas, las más habituales son una indexación incorrecta, un resumen inadecuado o la falta de disponibilidad.

En su libro *Documentation*[8], Bradford analiza las referencias bibliográficas de artículos de geofísica aplicada publicados durante cuatro años, ordenando las publicaciones de mayor a menor número de referencias. Descubre que una tercera parte de las citas se encuentra en nueve de trecientas veintiséis publicaciones, zona que llamó núcleo o corazón. Otra tercera parte se halla en cincuenta y nueve publi-

[7] *http://users.pandora.be/ronald.rosseau/html/lotka.html* (15/05/2003).

[8] BRADFORD, S .C. (1950): *Documentation*. Washington DC: Public Affairs Press, 1950.

caciones, llamada zona intermedia, y el resto de las citas se localizan en doscientas cincuenta y ocho publicaciones, denominándola zona de dispersión.

Bradford comprueba que multiplicando por cinco el número de artículos de cada zona se obtenía el número de artículos de la zona siguiente por lo que establece que la relación entre estas zonas es $1{:}n{:}n^2$, siendo n igual a cinco en este caso particular.

Tabla[9]

A	*B*	*C*	*D*
1	93	1	93
1	86	2	179
1	56	3	235
1	48	4	283
1	46	5	329
1	35	6	364
1	28	7	392
1	20	8	412
1	17	9	429
4	16	13	493
1	15	14	508
5	14	19	578
1	12	20	590
2	11	22	612
5	10	27	662
3	9	30	689
8	8	38	753
7	7	45	802
11	6	56	868
12	5	68	928
17	4	85	996
23	3	108	1065
49	2	157	1163
169	1	326	1332

Estas investigaciones llevaron a Bradford a elaborar una ley que lleva su nombre, en la que ofrece una clasificación de los artículos publicados en las revistas científicas, considerando su rendimiento en cuanto a la difusión de los temas tratados.

Cada temática científica vendrá recogida por un conjunto reducido de publicaciones periódicas, que Bradford denomina núcleo, con una menor frecuencia por un segundo conjunto que estará formado por un grupo más numeroso de publicaciones que el nuclear y así se puede establecer sucesivos conjuntos de revistas que traten esta temática de forma esporádica y ocasional, de tal forma que para obtener la

9 BRADFORD, S. C. (1950): *Documentation*. Washington DC: Public Affairs Press, pág. 156.

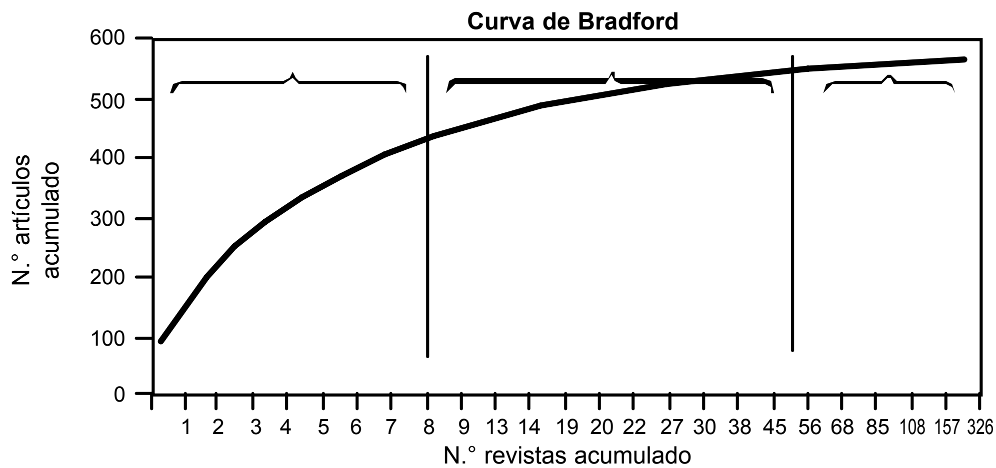
misma cantidad de artículos de este tema en cada grupo, el número de revistas varía en progresión geométrica de un grupo a otro:

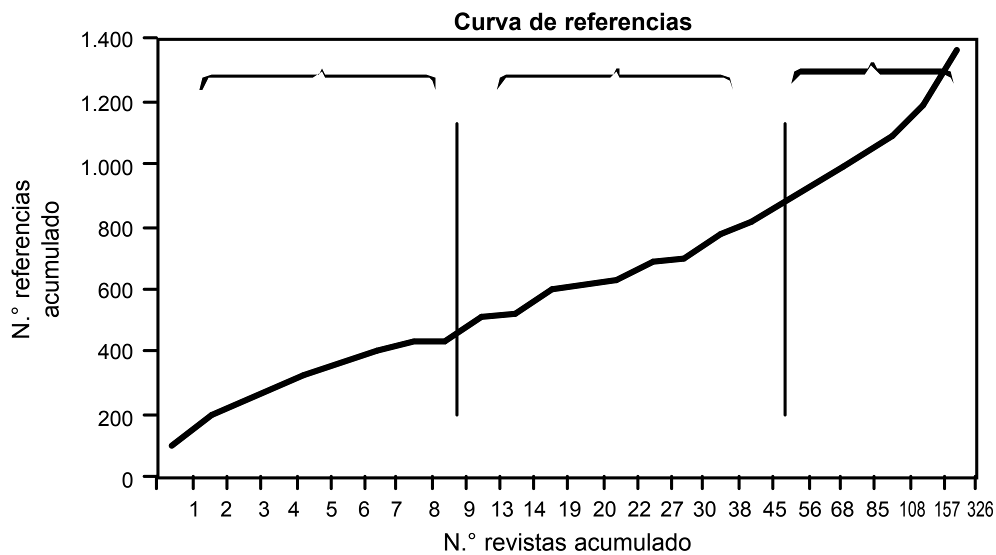
$$1, n, n^2, ...$$

Al analizar las cantidades acumuladas de revistas científicas (x) y de los artículos que incluyen (y), que verifican la Ley de Bradford, estos valores pueden ajustarse mediante curvas de tipo logarítmico o de tipo potencial, donde las constantes varían dependiendo de los datos.

$$y = a + b \log x \quad \text{ó} \quad y = a9 \cdot x^{b9}$$

Cuando se utilizan las referencias bibliográficas y el número de artículos del análisis de Bradford, las representaciones gráficas que se obtienen son





El enunciado de la Ley de Bradford no coincide matemáticamente con su representación gráfica, lo que se ha denominado «ambigüedad de la ley». La razón de esta diferencia habría que buscarla en que Bradford se basa en una muestra concreta para elaborar su ley. La formulación verbal de la ley expresa su idea de cómo debe evolucionar el proceso que describe, mientras que la formulación gráfica describe los datos observados en la muestra.

Algunos comentarios realizados sobre esta ley son los siguientes:

- La mayor dificultad de esta ley reside en que es muy difícil definir el núcleo, siendo esta incertidumbre, junto a la confusión provocada por la ambigüedad de la ley, lo que ha llevado a que se aplique poco y las investigaciones se hayan centrado en verificarla y probar su estabilidad.
- Wilkinson argumenta que la validez de la Ley de Bradford está condicionada a que se cumplan dos condiciones:
  - La muestra sobre la que basamos la investigación debe contener todos los artículos o documentos relevantes del tema científico analizado.
  - Los criterios para decidir que un artículo es relevante deben ser consistentes.
- Si se define previamente el número de revistas que debe contener el núcleo puede ocurrir que los grupos posteriores que surgen en el proceso no tengan por qué coincidir con este valor, por lo que habrá que modificar la estructura inicial del núcleo para tener el mismo número de revistas en todos los grupos.
- Algunos autores identifican el núcleo con una única revista, la revista más productiva. Esta elección condiciona el número de revistas que deben contener las otras zonas, ya que el número de artículos que contiene la revista más productiva es el referente de cálculo.

La Ley de Bradford no es un buen procedimiento para predecir resultados exactos en una búsqueda literaria, porque no se puede determinar la proporción de artículos relevantes en las diferentes publicaciones hasta haber analizado la totalidad de la bibliografía.

No suelen recurrir a ella escritores y bibliógrafos, pero sí proporciona una buena descripción del comportamiento básico de la bibliometría para lograr una buena biblioteca que cubra el núcleo literario de todas las disciplinas científicas o una biblioteca especializada que contenga toda la literatura de una sola disciplina.

Asimismo, a través de la Ley de Bradford se puede valorar el rendimiento o eficacia de un fondo documental, al estudiar la frecuencia de aparición de artículos en las publicaciones periódicas de campos científicos afines al estudiado.

La idea principal que subyace en los análisis de Bradford es que los artículos más significativos de un campo de investigación dado se encuentran dentro de un grupo relativamente pequeño de publicaciones periódicas. Existen unas pocas publicaciones con un alto porcentaje de artículos del campo, al igual que muchas publicaciones con pocos artículos del campo.

BIBLIOGRAFÍA

BRADFORD, S. C. (1976-1977): «Sources of Information on Specific Subjects». *Collection Management*, vol. 1 (3-4), págs. 95-103.

DIODATO, V. (1994): *The Dictionary of Bibliometrics.* New York: Haworth Press, 1994.

DROTT, M. (1981): «Carl. Bradford's Law: Theory, Empiricism and the Gaps Between». *Library Trends,* Summer*,* págs. 41-52.

HERDAN, G. (1966): *The Advanced Theory of Language as Choice and Chance.* Berlin: Springer-Verlag.

ESCOLAR, H. (1988): *Historia del libro.* Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

LOTKA, A. J. (1925): *Elements of Physical Biology.* Baltimore: Williams and Wilkins.

_________, (1926): «The Frequency Distribution of Scientific Productivity». *Journal of the Washington Academy of Science*, 16, págs. 317-323.

MILLARES CARLO, A. A. (1971): *Introducción a la historia del libro y de las bibliotecas.* México: Fondo de Cultura Económica.

WYLLYS, R. E.: Empirical and Theoretical Bases of Zipf's Law, *Library Trends,* 1981, 30:1, págs. 53-64.

ZIPF, G. (1965): *«Human Behavior and the Principle of Least Effort: An Introduction to Human Ecology.* New York: Hafner.

CAPÍTULO 35

La probabilidad como catalizador de las telecomunicaciones en el siglo XX

ARJAN SUNDARDAS MIRCHANDANI
Instituto de Empresa

Desde los orígenes de la humanidad se sintió la necesidad de comunicarse a distancia y rápidamente para prevenir invasiones o ataques, conocer el desarrollo y consecuencias de las batallas, etcétera. Los medios de enlace de que se disponía eran la luz y el sonido, percibidos directamente por los sentidos de la vista y el oído. Para conseguir un cierto alcance, solamente era posible el fuego, mediante la llama durante la noche, y el humo durante el día. Por tanto, la información que se podía transmitir era muy pequeña; solamente confirmar acontecimientos previamente convenidos. Pero era imposible comunicar las circunstancias en que se había desarrollado un acontecimiento fortuito e imprevisto.

El historiador Polibio en el punto 43 del Libro X de su *Tratado de historia*, hace consideraciones que constituyen una incipiente teoría de la información, ya que relaciona velocidad de transmisión, cantidad de información transmitida y distancia alcanzada. En el punto 44 expone que, aunque ese acuerdo previo ya puede considerarse como un proceso de adecuación del mensaje, cuando realmente se desarrolla un verdadero procedimiento de transporte de información es en el siglo IV a.C. y se atribuye a Eneo el Táctico.

Esos inicios, aunque muy lejanos en el tiempo, han marcado la necesidad de comunicación y la existencia de una problemática específica para conseguirlo. Bastante tiempo después, con la invención de la telegrafía, se consiguió resolver la comunicación remota, aunque haciendo uso de un lenguaje diferente al habla humana, como evolución de técnicas ancestrales como las señales de humo, por ejemplo.

En 1876, aparece el segundo concepto de los que constituyen la telecomunicación: la telefonía. Su nacimiento fue fortuito; cuando A. G. Bell trabajaba en el desarrollo de un nuevo sistema multiplex de transmisión de telegramas por un mismo hilo, mediante vibradores, observó que éstos transmitían las palabras que pronunciaba. Y, curiosamente, habiendo sido fortuito, se presentó otra patente el 14 de febrero de 1876, con una diferencia de unas horas, por parte de Elisha Gray.

Por extraño que hoy parezca, la aparición del teléfono no produjo impacto y su desarrollo fue mucho más lento que el de los otros sistemas. En 1876, las necesidades de comunicación de la sociedad acababan de ser cubiertas por el telégrafo de una forma espectacular. Además el tipo de información a que se estaba acostumbrado desde la antigüedad era la escritura y el telégrafo se interpreta como un juguete o un signo de refinamiento. De hecho, la Western Union, en 1876, en un memorando interno, afirmaba: «Este "teléfono" tiene demasiados problemas como para que se pueda considerar seriamente un medio de comunicación... Para nosotros resulta totalmente irrelevante».

El teléfono comenzó a conseguir penetraciones considerables en el mercado, con lo que la complejidad de las redes fue evolucionando, hasta el momento en que esas empresas que se dedicaban a ofrecer este tipo de servicios se encontraron con la problemática de tener que dimensionar sus redes.

En Rusia se inició el estudio de las cadenas de sucesos eslabonados, especialmente en 1906-1907, por obra de Andrei Andreyevich Markov (o MARKOFF, 1856-1922), discípulo de Tchebycheff y coeditor de las *Oeuvres* (2 vols., 1899-1904) de su maestro. En la Teoría Cinética de los Gases y en muchos fenómenos sociales y biológicos, la probabilidad de un suceso depende frecuentemente de los resultados anteriores, y especialmente desde mediados de este siglo las cadenas de Markov de probabilidades eslabonadas se han estudiado muy detalladamente. En su búsqueda de una fundamentación matemática para la Teoría de Probabilidades en expansión, los estadísticos encontraron a mano las herramientas necesarias, y hoy no es posible ya dar una exposición rigurosa de la Teoría de Probabilidades sin utilizar los conceptos de función medible y de las teorías de integración modernas.

El primer matemático que usó los resultados de Markov en el campo de las telecomunicaciones fue Angel Krarup Erlang (1878-1929), nacido en Jutland, Dinamarca. Mediante el estudio del tráfico telefónico de una pequeña población desarrolló una fórmula —la Fórmula de Erlang— para calcular el porcentaje de usuarios de un determinado universo que deben esperar si quieren utilizar la red de telecomunicaciones en función del número de líneas disponibles. Aunque el modelo de Erlang se puede considerar sencillo, todas las telecomunicaciones actuales se basan en él.

Su primera publicación data de 1909, titulada «La teoría de probabilidades y las conversaciones telefónicas», donde prueba que las llamadas telefónicas se distribuyen según una distribución de Poisson. Su trabajo más importante fue desarrollado en 1917, titulado «Solución de algunos problemas en la Teoría de Probabilidades en centrales telefónicas automáticas», donde se incluye una fórmula para la probabilidad de pérdidas y el tiempo medio de espera, parámetros clave actualmente en el sector de las telecomunicaciones.

En Rusia mismo, por ejemplo, Andrei Nicolaevich Kolmogoroff hizo importantes progresos en la Teoría de Procesos de Markov (1931) y dio solución a una parte del sexto problema de Hilbert, en el que se pedía una *fundamentación axiomática de la Teoría de Probabilidades,* utilizando la medida de Lebesgue, de uso también en el sector de las telecomunicaciones, aunque con mucha menos importancia.

El análisis clásico se había ocupado principalmente de funciones continuas, mientras que los problemas de probabilidades generalmente se refieren a casos discretos. La Teoría de la Medida y las sucesivas extensiones del concepto de integral se adaptaban perfectamente a conseguir una asociación más estrecha entre el análisis y la Teoría de Probabilidades, especialmente a partir de mediados del siglo, cuando Laurent Schwartz (1915), de la Universidad de París, generalizó el concepto de diferenciación mediante su Teoría de Distribuciones (1950-1951).

En paralelo, la primera mitad de siglo está marcada por el comienzo de los estudios sobre la naturaleza de la señal, así como otras técnicas de modulación distintas a las utilizadas hasta ese momento (modulación en amplitud), apareciendo por ejemplo la modulación en frecuencia desarrollada por J. R. Carson en 1922. Son de destacar también los estudios realizados por H. Nyquist sobre transmisión telegráfica, o los llevados a cabo por J. B. Jonson sobre ruido generado por los componentes resistivos, de gran importancia para poder evaluar los sistemas de transmisión válidos por no producir un ruido que implicara la distorsión de la señal principal.

En 1927, Yule propuso el análisis espectral basado en modelos autorregresivos. La estructura de la matriz que aparece en este tipo de análisis fue estudiada en 1911 por el matemático alemán Toeplitz, y fue en 1947 cuando Levinson, un colega de Wiener, presentó un procedimiento de cálculo muy eficiente para invertir dicha matriz. Conviene comentar que este tipo de análisis autorregresivos es el fundamento de los sistemas de codificación de voz más eficientes que se conocen en la actualidad.

En un plano más conceptual, en 1930, Wiener da una definición precisa del concepto de autocorrelación y densidad espectral de potencia para procesos aleatorios estacionarios. De hecho, en los métodos de cálculo del espectro ha influido poderosamente el desarrollo reciente de los computadores. De los métodos analógicos, iniciados con el analizador armónico de Michelson y Stratton en 1898 y de los múltiples métodos de cálculo de los coeficientes, gráficos, mecánicos, eléctricos, ópticos, etcétera, se ha pasado al dominio casi absoluto de los métodos digitales, ampliamente simplificados mediante la introducción de la transformada rápida de Fourier por Cooley y Tukey en 1965 y por otrós métodos contemporáneos como el método de máxima entropía introducido por Burg en 1967.

También se desarrollan otros algoritmos de procesado de señal como el de Viterbi, en 1967, que se aplica al reconocimiento de voz, o la transformada Chirp-Z (1968).

En 1969, Groginsky y Works diseñan y construyen un procesador FFT cableado para analizar señales de radar reflejadas por el planeta Venus.

La interpretación del espectro es un problema que, como la elección del tipo de espectro, depende en buena parte del fenómeno mismo que se estudia. Tal vez sea aquí donde algunos de los desarrollos más sutiles que los matemáticos del análisis armónico realizan en la actualidad tengan mayor importancia en el futuro.

Los métodos del análisis armónico han sido aplicados con éxito a fenómenos no periódicos. En el problema de filtrado de series temporales, de gran importancia en la ingeniería de comunicaciones, se trata de purificar una señal que se recibe perturbada por otra señal o contaminada por el ruido. En la Teoría de Predicción se pretende, a través del análisis del pasado de un fenómeno, predecir con el menor error posible la marcha futura del fenómeno. Los métodos utilizados para ello por Wiener en 1942, originados en el análisis armónico, han dado lugar a resultados muy satisfactorios. Kolmogorov, en 1941, atacó problemas semejantes, obteniendo resultados que en parte se solapan con los de Wiener.

El período de la II Guerra Mundial fomenta el desarrollo de las telecomunicaciones, otra vez basadas en el análisis probabilístico y estadístico. Ello conduce al desarrollo de técnicas de codificación y encriptación, que en los años posteriores al citado conflicto, desembocan en tres avances de gran importancia, dos de ellos teóricos y uno práctico, que merecen ser reseñados. El primero se debe a Hamming, quien en 1948 inventa los códigos de corrección de errores. El segundo, debido a Shannon, establece la cantidad de información que es posible transmitir por un canal de comunicación sin errores. Por último, el tercero es la invención del transistor en 1948, que, aunque no está relacionado con la probabilidad y estadística, se ha considerado oportuno reseñar, al ser de gran importancia para las telecomunicaciones.

Los años sesenta fueron de gran relevancia en las telecomunicaciones, con hitos tan importantes como el lanzamiento del primer satélite de comunicaciones comercial, el Telstar, o el desarrollo del primer sistema de transmisión digital de voz basado en PCM. Pero además es de esta época el invento en los laboratorios Bell del cancelador adaptativo de eco, que permitía la transmisión sin eco dúplex en circuitos de larga distancia, y que se basaba en importantes desarrollos matemáticos y estadísticos. Además, en 1967, el norteamericano Atal inventa la llamada codificación predictiva adaptativa, que permitía mediante sistemas predictor la optimización del canal de comunicaciones.

CAPÍTULO 36

Historia moderna de la probabilidad: de Cantor a Mandelbrot y los fractales aleatorios

ARJAN SUNDARDAS MIRCHANDANI
Instituto de Empresa

Definición de geometría fractal

La geometría fractal, geometría hermana de la euclídea, debe su denominación a Benoît Mandelbrot, al que se le podría calificar como redescubridor de los fractales, que en la década de los setenta llegó a resultados de gran trascendencia científica. Él utilizó el término fractal para designar ciertos objetos geométricos de estructura irregular —de ahí su denominación, del adjetivo latino «fractus», que significa roto o irregular—, y llegó a la conclusión de que este tipo de objetos está presente en muchos comportamientos y formas de la naturaleza.

Se puede definir un objeto fractal como una entidad geométrica que posee autosemejanzas a diferentes escalas, que es lo que se conoce en la jerga fractal como «self-similarity y scaling». A la vista de esta definición se puede observar cierta similitud entre el concepto de entidad fractal y el de homotecia, que implica que una determinada forma tenga el mismo aspecto vista a diferentes escalas.

Cuando se hace referencia a objetos fractales, normalmente se tiene en mente una idea estática. Esto no es válido en un gran número de casos, como por ejemplo en árboles (ramificaciones) y hojas. Pero bajo este punto de vista se tiene bien poca información sobre la evolución o incluso la generación de una forma determinada.

Así, el hecho de hablar de fractales sin tener en cuenta los procesos dinámicos está bastante fuera de lugar. Sería bastante acertado, siguiendo con el dinamismo de los fractales, ver la evolución de los mismos como un proceso que incluye una realimentación, teniendo un sistema iterativo, que consiste en aplicar unos datos de partida a un proceso, que puede ser una expresión matemática, y obtener los resultados, que a su vez se usarán como datos de partida de la siguiente iteración, repitiéndose el proceso hasta que los resultados tiendan a estabilizarse. En función del proceso que sea aplicado se tendrán fractales lineales o no lineales, y si además se introduce un factor «aleatoriedad» se conseguirán obtener fractales aleatorios.

Concepto de dimensión de contenido o de Hausdorff-Besicovitch

Asociado a la definición de fractal se halla el concepto de dimensión, dentro de la Teoría Geométrica de la Medida, que tuvo sus inicios con la definición de la dimensión de Hausdorff, concepto que establecía la distinción del tamaño de los conjuntos paradójicos y que sentó sus bases con la ayuda de los trabajos del profesor Besicovitch durante los años veinte y treinta, en los que estudió las propiedades geométricas de los conjuntos planos que él denominó irregulares: era el arquetipo de lo que hoy se denominan fractales.

En 1981 el australiano J. Hutchinson publicó *Fractals and Self-Similarity,* donde desarrolla un concepto básico en geometría fractal: la autosemejanza, que ha tenido una gran importancia en el desarrollo posterior.

También hay que destacar al norteamericano Michael Barnsley, que ha contribuido al fomento de la Teoría Fractal con innumerables obras y participación en la mayoría de congresos celebrados.

El último punto clave en el desarrollo de la geometría fractal ha sido la introducción del ordenador personal. El cálculo de las numerosísimas operaciones que requiere cualquier proceso fractal es impensable sin el auxilio del ordenador. El empleo del ordenador se hace imprescindible siempre que se hable de fractales; ésta ha sido la razón principal que ha imposibilitado el desarrollo de la Teoría Fractal hasta principios de los años setenta.

En 1919, Hausdorff propuso la primera de las definiciones de dimensión fraccionaria, que se aplica a figuras muy generales, que no tienen por qué tener una homotecia interna.

Evolución de la Teoría Fractal

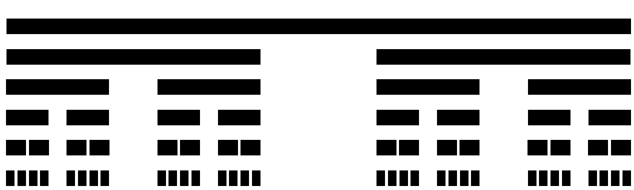
Lo que se viene en denominar geometría fractal es una parcela de las matemáticas cuyos límites reales no están del todo claros. Hay indicios de que ya en la Grecia Clásica se conocían estas formas, aunque se desechaban, ya que no se les encontraba utilidad y además los fractales no cumplían una de las condiciones básicas de las formas con que trabajaban en aquella época, que era la diferenciabilidad en todos o en la mayoría de puntos.

Históricamente, sus orígenes se remontan a finales del siglo XIX y comienzos del siglo pasado con la aparición de los conjuntos geométricos de propiedades aparentemente paradójicas en la ciencia matemática.

En esos conjuntos, como son las curvas de Peano, de Koch, cojuntos de Cantor, etcétera, que se analizan con detalle, parecía existir una discordancia entre su tamaño real y su configuración espacial como conjunto de puntos, traduciéndose esto en curvas con área o longitud infinita entre dos de sus puntos.

Así, en 1883 el matemático alemán Cantor (1845-1918), asentado en la Universidad de Halle, donde desarrolló los fundamentos de lo que hoy se denomina Teoría de Conjuntos, publicó por primera vez el conjunto que lleva su nombre, surgiendo como ejemplo de conjunto con propiedades paradójicas.

Este conjunto es el más importante de la época, ya que como se ha observado posteriormente, sirve de esqueleto para otros fractales más modernos, como son los conjuntos de Julia o de Mandelbrot.



Este conjunto se genera a partir del intervalo [0,1]. Se divide este intervalo en tres partes iguales, descartando el segmento central. Con cada una de las dos partes restantes se actuará de igual forma. Si se repite el proceso infinitas veces se llega al conjunto de Cantor.

Algunas de las propiedades de este conjunto son las siguientes:

- El conjunto de Cantor no contiene intervalos a pesar del punto de partida, por lo que se puede calificar como infinitamente poroso. Para demostrar esto se puede calcular la suma de las longitudes de los segmentos que se han ido eliminando, observado que el resultado es el conjunto infinito de puntos de longitud cero, que se conoce como *dust*:

$$L = \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\frac{(1-0)}{\left(1-\frac{2}{3}\right)} = 1$$

- Todo punto del conjunto de Cantor es el límite de una sucesión de puntos también pertenecientes a él.

El matemático Helge Von Koch desarrolló en 1904 la curva que ha adoptado su nombre. Para construirla se parte del segmento unidad [0,1] y se divide en tres partes, sustituyendo la parte central por dos segmentos que junto con la parte suprimida constituyen un triángulo equilátero. A cada uno de los cuatro segmentos obtenidos se les aplica el proceso indefinidamente. En la figura anterior se puede observar su construcción.

De esta curva se pueden destacar las siguientes características:

- Si se observan los puntos en que la curva obtenida corta con la línea de la que se parte se observa que coinciden con los puntos del conjunto de Cantor.

- Dado que en cada iteración se multiplica la longitud de la curva por un factor mayor que uno (4/3), la longitud de la curva resultante es infinita.

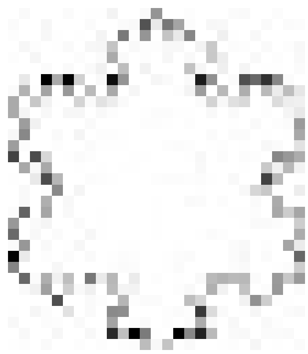
- Si se calcula el área total encerrada por la curva, se tiene que su valor es finito. Así, si se comienza por ver el área tras la primera etapa, se tiene:

$$A = \frac{1}{2}b \cdot h = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{36}$$

En la siguiente iteración se añaden cuatro nuevos triángulos, pero escalados respecto a la iteración anterior por 1/3, por lo que el área es 1/9 A. Cuando el proceso se repite indefinidamente se tiene:

$$A\left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots\right] = A\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = A\,\frac{1-0}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}A = \frac{\sqrt{3}}{20}$$

- La curva no es diferenciable, o sea no tiene pendiente definida en cualquier punto.
- Para finalizar, destacar que la curva contiene un número infinito de versiones reducidas de sí misma. Dado que la curva es de longitud infinita, cualquier versión reducida también es de longitud infinita.

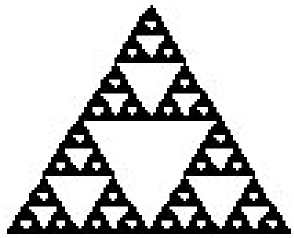


A la recta de la que parte se le denomina generador (del término anglosajón «initiator»). Si se partiera de un triángulo equilátero y se aplicara el mismo algoritmo se tendría una variante de la curva analizada, que se denomina el copo de nieve o la isla de Koch, por su semejanza a éstos. Se observa en la figura que se contrasta cómo el resultado obtenido se inscribe de forma natural en un hexágono regular convexo.

Waclaw Sierpinski (1882-1969), matemático polaco y profesor en la Universidad de Varsovia, ideó un conjunto de objetos fractales basados en los espacios bidimensional y tridimensional. Para la construcción del llamado Triángulo de Sierpinski se extrae de un triángulo original la copia invertida y escalada a la mitad del mismo que se forma uniendo los puntos centrales de cada lado del triángulo.

Gaston Julia (1893-1978) estudió por primera vez la iteración de funciones racionales, desarrollando el conjunto de Julia.

Este conjunto se basa en la representación gráfica de números complejos. Un número complejo $z = x + jy$ representa un punto (x, y) en el plano, siendo la parte real x el desplazamiento respecto al origen, y la parte imaginaria y el desplazamiento vertical.



Sea $c = a + jb$ una constante compleja y la variable compleja $z = x + jy$. Entonces se puede definir la función:

$$f(z) = z^2 + c = (x^2 - y^2 + a) + j\,(2xy + b)$$

Se supone que se empieza con un punto en el plano (x_0, y_0) que se selecciona. De este modo, el plano podrá dividirse en dos grupos de puntos en función de qué hagan o no que la secuencia converja, siendo el conjunto de Julia la frontera entre los valores inciales convergentes y los no convergentes.

Cambiando el valor de la constante c se obtendrían diversas formas del conjunto de Julia. Igualmente el que el conjunto de Julia resultante sea conectado[1] o no conectado también dependerá del valor de c que se seleccione.

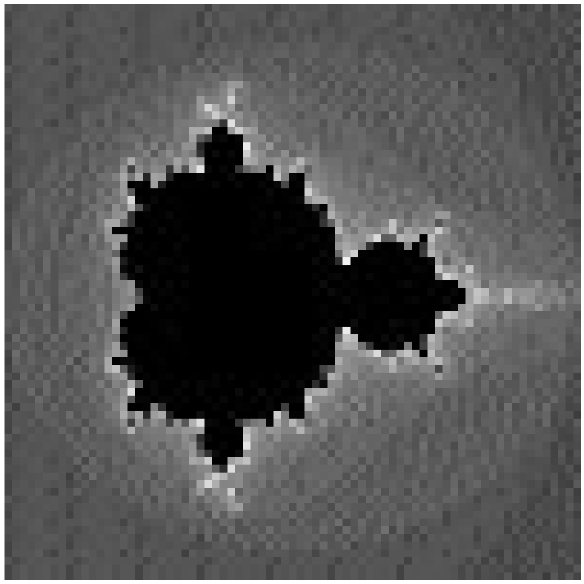
En la figura adjunta se representa el conjunto correspondiente a un Mandelbrot Set, con $z = 0 + j0$.

El conjunto de Mandelbrot cumple con la interesante propiedad fractal de divisibilidad infinitesimal. Si la región se divide en partes cada vez más pequeñas no hay pérdida de detalles, sino que cada vez se descubren muchísimas más formas, como se podría observar.

En la siguiente figura se muestra la ampliación de una de las áreas de la figura anterior, donde se observa que se gana en resolución.

Recientemente, diferentes matemáticos, como el norteamericano Brown, han trabajado introduciendo el concepto de probabilidad asociado al crecimiento fractal. Brown, con el desarrollo del movimiento browniano, ha conseguido introducir ese factor «aleatorio» que ha permitido la construcción de formas presentes en la

[1] Un conjunto geométrico se dice conectado cuando entre cualquier par de puntos del conjuntos se puede trazar una línea, generalmente curvada, que pertenece completamente al conjunto.

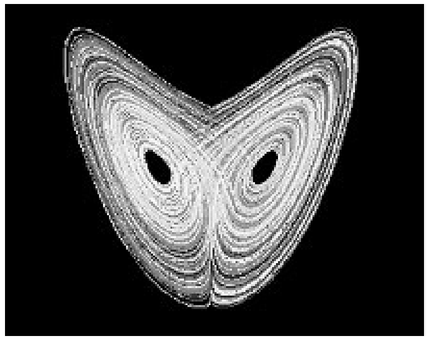


naturaleza humana, tales como nubes, crecimiento de vegetación, etcétera, llegando incluso a la generación de paisajes fractales.

Adicionalmente y por varias razones, los fractales han sido asociados a la Teoría del Caos. Mientras que algunas de estas figuras sí están estrechamente relacionadas, hay otros tipos de fractales que en nada tienen que ver con el caos. Como hemos visto, los primeros ejemplos de construcciones fractales (matemáticas) datan de finales del siglo XIX, mucho antes de que la Teoría del Caos fuese propuesta en la década de 1960. Aún así, gracias a los avances tecnológicos, esta teoría ha generado varios tipos adicionales de fractales. El Dr. Edward Lorentz, del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT, por sus siglas en inglés) es uno de los pioneros en este campo, a pesar de que Jules Henri Pointcaré ya había formulado el Efecto Mariposa tan temprano como los años 1830.

Estrictamente hablando, la Teoría del Caos es el estudio de los sistemas no lineales, para los cuales el índice de cambio no es constante. Se caracterizan por su carácter impredecible. La climatología y el crecimiento poblacional son buenos ejemplos de sistemas no lineales; ambos, también, son fractales.

En sistemas no lineales, cada estado del sistema está determinado por sus estados anteriores (iteración). Un minúsculo cambio en los valores iniciales puede tener dramáticos efectos en el resultado del sistema.



Gracias a los descubrimientos de la Teoría del Caos y de la geometría fractal, los científicos han podido comprender cómo sistemas que anteriormente se creían totalmente caóticos, ahora exhiben patrones predecibles. Una de las contribuciones más significativas de la geometría fractal ha sido su capacidad para modelar fenómenos naturales tales como las plantas, las nubes, las formaciones geológicas y los fenómenos atmosféricos. Esta teoría también ha contribuido a otros campos tan diversos como la lingüística, la psicología, las técnicas de compresión de imágenes digitales, la superconductividad y otras aplicaciones electrónicas.

CAPÍTULO 37

Control estadístico de la calidad: una breve reseña histórica

José Luis Alfaro Navarro
Esteban Alfaro Cortés
José Mondéjar Jiménez
Manuel Vargas Vargas
Universidad de Castilla-La Mancha

Introducción: los antecedentes del control de calidad moderno

Cuando se habla de «calidad» de un producto o servicio, se suele asociar a la capacidad de éste para cumplir las expectativas que sobre él tiene el consumidor. De hecho, según la norma A3-1987 ANSI/ASQC calidad es «la totalidad de aspectos y características de un producto o servicio que permiten satisfacer necesidades implícita o explícitamente formuladas». Entre los elementos que conforman estas necesidades figuran la seguridad, disponibilidad, mantenimiento, fiabilidad, facilidad de uso, precio, etcétera. Éstas se definen traduciendo aspectos y características necesarios para la fabricación de un buen producto u ofrecer un servicio acorde con lo especificado (Besterfield, 1995).

Como se puede observar, en esta definición de calidad la estadística no tiene a simple vista mucha influencia. Pero dentro de la definición moderna de control de calidad se ha llegado a la conclusión de que esta calidad va a estar inversamente relacionada con la variabilidad, ya que se establece un estándar de calidad e interesa que los productos varíen en torno a ese estándar lo menos posible. Por ello, la mejora de la calidad está muy relacionada con la disminución de la variabilidad, tanto en los procesos de fabricación como en los productos obtenidos.

Como aparece en el libro de William S. Peters[1]: «Los intentos para controlar los bienes fabricados existían antes de la revolución industrial. La Biblia dice que Dios dio a Noé las especificaciones necesarias para construir el arca. Los gremios medievales controlaban la calidad de su producción artesanal mediante el sistema de aprendizaje; así, el control de calidad estaba basado en la confianza, en la experiencia y la reputación artesanal».

Por lo tanto, se puede decir que el control de calidad ha estado presente entre nosotros durante mucho tiempo. Sin embargo, dicho control residía en la habilidad del individuo para fabricar productos. Así, en la Edad Media, las comunidades otorgaban largos períodos de aprendizaje a los conocidos como aprendices, que aspiraban a convertirse en maestros artesanos. Estos procedimientos no tenían otro objetivo que el mantenimiento y la mejora de la calidad, entendida ésta como la semejanza de los productos manufacturados a un «producto tipo o estándar», siendo interpretada la variación respecto a él como un error achacable a la falta de habilidad del artesano. Como se puede apreciar, se planteaba una manufacturación individualizada de cada producto, que debía semejarse lo más posible a su estándar, sin referencia ninguna a un colectivo de productos, por lo que el concepto de control de calidad estaba centrado exclusivamente en el control técnico de la fabricación de cada unidad.

Sin embargo, existe una curiosísima excepción, constituida por un procedimiento de control de la calidad mediante un esquema de muestreo desarrollado por la Casa de la Moneda de Londres, que recibe el nombre de «trial of the pyx».[2] Los orígenes de esta ceremonia se pueden rastrear hasta el reinado de Enrique II, 1154-1189, y su propósito inicial era establecer si las monedas acuñadas respetaban las especificaciones establecidas por la Corona (STIGLER, 1999). Ya que la Casa de la Moneda londinense era independiente de la monarquía, era preciso verificar que los lingotes de oro y plata que se le suministraban iban efectivamente destinados a la acuñación. Para ello, se guardaba celosamente en la Abadía de Westminster un lin-

---

[1] PETERS, W. S. (1987): «Counting for Something». New York, Springer-Verlag, págs. 151-162.

[2] Que podemos traducir libremente por «prueba de la caja». Ya que esta caja se custodiaba en una habitación cerrada de la Abadía de Westminster y que el uso eclesiástico de la palabra «pyx» antes de 1400 hacía referencia al vaso en el que se guardaba el pan del sacramento, la expresión inglesa podría entenderse como «prueba del cáliz», juego de palabras intraducible al español.

gote convenientemente pesado, que se consideraba como patrón para la comparación de las monedas, y una muestra de las monedas acuñadas, guardadas en una caja denominada «pyx». En períodos de tiempo irregulares, seguramente con pretendida frecuencia anual pero prácticamente separados por tres o cuatro años, era desarrollado un «trial of the pyx» por un jurado independiente, tanto de la Casa de la Moneda como de la Corona. El «pyx» era abierto y los contenidos del mismo eran pesados y comparados con el estándar guardado; si el resultado era satisfactorio, se anunciaba públicamente y se celebraba un banquete, mientras que en caso contrario, el jefe de la Casa de la Moneda era obligado a solventar la situación.

Las características de esta ceremonia forzaron a la utilización, rudimentaria ciertamente, de conceptos estadísticos que son considerados propios del siglo pasado. En concreto, la imposibilidad física de pesar todas y cada una de las monedas condujo a la adopción de un esquema de muestreo para el control de la calidad. Aunque los documentos más antiguos no especifican cómo se seleccionaban las muestras, resulta difícil creer que dada la importancia del tema, tanto la Casa de la Moneda como la Corona admitiesen un procedimiento claramente parcial. Aunque no se pueda hablar de una selección aleatoria tal y como se entiende hoy en día, sí es razonable suponer que el mecanismo utilizado no incurría en sesgos de selección manifiestos. El «trial of the pyx» se convierte así en uno de los esquemas de muestreo más antiguos que se pueden documentar.

Sin embargo, no es el único concepto estadístico «moderno» implicado en la ceremonia. Conscientes de los problemas técnicos de acuñar monedas exactamente iguales, y la consiguiente variación inevitable en los pesos, las partes interesadas acordaron también agrupar las monedas fabricadas en cortos períodos de tiempo, con lo que pesaban el conjunto y era esta medida «agregada» la que comparaban con el estándar. Nos volvemos a encontrar con una versión simple y rudimentaria de un diseño de experimentos, junto a un intento de formación de subgrupos «racionales» según la terminología actual, utilizada para intentar distinguir las desviaciones «inevitables» o «naturales» del estándar de aquéllas que sí suponen una alteración de las condiciones pactadas de acuñación.

Para completar el esquema, se establecía una tolerancia por encima y por debajo del valor estándar, que se denominaba «remedy». Aunque admitiendo variabilidad en la cantidad de metal precioso utilizado en la acuñación, los efectos de que ésta fuera elevada no eran asumibles. En concreto, si se detectaba una mayor proporción de oro o plata, las monedas podían ser fundidas y reutilizados dichos metales con un margen de beneficio, situación que la Corona quería evitar a toda costa, sobre todo si era llevada a cabo por agentes extranjeros. Por otro lado, si el contenido de metales preciosos era inferior al establecido, se podía producir una pérdida de confianza en la moneda (o incluso inflación) y se consideraba que la Corona había sido robada. En este caso, como remedio, se obligaba a la Casa de la Moneda a reingresar una cantidad de oro o plata igual a la diferencia observada multiplicada por la cantidad de moneda acuñada en el período analizado, origen tal vez del término «remedy». Como se puede observar, se trata de un intento de fijar unas «tolerancias» para el proceso de acuñación. Aunque se intuían los conceptos estadísticos necesarios y algunos fueron relativamente bien aplicados, en el caso del «remedy» como tolerancia presentaba un inconveniente: la obtención de la tolerancia para el conjunto de monedas era obtenido simplemente multiplicando la tolerancia permitida para una moneda por el número de monedas utilizadas,[3] lo que equivale a permitir «demasiada» variabilidad sin incurrir en la ilegalidad,[4] situación que se mantuvo con pequeños cambios hasta 1815, fecha en que se redujo sensiblemente la magnitud del «remedy». Por todo ello, el «trial of the pyx» puede considerarse uno de los más antiguos contrastes bilaterales de hipótesis con un plan de muestreo establecido, el uso de estadísticos de contraste y la definición de una región crítica, con el objetivo de controlar la calidad de un producto.

La introducción de los conceptos estadísticos en el control de calidad

Aunque con excepciones como la comentada, la estructura medieval de producción continuó vigente hasta el tercer cuarto del siglo XVIII. A pesar de que existe alguna evidencia de que hace 5.000 años la civilización egipcia tenía productos cotidianos a base de partes intercambiables, la revolución industrial y la producción en masa supuso la primera introducción plena de la producción mediante el ensamblaje de piezas más simples fabricadas de forma independiente. Sin embargo, la filosofía de fabricación continuó siendo, durante un tiempo, la de «producción exacta», en el sentido de que los esfuerzos iban orientados a la obtención de piezas de dimensión exacta, atribuyendo la variabilidad a defectos en el proceso productivo.

Pero durante el siglo XIX se toma conciencia de que no es necesario que las piezas fabricadas sean «exactamente» iguales a su patrón de calidad, sino que basta con que sean «suficientemente» parecidas como para considerarlas válidas, situación económica y técnicamente menos costosa que la anterior. Surge así la exigencia de que las manufacturas presenten, en sus características más relevantes, unos «límites de especificación» o «tolerancias» para ser consideradas válidas, en lugar

3 La variación de n unidades se consideraba como n veces la variación de una, situación que no cambia hasta que, en 1730, De Moivre descubre que el aumento de variación es proporcional a $\sqrt{n}$.

4 Existe alguna evidencia de la gradual explotación de estos márgenes en momentos económicamente difíciles para la corona británica. Incluso no han sido raras las acusaciones entre ingleses y franceses de haber explotado fraudulentamente esta deficiencia (STIGLER, 1999, cap. 21).

de tener que ajustarse exactamente a su estándar de calidad.[5] Este cambio supone el reconocimiento, más o menos explícito, de la existencia de una variabilidad en la producción que no invalida a las unidades fabricadas para su uso y cuyo coste económico de eliminación es muy elevado. Es, en otras palabras, el reconocimiento de una «variación natural» en la fabricación, en el sentido de ser admitida como inherente al proceso de producción para que éste no sea económicamente prohibitivo y estar controlada.

Asociada a este nuevo esquema de producción aparece una nueva serie de retos en la industria. En primer lugar, la existencia de tolerancias obliga a que las unidades que no cumplan este requisito sean consideradas como «defectuosas» o, en términos más usuales, «no conformes». La producción de este tipo de unidades, o su rectificación, conlleva un coste que podría ser eliminado; pero también la inspección y la búsqueda de las «causas» de esta situación presenta un coste monetario cada vez mayor. Surge así el reto de intentar reducir la proporción de unidades no conformes hasta un punto en el que el incremento del coste de inspección y control iguale al incremento de ahorro por la disminución del número de unidades rechazadas. En segundo lugar, la inspección o medición de algunas características de calidad (como pueden ser la resistencia, composición química o tiempo de vida útil) son de carácter destructivo, por lo que no pueden ser llevadas a cabo sobre todas las unidades; incluso aunque las pruebas no fuesen destructivas, la inspección del 100 % de la producción puede ser improcedente económicamente. Aparece entonces la necesidad de garantizar la viabilidad de la producción de forma general mediante la inspección de una parte significativa de ésta y, por tanto, la necesidad de determinar qué proporción de unidades debe ser inspeccionada, cómo seleccionar dichas unidades y cómo garantizar que los resultados obtenidos sean extrapolables a la generalidad de la producción.

El primer intento de respuesta general a las preguntas anteriores se produce en el primer cuarto del siglo XX con la introducción, por parte de Walter Andrew Shewhart, del control estadístico de la calidad y el uso de gráficos de control, punto inicial en la aplicación de las técnicas estadísticas para el control de calidad de productos manufacturados. Nacido el 13 de marzo de 1891 en New Canton, Illinois, y fallecido el 11 de marzo de 1967 en Troy Hill, New Jersey, Shewhart se graduó por la Universidad de Illinois y se doctoró en física por la Universidad de California en Berkeley en 1917. Enseñó en la Universidad de Illinois y California y dirigió brevemente el Departamento de Física en la Escuela Normal de Wisconsin en La Crosse. Su carrera profesional en la industria transcurre como ingeniero en la Western

[5] Como puede verse en Shewhart (1986) la aparición del uso de tolerancias se produce en dos fases, una inicial con un «límite de validez» y otra posterior con la inclusión de tolerancias superior e inferior.

Electric, de 1918 a 1924, y en los laboratorios Bell Telephone, como miembro del cuerpo técnico de 1925 hasta su retiro en 1956. Colaboró en Cátedras sobre Control de Calidad y Estadística aplicada en la Universidad de Londres, el Instituto Stevens de Tecnología, la Escuela de Graduados del Departamento de Agricultura de Estados Unidos y en La India. Fue miembro del comité de visitas en el Departamento de Relaciones Sociales de Harvard, profesor honorario en Rutgers y miembro del comité consultivo del Departamento de Matemáticas de Princeton, así como miembro fundador de la Sociedad Americana de Calidad (ASQ). Empleado frecuentemente como consultor, Shewhart colaboró con el Departamento de Guerra norteamericano, las Naciones Unidas, el Gobierno de La India y trabajó activamente con el Consejo Nacional de Investigación y el Instituto Internacional de Estadística. Fue miembro honorario de la Real Sociedad Estadística de Inglaterra y la Asociación Estadística de Calcuta. Fue socio y oficial del Instituto de Estadísticas Matemáticas, la Asociación Matemática para el Avance de la Ciencia, la Asociación Americana de Estadística, la Sociedad de Econometría y la Academia de Ciencias de Nueva York.

Pero, ¿por qué la relativa tardanza en la incorporación de los conceptos estadísticos al mundo industrial? Por un lado, no es hasta el primer cuarto del siglo XX cuando se desarrollan las organizaciones industriales de estandarización, tanto a nivel nacional como internacional. Con un objetivo primordial de establecer y unificar las especificaciones técnicas de la producción y homogeneizar su calidad, motivaron que las industrias se centraran en el cumplimiento de sus normas, intentando minimizar el porcentaje de producción no conforme a ellas e intentando igualmente minimizar el coste de inspección requerido para el aseguramiento de la calidad. Por otro lado, este fenómeno coincide con la expansión de los conceptos estadísticos. Las ideas y trabajos de estadísticos como R. Fischer, J. Neyman, E. S. Pearson o I. Yule desarrollaron enormemente los métodos estadísticos y su aplicación a diversas ciencias, ocasionando una divulgación de su potencial que fue aprovechada en muchas ramas de la tecnología, como es el caso del control de calidad.

Esquemáticamente, los gráficos de control introducidos por Shewhart son una herramienta para decidir cuándo la producción presenta una variabilidad «natural», en el sentido atribuido anteriormente a este adjetivo, y cuándo la variación se debe a causas concretas que pueden ser eliminadas a un bajo coste. Así, un proceso se dice que esta «bajo control estadístico» cuando se ha podido comprobar, por medio de un número razonable de datos, que su comportamiento es consistente y predecible; en caso contrario, cuando el proceso no se comporta de una forma predecible, debe decirse que está «fuera de control estadístico». De este modo, el gráfico de control se puede considerar como un procedimiento para caracterizar y controlar el comportamiento de un proceso, conformándose así como un mecanismo de control, en el sentido de ser un dispositivo de «decisión y acción para conseguir un fin deseado» (SHEWHART, 1986, pág. 8).

Debajo de este sencillo objetivo subyace un planteamiento estadístico que, bien por desconocimiento bien por la familiaridad de las técnicas, pasa desapercibido. En muchas ocasiones parece que el «control estadístico de la calidad» es diferenciado del «control de calidad» sólo por el uso de técnicas estadísticas, cuando en realidad supone una concepción mucho más amplia que abarca la especificación, producción e inspección de la calidad. Es, en palabras del propio Shewhart, «un proceso dinámico, continuo y autocorrectivo diseñado con el propósito de conseguir y mantener un estado de control estadístico» (SHEWHART, 1986, pág. 38). Este proceso, destinado a minimizar la variabilidad en la calidad de un producto a coste dado, engloba también un método racional de predicción sobre el resultado de un proceso productivo: afirmar que la calidad está estadísticamente controlada supone una inferencia probabilística basada en la evidencia obtenida sobre el proceso de producción. Para ello es necesario un diseño experimental del proceso, un «plan de muestreo» del mismo y un tratamiento probabilístico de la información. Así pues, la aportación de Shewhart al control de calidad no se reduce a la exposición de sus conocidos gráficos de control, sino que abordó un esquema mucho más amplio que merece ser estudiado como uno de los primeros casos de aplicación de la filosofía estadística moderna a una situación real.

Planteamiento del estado estadístico de control

Hoy en día, se tiende a pensar que un gráfico de control no es más que la representación gráfica de un contraste de hipótesis sobre la estabilidad de los parámetros que rigen la distribución probabilística de una variable de calidad, usualmente normal. Esta idea es origen, para otros consecuencia, de la confusión entre que una secuencia de observaciones de la variable esté bajo control estadístico y que se pueda admitir que éstas provienen de la misma población (o «universo estadístico» según lo definía Shewhart).

Como ya resaltaba el propio autor, la decisión sobre el posible estado de control estadístico de un proceso está basado en la información pasada de la que se dispone, necesariamente finita. Por ello, la equivalencia entre el control estadístico y la existencia de una distribución probabilística concreta presenta varias dificultades:

— En primer lugar, a partir de una información finita es imposible determinar una única distribución de probabilidad para decidir si se está o no bajo control. Ante este problema, se suele adoptar el supuesto de la normalidad en la distribución de la característica de calidad, utilizando para ello los teoremas límite, sin hacer referencia al coste asociado con la disponibilidad de una cantidad de información tal que sea razonable este supuesto[6]. Aparte de la necesidad de una muestra suficientemente grande, los contrastes de bondad de ajuste a una curva teórica son independientes del orden de ocurrencia de dicha muestra, lo que puede invalidar parcialmente sus conclusiones. Consciente de estas dificultades, Shewhart intenta establecer mecanismos de control que, en la medida de lo posible, no dependan de la modelización probabilística o, en sus términos, «... we can not reasonably hope to construct a model that will represent exactly any specific characteristic of a particular state of control even though such a state actually exists» (SHEWHART, 1986, pág. 19). Así, por ejemplo, propone que los límites de control de los gráficos se sitúen a tres desviaciones típicas sin hacer referencia a probabilidades asociadas bajo ninguna distribución. Posteriormente, se han justificado estos límites haciendo referencia al nivel de significación de los contrastes de hipótesis, y achacando esta ausencia a una deficiente comprensión probabilística por parte de Shewhart de su propuesta. Nada más lejos de la realidad: su formación, su trayectoria profesional y sus relaciones con estadísticos y matemáticos de la época indican que conocía perfectamente el entramado probabilístico de su propuesta y que la falta de una justificación distribucional de los límites fue premeditada y orientada a paliar los efectos de los problemas de robustez.

— En segundo lugar, una distribución probabilística describe propiedades sobre secuencias infinitas, no sobre una porción finita de observaciones; así, cualquier supuesto distribucional tendría sentido pleno sobre secuencias infinitas de observaciones. Además, Shewhart considera el uso de distribuciones bajo una óptica frecuentista que no coincide con su noción de probabilidad,[7] por lo que para aceptar una proposición probabilística basada en una distribución se precisaría la existencia de un orden aleatorio de la muestra, supuesto restrictivo como veremos en el punto siguiente.

— En tercer lugar, una distribución no hace referencia ninguna al orden de la secuencia. Esta dificultad presenta una doble vertiente: por un lado, el uso de la Teoría de Distribuciones Probabilísticas precisa el supuesto de aleatoriedad. La decisión de cuándo una secuencia infinita o finita es aleatoria ha supuesto un problema estadístico de primer orden. Por su extensión, no abordaremos en este trabajo una exposición del problema, pero sí resaltaremos que Shewhart intentó encontrar una solución aceptable a este problema (SHEWHART, 1986, págs. 13-18). Por otro lado, el orden de la secuencia también constituye una pieza fundamental para asegurar que el proceso está bajo

[6] Cada vez son más frecuentes los estudios sobre la robustez de los métodos ante este supuesto, lo que tiende a paliar este problema histórico.

[7] Noción que por su importancia abordaremos más adelante detenidamente.

control estadístico, situación no contemplada por los supuestos distribucionales. De hecho, aunque posteriormente se han establecido criterios para considerar un proceso como fuera de control estadístico[8], éstos no se basan en decidir cuándo una secuencia es aleatoria, sino en cuándo ésta es claramente no aleatoria.

Por todo ello, Shewhart renuncia a determinar una condición matemática para definir el estado de control estadístico, sino que se ve en la necesidad de adoptar, arbitrariamente, algunos criterios operativos. O, en otros términos, enfoca el control estadístico como una operación destinada a orientar la decisión de cuándo un proceso está en estado de control estadístico. Para ello, determina cinco condiciones necesarias para definir una operación de control de calidad:

1. Especificar, de forma general, cómo se examinará una secuencia de *n* observaciones para indagar la existencia de causas asignables de variabilidad.
2. Especificar cómo se obtendrán los datos y cómo se organizarán de forma que sea posible determinar si las condiciones bajo las que fueron obtenidos son las mismas o no.
3. Especificar el criterio de control que se usará, indicando qué estadísticos se emplearán y cómo intervendrán en la determinación de los límites de control.
4. Especificar qué acción se emprenderá cuando un estadístico observado esté fuera de los límites de control.
5. Especificar de qué cantidad de datos que cumplan los criterios de control debe disponerse para aceptar que el proceso ha alcanzado un estado de control estadístico. Ya que las causas asignables de variación pueden estar presentes desde el principio, es necesario que el proceso de control sea gradual.

Como se puede apreciar, existen varios axiomas o presupuestos básicos. Por ejemplo, bajo la primera condición subyace el supuesto de que la operación de producción es aleatoria[9], por lo que la pista para determinar la existencia de una causa asignable de variación es «cualquier cosa» que indique no aleatoriedad en los datos. Y ante la dificultad de determinar si una secuencia es aleatoria o no, el criterio adoptado se basa en la experiencia pasada: «...we must depend on past experience to suggest what, if any, characteristics of a given set of *n* values of *X* are more likely to occur in nature as a result of a nonrandom than as a result of a random operation» (SHEWHART, 1986, pág. 26).

Las condiciones tercera y cuarta, muy interrelacionadas, suponen el aspecto más visible de los dispositivos de control estadístico y marcan el carácter continuo y

[8] Las conocidas reglas de la Western Electric.

[9] En el sentido de que las secuencias de observaciones que proporciona son aleatorias.

autocorrectivo de los mismos. En concreto, éstos no deben indicar sólo cuando hay una causa asignable de variación, sino que deben ayudar a descubrir dichas causas. Sin embargo, la expresión «causa asignable» no está exenta de problemas, ya que esta consideración depende de las condiciones del proceso y de la experiencia previa. Como se destaca en Shewhart (1986): «Obviosusly there is no a priori, formal, and mathematical method of setting up a criterion that will indicate an assignable cause in any given case. Instead, the only way one can justify the use of a given criterion is through extensive experience. The fact that the use of a given criterion must be justified on empirical grounds is emphasized here in order to avoid the confusion of such a criterion with a test of statistical significance»[10]. De nuevo nos encontramos con una discrepancia con lo comúnmente aceptado hoy en día. Efectivamente, el uso de contrastes estadísticos de significación supone una inferencia «deductiva» en el sentido de que éste se determina sin el uso de la información muestral, estando basado exclusivamente en los supuestos distribucionales: sólo cuando éste está construido se compara el valor muestral con los límites. Por contra, para determinar la existencia de una causa asignable cuando el estadístico observado está fuera de los límites de control se precisa de la inferencia inductiva, que sólo se puede basar en la evidencia empírica. Por otro lado, una operación de control de calidad no contrasta sólo la validez de ciertas hipótesis, sino también si la muestra de datos fue obtenida bajo condiciones que pueden considerarse aleatorias. La consideración moderna de un gráfico de control como la representación de un contraste de hipótesis vuelve a ser rechazada tajantemente por Shewhart (1986, pág. 40): «As a background for the development of the operation of statistical control, the formal mathematical theory of testing a statistical hypothesis is of outstanding importance, but it would seem that we must continually keep in mind the fundamental difference between the formal theory of testing a statistical hypothesis and the empirical testing of hypothesis employed in the operation of statistical control».

Pero el supuesto básico más importante en el diseño de los gráficos de control es la propia concepción filosófica de probabilidad que subyace en el trabajo de Shewhart. Cualquier postulado sobre el posible estado de control estadístico de un proceso es interpretado como una inferencia probabilística que implica una predicción, que puede ser cierta o no, sobre una parte no observada de la producción. Dicha predicción se ha de basar en la evidencia disponible, consistente en la muestra de valores obtenidos. En este planteamiento surge la necesidad de decidir qué se entiende por probabilidad y cómo efectuar predicciones «válidas» a partir de la evidencia disponible, que se resume en el siguiente postulado (Shewhart, 1986, pág. 42):

---

[10] Subrayado propio.

Postulate II. The objective degree of rational belief p *in an inference involving a prediction* P *based upon evidence* E *is not an intrinsic property like truth but inheres in the inference throungh some relation of the prediction* P *to the evidence* E.

El concepto adoptado es muy similar a la concepción lógica de probabilidad que podemos encontrar en autores de la época como J. M. Keynes (1921) y se aleja de la concepción clásica o frecuentista más común. Las consecuencias de este planteamiento en la elaboración del control estadístico de calidad son importantes, algunas de la cuales ya se han comentado parcialmente.

En primer lugar, al caracterizar matemáticamente el estado de control estadístico se hizo referencia a la interpretación de la distribución de las variables de calidad en términos frecuentistas y, por tanto, no podían servir de base para la elaboración de enunciados probabilísticos. Coherente con su concepción, la obtención de los límites de control no la basa en los criterios de probabilidad de error de tipo I o tipo II de los contrastes clásicos de hipótesis, sino que los justifica como «límites de aviso» de forma que si las observaciones caen fuera, es deseable intervenir en el proceso para reconducirlo; y, como no puede ser de otra forma en su esquema, la idoneidad de éstos está basada en la concordancia con la evidencia (experiencia) disponible. En sus propias palabras «... the action limits do not apply as a gauge for product already made: their function is to call attention to evidence for believing that the manufacturing process includes assignable causes of variation in the quality that may give trouble in the future if they are not found and removed». (SHEWHART, 1986, pág. 24)

Otra consecuencia ya comentada es su empeño en resaltar la diferencia entre un gráfico de control y un contraste estadístico de hipótesis. Como la validez de una predicción o de un enunciado probabilístico depende de su relación con el cuerpo de evidencia disponible, todo enunciado será un caso de inferencia inductiva, no estando justificada la adopción de supuestos no avalados por ésta, por ejemplo los basados en secuencias infinitas de observaciones ya que no se puede disponer de evidencia infinita.

También el carácter continuo y autocorrectivo de un proceso de control estadístico de calidad está influido por la concepción adoptada. Las tres fases destacadas (especificación, producción e inspección) no deben sucederse de forma lineal, ya que los requisitos de especificación deben estar relacionados con la información disponible, que se obtendría después de la producción y la inspección. Por ello, el proceso de control estadístico de calidad se corresponde con un proceso científico dinámico de adquisición de conocimiento (elaboración de hipótesis, experimentación, contrastación y elaboración de hipótesis nuevas o modificadas). En este sentido, los gráficos de control son mecanismos estadísticos para ampliar o modificar nuestro conocimiento del proceso a partir de la información muestral disponible, acercándose más a los contrastes bayesianos de hipótesis que a los contrastes de significación.

A pesar de lo anterior, los gráficos de control no pueden considerarse plenamente bayesianos debido al supuesto de existencia de un «grado de creencia» racional objetivo en el proceso inferencial. Sin embargo, Shewhart rehúsa discutir la adopción de este supuesto; es más, en un momento afirma (SHEWHART, 1986, pág. 42): «The fact that we must depend upon a human individual to choose successfully from his experience those conditions that he believes will lead to valid conclusions through the use of probability theory indicates what appears to be a necessary human act of rational believing and this act is always an attempt to relate past evidence *E* with a prediction *P*». Posiblemente hijo de su tiempo, acepta sin más la existencia de un grado objetivo de creencia racional, sin plantearse la compatibilidad del supuesto de racionalidad con la existencia de varios grados de creencia; es decir, no contempla explícitamente la existencia de «grados subjetivos de creencia racional». Sin embargo, en su planteamiento probabilístico no es imprescindible el supuesto de objetividad en ningún momento, sino que es plenamente compatible con un esquema subjetivo como pudiera ser el desarrollado posteriormente por De Finetti.

Por último, y como resumen de lo expuesto en este epígrafe, habría que destacar que la adopción de un criterio estadístico en el proceso de control de calidad no supuso sólo la utilización de una herramienta más o menos ingeniosa, sino un nuevo planteamiento completo del proceso de obtención y aseguramiento de la calidad. Además, frente a las opiniones de algunos autores posteriores, no fue un proceso eminentemente empírico con una justificación teórica y estadística escasa. La obra de Shewhart responde a un esquema conceptual sólido basado en las ideas científicas y probabilísticas de la época, y que tuvo un gran impacto en el mundo industrial. Quizás este éxito y la consecuente aplicación masiva de las técnicas, encubrieron los fundamentos teóricos del control estadístico de la calidad que, con el tiempo y la evolución de los conceptos probabilísticos, pasaron a ser menos conocidos de lo que se merecen por su valor histórico como ejemplo pionero de las capacidades del método estadístico.

Desarrollos posteriores del control estadístico de la calidad

Como ya hemos comentado, el primero en aplicar métodos estadísticos al control de calidad fue Walter A. Shewhart de los laboratorios Bell Telephone. En 1931 publicó el libro *Control económico de la calidad de productos fabricados* (VAN NOSTRAND, Nueva York), donde exponía el control de la calidad desde un punto de vista económico, si bien la mayoría de las aplicaciones resultaban altamente costosas, lo que llevó a un rechazo por parte de muchos fabricantes de la época. También en los laboratorios Bell Telephone, Harold F. Dodge y Harry G. Roming empezaron a aplicar la Teoría Estadística en la inspección por muestreo, trabajos que culminaron con las bien conocidas tablas de inspección por muestreo Dodge-Roming. El trabajo de estas tres personas supone el punto de partida de lo que hoy en día se conoce como Teoría Estadística del Control de Calidad.

En la década de los cuarenta comenzó el desarrollo y aplicación de tablas de muestreo para inspecciones de aceptación y se publicaron tablas de muestreo para usos militares, probando su empleo por parte de las fuerzas armadas. Estas últimas dieron lugar al Militar Standard 105D, muy utilizadas por entidades públicas y privadas para el desarrollo de inspecciones de aceptación por muestreo de atributos. El Ministerio de Defensa publicó también su Militar Standard 414, utilizado para muestreos de aceptación basados en variables.

Durante la II Guerra Mundial se crearon numerosos programas de formación para familiarizar a personas con escasa formación en el uso de técnicas estadísticas de control de calidad aplicadas en la industria, como gráficos de control y muestreo de aceptación que se pudieran aplicar a los materiales recibidos para afrontar la guerra. Otro desarrollo durante este período fue la creación de dos grupos de estadísticos e ingenieros para investigar en el uso de la estadística en el control de calidad. Uno de los grupos fue formado por Walter Shewhart e incluía entre otros a Harold Dodge y W. Edwards Deming.

En julio de 1942 se formó un grupo de investigación estadística en la Universidad de Columbia, entre cuyos resultados está el desarrollo de análisis secuenciales o el uso de análisis multivariantes en control de calidad con la introducción del estadístico T^2 por Harold Hotelling, uno de los principales investigadores del grupo. Las mayores contribuciones dieron como resultado la publicación de *Sampling Inspection* (1948), *Techniques of Statistical Analysis* (1947) y *Sequential Analysis of Statistical Data: Applications* (1945).

En 1946 se crea la Sociedad Americana de Control de Calidad (ASQC) como resultado de la fusión de varias sociedades que trataban temas relacionados con la calidad. Esta sociedad absorbió algunas publicaciones especializadas en el control de la calidad y promovió el uso del control estadístico de la calidad en el continente americano. Posteriormente se creó una sección de esta sociedad en Japón. También en este año, el Dr. Edwards Deming, especialista en estadística, es invitado a Japón para ayudar a la reconstrucción de la industria japonesa, que se recuperaba de los estragos de la guerra. En una conferencia ante dirigentes de las grandes industrias, afirmó que si aplicaba en sus fábricas un adecuado control estadístico de la calidad, la marca «Made in Japan» llegaría a ser un símbolo de alta calidad.

Bajo la guía del Dr. Edwards Deming, el control estadístico de la calidad en Japón fue desarrollado como uno de los mejores sistemas de control de calidad del mundo. El profesor K. Ishikawa crea los primeros círculos de calidad en Japón y empieza a desarrollar una serie de herramientas básicas que van a dar lugar a lo que en el argot del control de la calidad se conoce como herramientas básicas de control de calidad, también conocidas como herramientas de Ishikawa o las siete magníficas, muy utilizadas hasta los años noventa, en los que la mayor exigencia en la calidad del producto ha supuesto el desarrollo de una serie de técnicas más complejas y eficaces desde un punto de vista estadístico.

Con el paso de los años, los gráficos de control Shewhart han recibido una mayor formalización desde un punto de vista estadístico y se han establecido como un contraste de hipótesis sobre el parámetro que queremos controlar, normalmente la media del proceso. Esto nos ha llevado a que la ubicación inicialmente propuesta por Shewhart de los límites de control a tres desviaciones típicas de la media, ya no se realiza de forma totalmente empírica, sino que posee una fundamentación probabilística. Después de los gráficos de control y planes de muestreo, se han desarrollado distintas técnicas de control de la calidad con mayor base estadística, basándose gran parte de estos desarrollos en la Teoría de los Procesos Estocásticos.

En 1954, E. S. Page desarrolla el gráfico de control de sumas acumuladas (CUSUM) que intenta solucionar el problema que presentaba el gráfico de control Shewhart cuando los cambios en el proceso eran de pequeña magnitud. Este gráfico de control va a considerar la información pasada del proceso en su desarrollo, lo que va a suponer que su comportamiento ante cambios de pequeña magnitud va a ser mejor que el del gráfico Shewhart. También en esa fecha, el Dr. J. M. Juran empieza a difundir los métodos estadísticos y los sistemas de control de calidad entre todos los dirigentes y mandos intermedios de las empresas japonesas. Esta inquietud se extiende por todas las empresas japonesas y se crea un reto por la calidad.

En 1959, S. Roberts introduce el gráfico de control de medias móviles exponencialmente ponderadas, conocido como gráfico EWMA (Exponentially Weighted Moving Average). Este gráfico de control igual que el gráfico CUSUM va a comportase mejor que el tradicional gráfico Shewhart ante la presencia de cambios de pequeña magnitud en el proceso, si bien en este caso la inclusión de la información pasada del proceso se realiza considerándolo como un proceso estocástico.

Uno de los principales desarrollos dentro de las técnicas de control estadístico de la calidad está centrado en la aplicación de técnicas multivariantes que nos permitan analizar la situación dada en la práctica de una forma más adecuada. Con las técnicas univariantes solamente vamos a controlar la calidad de los productos elaborados mediante el análisis de una sola característica de calidad, normalmente la más importante o influyente en la calidad final del producto. Sin embargo, en los procesos de producción actuales existe más de una característica que influye en la calidad final de los productos. Para solventar este problema y poder controlar varias características al mismo tiempo surgen las técnicas multivariantes. Dentro de éstas caben destacar por su mayor desarrollo y aplicación, el gráfico de control T^2 de Hotelling y los gráficos MCUSUM y MEWMA.

El gráfico T^2 de Hotelling se puede considerar como la extensión multivariante del gráfico de control de Shewhart y fue introducido por Harold Hotelling en 1941. Este gráfico nos permite determinar, analizando varias características de calidad de forma simultánea, si un proceso está o no bajo control. Los principales inconvenientes que presenta el uso de esta técnica de control estadístico de la calidad son los siguientes:

- El estadístico T^2 es una forma cuadrática que no distingue entre cambios en la media y en la varianza del proceso.

- No detecta pequeños cambios en el proceso.

- Las variables son tratadas de forma simultánea, por lo que es difícil asignar a qué variable se debe la posible señal de fuera de control. Para solucionar este problema se han desarrollado distintas técnicas de tratamiento de la información, que nos permite determinar qué variable ha tenido una mayor influencia en esa situación fuera de control. Entre esas técnicas caben destacar el uso de gráficos univariantes para cada una de las variables, la aplicación de componentes principales, la descomposición del estadístico T^2 viendo la contribución de cada una de las variables y el uso de intervalos de confianza tipo Bonferroni.

- El estadístico T^2 sólo usa para su cálculo la información actual del proceso, dejando a un lado la información pasada del mismo.

Para solucionar este último inconveniente se desarrollan los gráficos de control multivariantes MCUSUM y MEWMA, extensión multivariante de los gráficos de control CUSUM y EWMA, que presentan como principal ventaja la mayor rapidez en la detección de pequeños cambios en el proceso.

Ya hacia 1950, el profesor G. Taguchi empieza el estudio y aplicación del diseño de experimentos para la mejora de productos y procesos, que fueron introducidos inicialmente en los Estados Unidos. Las aplicaciones iniciales fueron desarrolladas en la industria química y fueron rápidamente explotadas por estas industrias, por lo que son de las más competitivas del mundo. En el resto de industrias el desarrollo fue muy lento, hasta que a finales de los setenta o inicios de los ochenta muchas empresas se dan cuenta de que sus competidores japoneses llevan varios años utilizando este diseño de experimentos para mejorar la calidad y es entonces cuando empieza a desarrollarse por otras empresas.

Junto al desarrollo de los gráficos de control multivariantes, fue contrastado por distintos estadísticos que las suposiciones de partida aplicadas a la mayoría de los métodos gráficos de control de independencia y normalidad iban a ser, en la mayoría de los casos, demasiado restrictivas. Aunque el efecto del incumplimiento de la normalidad no era demasiado importante, el efecto de la no independencia sí que era importante, de ahí que se desarrollaran distintas técnicas de tratamiento de esa autocorrelación en las observaciones tales como la aplicación de modelos de series temporales o la utilización de límites de control empíricos.

Desde 1980 se ha producido un gran crecimiento en el uso de métodos estadísticos para la mejora de la calidad, fomentado sobre todo por el desarrollo de numerosas empresas sin un enfoque tan familiar. Además, el consumidor es cada vez más exigente en la relación calidad-precio ante el aumento de la oferta existente, lo que hace que la mayor diferenciación entre las empresas venga dada en términos de calidad o imagen de su producto, ya que no suelen existir grandes diferencias en el precio existente.

En 1987 fueron publicadas inicialmente un conjunto de normas y directrices internacionales para la gestión de la calidad denominadas normas ISO[11] 9000 que se usan como base para el establecimiento de sistemas de gestión de la calidad. Dado que los protocolos de ISO requieren que todas las normas sean revisadas al menos cada cinco años, la versión de estas normas dadas en 1994 fueron revisadas en el año 2000 dando lugar a las conocidas como normas UNE-EN ISO 9000 que es la versión española de las normas ISO 9000 para el año 2000. Esta familia de normas esta formada por tres normas básicas: UNE-EN ISO 9000, UNE-EN ISO 9001 y UNE-EN ISO 9004.

Hoy en día, esta mejora de la calidad no sólo se centra en la mejora de la calidad de la producción final, sino que existe también un gran desarrollo en la mejora de procesos de producción que nos permita asegurar en cierto modo la calidad de esos productos a largo plazo.

También se ha extendido una cultura de la calidad que afecta al conjunto de la empresa, denominada «calidad total». La implantación de esta cultura se debe a la gran importancia que dan los consumidores a la calidad del producto, así como al mayor control que existe por parte de la administración en la calidad de dichos productos. Con esta «calidad total» lo que se persigue es un compromiso por parte del

[11] ISO es la Organización Internacional de Normalización.

conjunto de la empresa para mejorar, ya no sólo la calidad de los productos manufacturados, sino también un aumento en la de los servicios, relaciones con los clientes, otros proveedores e incluso con la misma administración pública.

Desafíos actuales

En los últimos años los desarrollos dentro del campo del control estadístico de la calidad están centrados básicamente en dos ámbitos fundamentales. En primer lugar, se pretende analizar detalladamente el efecto del incumplimiento de las hipótesis estadísticas básicas sobre los gráficos de control multivariantes. En este campo, las direcciones presentes de investigación se centran en:

1. Análisis de la robustez de los modelos ante alteraciones en la hipótesis de normalidad, explorando el uso de contrastes distintos a los habituales cuando no se cumpla esta hipótesis, así como el análisis del comportamiento de los contrastes habituales ante distribuciones de la familia exponencial.
2. Planteamiento no paramétrico del control estadístico de la calidad, de reciente aparición en la bibliografía especializada, y que precisa tanto de la especificación de nuevos gráficos de control como del estudio de su efectividad frente a las técnicas paramétricas clásicas.
3. Desarrollo y análisis de técnicas de eliminación de la autocorrelación muestral que aborden el problema directamente desde un punto de vista multivariante y, por lo tanto, no haya que recurrir a la aplicación sucesiva de técnicas univariantes. Dentro de estas técnicas, cabe destacar la posible aplicación de modelos de series temporales multivariantes para eliminar la correlación existente entre las observaciones.

Un segundo campo de investigación está centrado en la construcción de técnicas estadísticas que permitan la reducción eficiente de la dimensionalidad y que exploten la estructura de correlación poblacional. Con este objetivo, se abordan dos líneas fundamentales:

1. La obtención de factores comunes dinámicos, generalización de la técnica de correlación canónica de Akaike, que puede permitir la reducción de la dimensionalidad sin pérdida excesiva de la cantidad de información muestral. Concretamente, se está estudiando la distribución probabilística de los mencionados factores comunes, que debe permitir la obtención de límites estadísticos de control y el estudio de la potencia de los contrastes.
2. Desarrollo de las técnicas de obtención de tendencias comunes, sobre todo en espacio de estados, que permitan explotar la estructura de correlación poblacional para obtener gráficos de control más eficientes que los clásicos en la detección de observaciones fuera de control estadístico.

Por lo tanto, como se puede observar con este breve repaso de la evolución histórica del control de la calidad, cada día tanto en las organizaciones como en la sociedad existe una mayor preocupación por los temas relacionados con la calidad. De ahí la gran evolución que han presentado las técnicas de control de calidad, y entre ellas los métodos estadísticos de control de la calidad.

BIBLIOGRAFÍA

ALT, F. B. (1985): «Multivariate Quality Control», en *Encyclopedia of Statistical Sciences,* vol. 6. John Wiley, New York.

BESTERFIELD, D. H. (1995): *Control de calidad,* 4.ª Ed. Prentice-Hall.

CAROT ALONSO, V. (1996): *Control estadístico de calidad.* Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia.

FUCHS, C. & KENETT, R. S. (1998): *Multivariate Quality Control.* Marcel Dekker, New York.

ISHIKAWA, K. (1994): *Introducción al control de calidad.* Díaz de Santos.

KEYNES, J. M. (1921): *A Treatise on Probability.* Macmillan. London.

LOWRY, C. A.; WOODALL, W. H.; CHAMP, C. W. & RIGDON, S. E (1992): «A Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart». *Technometrics*, 34.

MITRA, A. (1998): *Fundamentals of Quality Control and Improvement.* Prentice Hall.

MONTGOMERY, D. C. (2001): *Introduction to Statistical Quality Control* (4th ed.). John Wiley, New York.

PETERS, W. S. (1987): *Counting for Something.* Springer-Verlag, New York.

PIGNATIELLO, J. J. & RUNGER, G. C. (1990): «Comparisons of Multivariate Cusum Charts». *Journal of Quality Technology* 22, págs. 173-186.

RYAN, T. P. (2000): *Statistical Methods for Quality Improvement.* Jonh Wiley, New York.

SHEWHART, W. A. (1939): *Statistical Methods from the Viewpoint of Quality Control.* Graduate School of the Department of Agriculture, Washington, D.C.

_______________, (1941): «Contribution of Statistic to the Science of Engineering». En *Fluid Mechanics and Statistical Methods in Engineering.* University of Pennsylvania Press, Philadelphia, PA, págs. 97-124.

_______________, (1986): *Statistical Methods from the Viewpoint of Quality Control. (Reprint).* Dover Publications, New York.

STIGLER, S. M. (1999): *Statistics on the Table: The History of Statistical Concepts and Methods.* Harvard University Press, Cambrigde, Massachusetts.

WADSWORTH, H. M.; STEPHENS, K. S. y GODFREY, A. B. (2001): *Modern Methods for Quality Control and Improvement.* John Wiley & Sons, New York.

CAPÍTULO 38

Utilización de métodos estadísticos en la cultura de calidad japonesa: segunda mitad del siglo XX

MERCEDES CASAS GUILLÉN
Universidad San Pablo CEU

Introducción: las etapas de la calidad

Desde sus orígenes, la calidad ha sido interpretada desde diferentes perspectivas en las que subyace como un concepto global y unificador vinculado al objetivo de excelencia de toda empresa. La evolución de los significados de la calidad a lo largo del siglo XX se materializa en las denominadas etapas de la calidad: control, aseguramiento y calidad total.

El control de calidad comienza poco antes de la II Guerra Mundial, con la aplicación de técnicas estadísticas a la regulación de los procesos productivos, que generalmente es denominado Control de Calidad Estadístico (CCE), porque se basa en la adaptación de metodologías cuantitativas a la recogida de datos sobre el proceso productivo que permitan explicar su funcionamiento y evolución. Su aplicación se multiplicó en las industrias cuando el conflicto bélico era inminente, ante la necesidad de conseguir una producción masiva de armas de precisión y con presupuesto reducido. En la postguerra, los métodos estadísticos que se venían aplicando en calidad en la producción fueron difundidos en multitud de países y la cultura de calidad era objeto de estudio de importantes grupos de investigadores.

A partir de la década de 1950, se plantea una nueva forma de la calidad mediante la sistematización de los procesos productivos desde el diseño del producto hasta la obtención del mismo para su comercialización. En esta etapa de aseguramiento de calidad se generaliza el uso de auditorías y evaluaciones de la calidad en las empresas, así como el marcado de productos al amparo de una normativa común.

En el último tercio del siglo XX, las organizaciones empresariales se dan cuenta de que el cumplimiento de una normativa genérica no es suficiente para satisfacer las necesidades de una clientela cada vez más exigente. Los objetivos de calidad de la empresa sólo se alcanzarán si existe un compromiso de cada uno de los integrantes de la empresa en conocer y participar en el Plan de Calidad. La fase de control de calidad total debe ser llevada a cabo por el sistema empresa, tanto por empleados y directivos, como por terceros colaboradores, con la finalidad de que la calidad total sea la herramienta de gestión empresarial que proporcione una relación duradera del cliente con la empresa.

Comienzo del control de calidad estadístico: cuadros de control

La aplicación a los procesos productivos industriales de los cuadros de control (chart control) ideados por el Dr. Walter Andrew Shewhart (1891-1967) marca el comienzo de lo que se ha llamado Control de Calidad Estadístico (CCE). Mientras colaboraba como asesor técnico para los laboratorios Bell Telephone en 1931, Shewhart publicó el libro *Control económico de la calidad del producto fabricado* (*Economic Control of Quality of Manufactured Products*), en donde establecía la utilidad de los métodos cuantitativos para la evaluación e inspección de procesos de fabricación.

Básicamente, los cuadros de control son gráficos en los que se representan valores de medición de las características de un proceso productivo en funcionamiento, con objeto de observar sus fluctuaciones y detectar alteraciones anormales en la producción. En la práctica del proceso productivo existen variables necesarias para la fabricación que determinan los operarios, llamadas «variables controlables», así como otras «no controlables», que no son detectables ni se consideran significativas, por lo que provocan efectos inapreciables en la variabilidad total del proceso. Las fluctuaciones aleatorias de estas variables no controlables se denominan «causas no asignables» de variación del proceso porque son inherentes al proceso y no se pueden identificar, reducir, ni eliminar, sin alterar la identidad del mismo; sin embargo, las «causas asignables» deben ser modificadas para que el proceso productivo vuelva a su funcionamiento normal. En definitiva, el proceso está bajo «control estadístico» cuando solamente intervienen causas no asignables o aleatorias y su comportamiento es predecible, mientras que cuando aparecen causas asignables el proceso está «fuera de control estadístico» y es necesario intervenir en su reajuste. La variabilidad en los resultados de la medición de la característica evaluada del producto fabricado obedece únicamente a la aleatoriedad del proceso, por lo que los gráficos de control son herramientas que permiten transformar el proceso a partir de las observaciones muestrales, utilizando planteamientos estadísticos tanto en la especificación previa de los parámetros del proceso productivo, como en la posterior fijación de los límites de control en la cuantía de $\pm k$ desviaciones estándares del promedio obtenido.

Aseguramiento y estandarización de la calidad: inspección por muestreo y normas de producción

A pesar de que la aceptación del Control de Calidad Estadístico en Estados Unidos no fue inmediata, en la década de 1940 se desarrollaron programas divulgadores para operarios de la industria y se crearon conglomerados de científicos nacionales e internacionales. En 1942, en la Universidad de Columbia de Nueva York se crea un Grupo de Investigaciones Estadísticas en el que trabajan profesores de varias Universidades y Centros de Investigación norteamericanos en el desarrollo de modelos estadísticos aplicables al control de calidad. El profesor Abraham Wald (1902-1950) desarrolló la técnica del muestreo secuencial clasificada como secreto militar hasta finalizar la II Guerra Mundial. El análisis secuencial consiste en un estudio de los datos inmediato a su obtención, de modo que se agiliza el procedimiento de muestreo, especialmente en el análisis de la ocurrencia de fallos en las cadenas de producción.

Dos años después, los ingenieros Harold F. Dodge y Harry G. Romig de Laboratorios Bell, editaron los procedimientos de muestreo de aceptación y las tablas completas de planes de muestreo[1] que habían desarrollado. En esa misma línea, se publicaron las Normas Norteamericanas de Guerra Z.1 relativas al control de calidad en la industria armamentística[2], así como las tablas de muestreos de aceptación

[1] DODGE, H. F. y ROMIG, H. G. (1944): *Sampling Inspection Tables-Single and Double Sampling,* John Wiley & Sons, Nueva York.

[2] (1941) Z.1.1: *Guía para el Control de Calidad;* Z.1.2: *Método del gráfico de control para analizar datos,* Asociación Americana de Normalización.

(1942) Z.1.3: *Método del gráfico de control para controlar la calidad durante la producción,* Asociación Americana de Normalización.

basadas en variables e inspección por atributos[3] que empleaba el ejército y las Fuerzas Armadas norteamericanas.

En Gran Bretaña uno de los investigadores destacables del control de calidad estadístico fue el profesor del University College de Londres, Egon S. Pearson (1895-1980), quien con el apoyo de Shewhart proyectó ciclos formativos de conferencias y seminarios de calidad y dio a conocer sus progresos a través del manual *Un análisis de las aplicaciones del método estadístico en el control y la estandarización de la calidad de productos fabricados.* Pearson formó parte del Comité Investigador de Métodos Estadísticos en la Estandarización y la Especificación, formado por el Instituto de Normalización Británico con el objetivo de elaborar las normas de producción británicas *British Standard* (BS)[4].

Finalmente, con objeto de velar por el cumplimiento de ciertos estándares en la calidad de productos y servicios, la ONU crea en 1946 el ente especializado International Standard Organization (ISO) encomendado a la elaboración de normas universales reguladoras de las características de productos, procesos y servicios.

Control de calidad en Japón

Control estadístico de calidad y estandarización

En la década de 1930 los productos elaborados en Japón competían en el mercado exterior por ser de bajo precio aunque era conocida su mala calidad, cualquier artículo «fabricado en Japón quería decir "barato y malo"»[5]. Tomando como referencia a Inglaterra o Estados Unidos, durante la II Guerra Mundial la industria armamentística japonesa se encontraba muy rezagada en el empleo de sistemas de producción y control modernos y eficaces, lo que provocaba frecuentes fallos en las municiones y armas empleadas. Tras el conflicto bélico, el ejército norteamericano se instaló en Japón a las órdenes del general Douglas McArthur quien había dis-

[3] (1952) Military Standard 414: *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Defective,* Servicio Nacional de Información Técnica Departamento de Defensa, Washington D.C.

Military Standard 1235-ORD: *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Variables for Percent Defective,* Servicio Nacional de Información Técnica Departamento de Defensa, Washington D.C.

Military Standard 105D: *Sampling Procedures and Tables for Inspection by Attributes,* Servicio Nacional de Información Técnica, Washington D.C.

[4] (1935) British Standard 600: *The Application of Statistical Methods to Industrial Standarization and Quality Control,* Instituto Británico de Normalización.

[5] ISHIKAWA, K. (1994): *Introducción al control de calidad,* Díaz de Santos, Madrid, pág. 11.

puesto que las instrucciones y noticias llegasen a los hogares japoneses por vía de emisiones radiofónicas, sin contar con que la industria de comunicaciones existente en aquel momento era muy limitada. Por este motivo, llegó a Japón un grupo de expertos ingenieros norteamericanos encargados de fabricar radios fiables que permitieran a los habitantes japoneses escuchar los programas norteamericanos.

Uno de los ingenieros encargados de este ambicioso proyecto fue Homer M. Sarasohn (1916-2001), quien decidió que el punto de partida para reactivar los sistemas de comunicaciones era la modificación de la estructura organizacional de las industrias. Además de dotar a las fábricas de la infraestructura necesaria, a los trabajadores se les preparó en especializar su trabajo y a los directivos se les instruyó en nuevos sistemas de gerencia, logrando hacer realidad la fabricación japonesa de artículos tales como receptores de radio, teléfonos, transmisores, así como sus componentes. Entre 1949 y 1950, Sarasohn y su colega Protzman acudieron a diferentes ciudades japonesas a impartir un Seminario de Gerencia de la Calidad en donde operarios y gerentes asimilaban conocimientos sobre ingeniería industrial, procesos de producción, control de calidad, innovación del producto, estrategia y organización de la empresa.

Gran parte del impulso realizado en Japón a la difusión del control de calidad se debe a la institución JUSE (Japan Union Scientists and Engineers), Unión de Científicos e Ingenieros Japoneses, de la que han formado parte excelentes investigadores como Kaoru Ishikawa (1915-1989), y que invitó a importantes figuras internacionales a participar en la tarea de reconstrucción del país. En 1949, esta asociación acude a académicos, industriales y representantes gubernamentales para crear un Grupo de Investigación en Control de Calidad (Quality Control Research Group) que colabore en la educación y promoción del control de calidad en diversos países.

Del mismo modo que se había producido en Estados Unidos o en Inglaterra, durante la etapa de aseguramiento y normalización japonesa se promulgan estándares de producción industrial que llevan a instituir en 1950 el sistema de Marca JIS. Este marcado garantizaba el cumplimiento de las normas industriales japonesas de calidad en aquellas fábricas que se habían sometido voluntariamente a la inspección de sus procesos productivos.

Por iniciativa de Sarasohn, en 1950 la JUSE invitó al Dr. Walter Edwards Deming (1900-1993) a transmitir en Japón sus conocimientos sobre control de calidad. Deming era profesor de Estadística en la Universidad de Nueva York y había dedicado sus investigaciones al empleo de la estadística como herramienta del control de calidad. «En los estudios (...) incluyo el uso de la Teoría Estadística a los problemas que se presentan en la producción industrial, en las pruebas de los materiales físicos, comparación del funcionamiento de hombres y de máquinas bajo mismas condiciones... investigación del consumidor (...)»[6]. En esencia, su idea era «registrar el número de los defectos de producto, analizar el porqué de lo sucedido y corregir los procesos para posteriormente evaluar las mejoras de calidad hasta conseguir que el proceso se realice correctamente»[7]. En la primera de las once visitas que realizó a Japón, y durante ocho días, Deming enseñó «los principios elementales del control estadístico de la calidad»[8] a doscientos treinta ingenieros y técnicos japoneses y estableció contacto con presidentes y altos directivos de numerosas industrias japonesas, con el propósito de mejorar la precisión y confiabilidad de los productos japoneses. Los temas tratados por Deming en su seminario fueron los siguientes[9]:

1. Cómo mejorar la calidad mediante el ciclo de Planear, Hacer, Verificar, Actuar (PHVA, o ciclo Deming, relacionado con diseño, producción, encuestas y rediseño).
2. La importancia de captar la dispersión de las estadísticas.
3. Control de procesos mediante el empleo de cuadros de control y cómo aplicarlos.

El fruto de las enseñanzas de Deming en Japón ha sido una mayor comprensión de su filosofía de calidad y un mayor éxito en su puesta en práctica que en las empresas norteamericanas, a causa de la idea que subyacía en los directivos de Estados Unidos de conceder prioridad a la cantidad sobre la calidad. En honor a Deming, el director de JUSE, Kenichi Koyanagi, propuso financiar el Premio Deming (Deming Prize) para promover el desarrollo del control de calidad, y que se concede en la modalidad individual a aquellas personas que han empleado técnicas estadísticas en el control de calidad. No obstante, el reconocimiento de las aportaciones de Deming en su país natal no le llegó hasta 1980, cuando participó en el reportaje televisivo «Si Japón puede, ¿por qué nosotros no?» en donde se ponía de manifiesto la clara ventaja de los productos japoneses frente a los norteamericanos. A raiz de la emisión de este documental, la Asociación Americana para el Control de Calidad (ASQC) estableció la Medalla Deming como intento de subsanar el desconocimiento de la obra del autor. De todos los campos abarcados por Deming, hay que destacar los estudios dedicados a la estadística, por ejemplo, el tratamiento del ajuste por mínimos cuadrados en *Statistical Adjustment for Data* (1943) o el de-

---

6 *http://www.deming.org/theman/circa1974a.html* 14-06-2003.

7 *http://www.deming.org/theman/articles/articles_50influenced01.html* 14-06-2003.

8 *http://www.deming.org/theman/circa1974a.html* 14-06-2003.

9 ISHIKAWA, K. (1986): *¿Qué es el control total de calidad? La modalidad japonesa,* Norma, S.A., Barcelona, págs. 14-15.

sarrollo de nuevas teorías sobre el muestreo en *Some Theory for Sampling* (1950). Sin embargo, las grandes aportaciones de Deming en calidad se refieren al ámbito económico y empresarial, de un lado el Ciclo de Deming (Plan-Do-Check-Act) que está presente en cualquier organización, y sobre todo, el seguimiento de los catorce puntos necesarios para implantar un sistema de calidad explicados en el libro Quality Productivity and Competitive Position (1982).

Control de calidad total

Hacia finales de 1950, los expertos en calidad en Japón comenzaron a desarrollar la idea de que el control de procesos tenía sus limitaciones y no podía basarse la garantía de calidad únicamente en su correcto funcionamiento, porque era imposible asegurar que los productos resultasen útiles a los consumidores. «Podría haber problemas en el proceso de diseño o desarrollo, que no se resolverían en la división de manufactura o inspección; y por mucho que se esforzara una división en el control de procesos, nada lograría si la selección de materiales era errada.»[10] Para que una empresa consiga alcanzar altos niveles de calidad, es necesario que dirija sus objetivos de producción a las exigencias y expectativas de los clientes. «Buena calidad quiere decir la mejor calidad que una empresa puede producir con su tecnología de producción y capacidades de proceso actuales, y que satisfará las necesidades de los clientes, en función de factores tales como el coste y el uso previsto.»[11] Esta filosofía de orientación de la empresa hacia las exigencias y deseos del consumidor marca el comienzo del control de calidad total.

Kaoru Ishikawa: utilización de métodos estadísticos

El Dr. Kaoru Ishikawa (1915-1989) es considerado el representante emblemático del movimiento de calidad japonés. Su trayectoria investigadora comienza en 1947 cuando se incorpora como profesor a la Universidad de Tokio, lo que le motiva a estudiar temas estadísticos. Por esta razón, decide participar en el Grupo de Investigación de los Métodos de Control de Calidad formado por la JUSE. Su brillante dedicación al desarrollo teórico-práctico del control estadístico de calidad le hizo merecedor del Premio Deming en 1952. Ishikawa tenía la convicción de que el progreso industrial de Japón estaba fuertemente ligado al empleo de métodos estadísticos en la calidad que ayudaron a elaborar productos poco costosos y de elevada calidad y fiabilidad. «La clave ha sido el pertinaz empleo del análisis de procesos y

[10] ISHIKAWA, K. (1986): *¿Qué es el control total de calidad? La modalidad japonesa,* Norma S.A., Barcelona, pág. 73.

[11] ISHIKAWA, K. (1994): *Introducción al control de calidad.* Díaz de Santos, Madrid, pág. 18.

del análisis de calidad, sin bombo, durante un largo período de tiempo. Esto ha dado como resultado la mejora de la tecnología.»[12] Desde su participación en la JUSE organizó diferentes ciclos de conferencias y seminarios en Japón sobre control de calidad y propuso la instauración de noviembre como el «mes de la calidad». Desde su posición en la JUSE estableció contacto con dos de los gurúes de la calidad que visitaron Japón, el Dr. Deming y el Dr. Juran.

Cuando Japón entra a formar parte de la ISO, el Dr. Ishikawa presenta los resultados obtenidos del Grupo de Estudio sobre Muestreo para la Industria Minera, contribuyendo al establecimiento de las Normas Industriales Japonesas (JIS) y los estándares internacionales ISO para el mencionado sector industrial. El reconocimiento internacional a su labor investigadora le proporcionó el cargo de presidente de la ISO en la representación japonesa (1977).

Ishikawa encuentra diferencias entre la cultura de calidad seguida en occidente y la japonesa. En primer lugar, destaca los factores culturales y educativos de Japón, subrayando que la dificultad de la escritura «kanji» estimula el deseo de aprendizaje y el hábito de trabajo de las personas, así como las creencias budistas y confucionistas les llevan a implicarse comprometidamente con sus actividades cotidianas. En segundo lugar, Ishikawa critica la estructura organizacional empresarial taylorista de occidente que desvincula al trabajador de su empresa provocando en él falta de motivación por mejorar la calidad de su labor profesional. En relación con esto, es importante puntualizar el bajo índice de rotación de empleados en las empresas japonesas y la existencia de contratación familiar y en muchos casos vitalicia, apoyada por una formación continuada de los trabajadores en la empresa y un sistema de incentivos para que perdure su pertenencia a la empresa.

Tomando como punto de partida la receptiva mentalidad japonesa, y considerando el cuantioso número de actividades educativas en control de calidad, es comprensible el rápido desarrollo del control de calidad estadístico en Japón. Según Ishikawa, «el control de calidad empieza con educación y termina con educación. Para promover el CC con participación de todos hay que dar educación en CC a todos los empleados desde el presidente hasta los obreros de línea».[13] Esta formación comienza con impartir conocimientos estadísticos a todas las personas que en algún momento de su vida profesional utilicen datos, clasificando las «herramientas estadísticas»[14] en diferentes niveles según su grado de dificultad y aplicabilidad.

[12] ISHIKAWA, K. (1986): *¿Qué es el control total de calidad? La modalidad japonesa,* Norma S.A., Barcelona, pág. 198.

[13] ISHIKAWA, K. (1986): *¿Qué es el control total de calidad? La modalidad japonesa,* Norma S.A., Barcelona, pág. 33.

[14] ISHIKAWA, K. (1989): *Introducción al control de calidad.* Díaz de Santos, S.A., Madrid, pág. 110.

De este modo, encontramos tres categorías según su complicación matemática y posible uso por las empresas:

1. *Métodos estadísticos elementales*: Son aquellos instrumentos estadísticos básicos, indispensables para el control de calidad y fáciles de utilizar para todos los miembros de la organización.

   Histogramas y distribuciones de frecuencias: Son las técnicas estadísticas más sencillas y de uso generalizado, que representan conjuntamente cada característica de calidad con la frecuencia que se ha producido. Es conveniente que se incluyan valores promedios, medidas de dispersión y medidas de forma estadísticas, y en los análisis de procesos además deben calcularse los límites de los gráficos de control que permitan identificar el tipo de distribución matemática al que aproximarlo.

   Diagramas de Pareto y curvas de Pareto: El diagrama de Pareto es una particularidad de la distribución de frecuencias que recoge información acerca de diferentes variables, como por ejemplo, número de defectos, de reprocesos o de reclamaciones, y que se asocian a las diferentes causas que las originan siguiendo un orden de frecuencia decreciente.

   Diagrama de causa-efecto o diagrama de espina de pescado: Considerando su carácter cualitativo, mediante este gráfico se pueden precisar las características de calidad principales de las accesorias de cualquier proceso productivo.

   Estratificación: En el control de calidad de productos es necesario identificar los lotes que deben analizarse y estratificarlos mediante algún sistema de almacenaje y transporte, de modo que se puedan reconocer fácilmente las causas de variación del proceso en los diferentes grupos.

   Hojas de comprobación: Es un sistema de recogida y presentación de los datos estratificados de forma ordenada resaltando las características de los grupos. Se elaboran diferentes hojas de comprobación según el tipo de información que se analice. A modo de ejemplo, en la inspección del proceso se cumplimentan las hojas utilizando códigos para los defectos observados.

   Diagramas de dispersión: Estos gráficos representan simultáneamente dos conjuntos de datos para aproximarse al sentido y la cuantía de la relación existente entre ellos. En el eje horizontal se reflejan aquéllos considerados inicialmente como causas y en el eje vertical los efectos.

   Gráficos y cuadros de control: Empleando los cuadros de Shewhart, en el gráfico de control se recogen los sucesivos valores de la característica de calidad cuantificada durante el proceso en funcionamiento. Se halla el valor medio y los límites superior e inferior de la variable y se comprueba el grado de control del proceso. Existen diferentes tipos de gráficos según la finalidad del análisis: de media (X) y rango (R), gráfico p de la población binomial, los gráficos C y U de la Poisson, los gráficos Cusum de sumas acumuladas, etcétera.

2. *Métodos estadísticos intermedios*: En este grupo Ishikawa incluye aquellas herramientas estadísticas con cierto grado de dificultad, que deberían utilizar los ingenieros de las fábricas y aquellos expertos en control de calidad.

   Teoría del Muestreo e inspección estadística por muestreo: El procedimiento de muestreo se utiliza con la finalidad de obtener información sobre la población de que proceden. Se selecciona una muestra de un producto y se estudian las características del mismo para generalizarlas a todo el lote, pero es necesario cuantificar los errores estadísticos de medida y las posibles omisiones en la inspección.

   Teoría de la Estimación: Consiste en hallar valores aproximados de los parámetros del proceso a partir de los valores muestrales teniendo en cuenta las distribuciones estadísticas, tanto de la población como de las funciones muestrales.

   Introducción al diseño de experimentos: Representa el origen de los métodos de simulación al introducir variables en los parámetros del proceso para predecir el comportamiento del mismo sin que sea necesario modificar su funcionamiento.

   Correlación simple y análisis de regresión: Supone una ampliación del análisis conjunto de dos grupos de datos, pero añadiendo pruebas de hipótesis en el mismo.

   Técnicas sencillas de fiabilidad: El estudio de la fiabilidad para Ishikawa se puede enfocar desde dos puntos de vista, por un lado, entendiéndola como la capacidad de un artículo para realizar una función determinada en unas condiciones y tiempo definidos; y por otro, como «la probabilidad de que un artículo realice una función determinada bajo unas condiciones definidas y durante un período de tiempo definido»[15], como se explica en las Normas Industriales Japonesas. En este sentido, la fiabilidad está determinada por el control continuado de la característica de calidad cuantificable en términos de probabilidad.

   Métodos sencillos de ensayos sensoriales: Los ensayos se realizarán sobre las muestras de unidades de producto que se vayan a inspeccionar para aceptar o rechazar lotes de productos defectuosos.

[15] Ishikawa, K. (1994): *Introducción al control de calidad.* Díaz de Santos, Madrid, pág. 382.

3. *Métodos estadísticos avanzados*: Serán utilizados únicamente por ingenieros y expertos en calidad y en análisis de procesos.

   Métodos avanzados de diseño de experimentos: Estas técnicas se basan en el estudio simultáneo de los efectos de aquellos factores que intervienen en el proceso. En el caso en que las alteraciones del proceso se produzcan por la variabilidad de los datos muestrales será necesario estimar el valor de los factores, para lo cual se van modificando las condiciones que afectan a las unidades experimentales para observar las alteraciones en la variable respuesta.

   Análisis multivariable o multivariante: Permite identificar, agrupar y comprender las diferentes relaciones en un conjunto de variables o características de calidad. Algunas de las técnicas empleadas son: análisis factorial, análisis en componentes principales, estudio de la multicolinealidad, análisis discriminante, etcétera.

   Análisis de series temporales: Mediante el cual se puede conocer la evolución dinámica de variables de calidad, observar patrones de comportamiento y elaborar modelos de predicción.

   Métodos de investigación operativa: Mediante los que se intenta modelizar matemáticamente las características de calidad de los procesos en funcionamiento.

Aunque los métodos estadísticos anteriores han sido de gran trascendencia en la trayectoria de Ishikawa, su contribución excepcional al desarrollo y mejora de la calidad de las empresas es la promoción de los círculos de calidad. El origen de los Círculos de Control de Calidad (QCC) se localiza en abril de 1962, cuando aparece el primer ejemplar de la revista mensual *Quality Control for the Foreman,* en el que la editorial propuso a las empresas que formasen pequeños grupos de trabajadores que leyeran, estudiaran y comentaran conjuntamente los temas de la revista y debatieran los problemas de mejora de control de procesos que encontrasen en su trabajo. Ishikawa define a los QCC como «un pequeño grupo que voluntariamente desarrolla actividades de control de calidad dentro de un área de trabajo concreta. Además, este pequeño grupo es una organización con continuidad, actuando dentro de las actividades de control de calidad de la compañía para el propio desarrollo mutuo, el control del proceso y las mejoras dentro de un centro de trabajo utilizando técnicas de control de calidad con plena participación de todos sus miembros»[16].

Genichi Taguchi: diseño de experimentos

La contribución más importante del Dr. Taguchi (1924), ha sido la aplicación de la estadística y la ingeniería para la reducción de costes y mejora de la calidad en el

[16] ISHIKAWA, K. (1989): *Práctica de los círculos de control de calidad. Tecnologías de gerencia y producción, S.A.,* Madrid, pág. 20.

diseño de productos y los procesos de fabricación. Los denominados métodos Taguchi hacen referencia al diseño de experimentos que comenzó a desarrollar Ishikawa y que consiste en el estudio simultáneo de las acciones de los agentes que intervienen en el proceso. Tras la II Guerra Mundial, Taguchi comenzó a trabajar para el Ministerio de Salud Pública y Bienestar, en donde aprendió las aplicaciones de matrices ortogonales (orthogonal array) del estadístico japonés Matosaburo Masuyama. En 1950 se incorpora al laboratorio de comunicaciones nacido de la unión del Nippon Telephone y Telegraph Company, para instruir en técnicas modernas a los ingenieros. Durante más de una década, desde su posición en el laboratorio, ha sido consultor de industrias japonesas importantes, como Toyota, así como ha colaborado con investigadores de renombre, como Fisher o Shewart, aunque sus métodos de diseño aplicado a los procesos no fueron ampliamente conocidos en occidente hasta la década de 1970. Es en esta etapa cuando sus estudios se centran en la obtención de costes ocasionados por la no-satisfacción para mejorar la calidad de diseño de productos. Desarrolla la «función de pérdida, donde calcula la reducción de la utilidad como la distancia del valor desde el objetivo al producto o características de un proceso resultado, que es la pérdida para la sociedad en términos de coste. La función de pérdida se aproxima al cuadrado de la distancia desde el valor objetivo»[17]. De este modo, obtiene una expresión matemática que representa la pérdida de calidad mediante la función cuadrática[18] $L = k\,(X - T\,)^2$, donde L = Pérdida en términos de dinero, k = Coeficiente de coste; X = Valor de la característica de la calidad y T = Valor objetivo.

Shigeo Shingo: cero errores

Shigeo Shingo (1909-1990) ha sido una figura importante para el control estadístico de calidad en la producción industrial japonesa en la mejora de productividad y calidad del producto fabricado. En sus investigaciones ha plasmado las diferencias entre los sistemas de producción con y sin stocks, defendiendo que el único método de producción eficiente es aquél en el que no se necesite la fase de inspección, ni se produzca retraso en la fabricación o en la distribución. En el currículum profesional de Shingo destaca su dedicación como ingeniero industrial en la fábrica de ferrocarriles Taipei de Taiwán y en las grandes empresas Toyota y Mitsubishi. En su obra *Producción sin stocks: el sistema Shingo para la mejora continua* (1987), expone las diferencias en los sistemas de producción occidentales y japoneses proporcionando soluciones prácticas para corregir fallos en el proceso productivo. El sistema poka-yoke que desarrolló, literalmente significa «a prueba de errores» y se

---

[17] JAMES, P. T. (1997): *La gestión de la calidad total. Un texto introductorio.* Prentice Hall Iberia, Madrid, pág. 57.

[18] JAMES, P. T. (1997): *La gestión de la calidad total. Un texto introductorio.* Prentice Hall Iberia, Madrid, pág. 229.

fundamenta en la utilización de dispositivos que eviten la aparición de defectos con los que se puede prescindir de la inspección. Para Shingo, en determinados casos, como los procesos productivos de alta seguridad, únicamente se puede seguir el sistema de cero defectos, por tanto, si es aplicable en este tipo de fabricación, también puede hacerse extensivo a otros sectores empresariales.

Shingo efectúa una clara distinción entre errores y defectos, precisando que los primeros son los que originan los segundos. Su método consiste en interrumpir el proceso siempre que se haya producido cualquier error y en ese instante detectar la fuente del error mediante una inspección, para luego evitar que se vuelva a producir. Por tanto, los sistemas poka-yoke comprenden dos fases: la detección y la regulación. La primera fase se pone en práctica con diversos dispositivos, como el contacto material, células fotoeléctricas, interruptores sensibles a la presión, termostatos, etcétera. Mientras que la etapa de regulación se realiza empleando una luz intermitente, una alarma o sirena, o combinando más de un elemento. Al contrario que el sistema seguido en el control de procesos tradicional, en el mecanismo poka-yoke la inspección es del 100 % durante el proceso en funcionamiento, que es cuando hay posibilidad de prevención, control y corrección, haciendo innecesaria la utilización de procedimientos de muestreo.

Shingo ha resultado también ser conocido por la reducción de tiempos de montaje en la fabricación de navíos japoneses, tarea a la que se le dio el nombre de «cambio de troquel en un minuto» (sistema SMED). Este sistema consiste en reducir al mínimo el tiempo invertido en efectuar cambios de utillaje, disminuir los períodos de inactividad, evitar largos procesos de fabricación y acumulación de lotes de producción, para dotar al proceso productivo de cierta flexibilidad. A raíz de esta filosofía surgieron otros métodos como el conocido just-in-time.

Conclusiones

Una de las características de la cultura de calidad en Japón es la conjunción de la etapa de control de procesos y de estandarización industrial que planteó dos obstáculos. El primero era la impresión en la población japonesa de que el control de calidad era difícil e inaccesible, a causa del énfasis en los métodos estadísticos. El otro inconveniente era la errónea convicción de que el control de calidad se basaba en el cumplimiento de las normas o estándares.

Por otro lado, el éxito del desarrollo de la cultura de calidad en Japón se debe a algunos aspectos que ya han sido apuntados. En primer lugar, las diferencias culturales y sociales con occidente, en especial por el elevado nivel educativo de la población japonesa que la hace más receptiva al aprendizaje. En segundo lugar, las estructuras de organización empresarial que promueven el vínculo del trabajador con la empresa, asimismo, la formación adecuada en el uso de las herramientas estadísticas y la promoción eficiente y continuada del control de calidad a través de seminarios, conferencias, actividades, publicaciones y los círculos de calidad. En este sentido, también hay que resaltar la convocatoria de numerosos premios y la realización de auditorías de calidad.

BIBLIOGRAFÍA

HANSEN, B. L. y GHARE, P. M. (1990): *Control de calidad: teoría y aplicaciones.* Díaz de Santos, Madrid.

IMAI, M. (1989): *Kaizen. La clave de la ventaja competitiva japonesa.* Compañía Editorial Continental, México, D.F.

ISHIKAWA, K. (1989): *Introducción al control de calidad.* Díaz de Santos, Madrid.

__________, (1986): *¿Qué es el control de calidad? La modalidad japonesa.* Norma, Barcelona.

ISHIKAWA, K. (Director) (1988): *Práctica de los círculos de control de calidad.* Tecnologías de gerencia y producción, Madrid.

JAMES, P. T. (1997): *La gestión de la calidad total. Un texto introductorio.* Prentice Hall Iberia, Madrid.

LOGOTHETIS, N. y WYNN, H. P. (1994): *Quality Through Design. Experimental Design, off-line Quality Control, and Taguchi's Contributions.* Clarendon Press, Oxford.

SHINGO, S. (1991): *Producción sin stocks: el sistema Shingo para la mejora continua.* Tecnologías de Gerencia y Producción, Madrid.

CAPITULO-39.qxd 30/04/04 14:53 PÆgina 581

CAPÍTULO 39

La integración de las matemáticas en el espacio europeo de enseñanza superior

José Luis Cuenca Tadeo
Carmen Calderón Patier
Universidad San Pablo CEU

Introducción

Toda investigación parte de una inquietud motivada por un desconcierto y persigue el conocimiento. Este objetivo es fruto de nuevos planteamientos, de desarrollos o de la experiencia y conlleva la satisfacción propia por el hecho de conocer y en ocasiones por contribuir al conocimiento de otros, adquiriendo en este último caso una proyección social que le imprime su sentido más propio.

La investigación comienza con una pregunta. A lo largo de la historia han existido preguntas extraordinariamente fructíferas. Las respuestas a las mismas no siempre fueron correctas, pero lo importante es que las preguntas se formularon, y alguno o muchos científicos las respondieron mediante su trabajo de investigación. El contraste de sus respuestas con la realidad permite avanzar, consiguiendo una aproximación mayor a la verdad.

Asi, por ejemplo un filósofo de Grecia, 500 años a.C., se preguntó y con ello a todo el mundo ¿de qué está compuesto el universo? Aquel filósofo vivía en una ciudad estado llamada Mileto, se llamaba Tales y en la historia posterior le conocemos como Tales de Mileto.

La respuesta que dio a su pregunta fue: «que todas las cosas estaban hechas de agua». Hoy sabemos que la respuesta era falsa, pero es una de las preguntas más fructíferas en la historia de la humanidad. Gracias a su pregunta se desarrolló lo que hoy conocemos como ciencia.

La respuesta no era acertada, ni tampoco original. Tanto es así que los babilonios ya respondieron en igual sentido. Ahora bien, en descargo de Tales cabe decir que vivía en una ciudad a orillas del mar, que se extendía más allá de su vista, a muchos días y leguas de su ciudad, más allá de las columnas de Hércules al final del Mediterráneo.

La importancia de Tales se debió a que su pregunta continuó siendo respondida por sus discípulos que estaban asentados en las ciudades costeras egeas. Doce de esas ciudades componían lo que se llamaba Jonia, y por eso a él y a sus discípulos se les conoce como la Escuela Jónica.

Los jónicos continuaron tratando de explicar el origen del universo sin recurrir a las divinidades. Para ellos el universo obraba según sus propias leyes. Esto les condujo a suponer que el universo se rige según ciertas leyes de la naturaleza que no podían alterarse. Ahora bien, si existen leyes naturales entonces la razón humana podía ser capaz de esclarecer la naturaleza de las leyes que gobiernan el universo. Estos dos supuestos forman la idea de ciencia.

Durante siglos, estas ideas quedaron larvadas para resurgir con fuerza hacia el siglo XVII, y hoy se encuentran en pleno apogeo.

Esto ocurre a pesar del importante contratiempo que planteó, durante la segunda década del siglo XX, el físico alemán Werner Heisenberg con lo que se denominó «principio de incertidumbre», al plantear la imposibilidad de determinar con exactitud la posición y velocidad de un objeto en un instante dado y por tanto de conocerlo. Por otro lado, en un orden más amplio, esta idea tampoco era novedosa, si se consideran las afirmaciones de Crátilo, discípulo de Heráclito, quien llegó a condenar a los hombres al silencio absoluto, a causa de la absoluta incertidumbre de todas las cosas[1].

Así pues la idea de ciencia es tan valida hoy como hace 2.500 años cuando la planteó Tales de Mileto.

[1] ARISTÓTELES.

La pregunta, nuestra cuestión planteada

La pregunta que hoy se pretende responder no tendrá el alcance que la que formuló Tales de Mileto. Es mucho más prosaica, menos trascendente, pero sin lugar a dudas está motivada por un interés parecido que es el deseo de saber y conocer y con ello ser un poco mejores.

Siempre nos ha preocupado conocer las razones por las que los economistas españoles simpatizamos escasamente con las matemáticas, sin con ello pretender que los economistas debamos de ser matemáticos, pues estamos convencidos de que nuestra ciencia es depositaria de un acerbo de conocimientos específicos acumulados durante un largo período que la otorga una cualificación destacada dentro de las ciencias sociales. Que nadie se confunda, no se pretende decir y no se ha dicho, que los economistas debamos de ser matemáticos, no creemos que debiera de ser así.

Así que nuestra preocupación no es la de por qué los economistas no son matemáticos, porque la respuesta es obvia las matemáticas se estudian en las Facultades de Ciencias Exactas, y lo nuestro no es eso. Nuestra preocupación tiene que ver con satisfacer las necesidades de nuestras sociedades cuando los recursos son escasos. Pero es cierto que en todas las facultades de economía del mundo, incluso desde los orígenes de estas facultades, siempre se impartió la matemática como parte de los conocimientos que el economista debía tener.

Los hechos de los últimos años ponen de manifiesto que la ciencia económica se ha desarrollado y ha adquirido prestigio en la medida en que aplica el método científico, y ese método tiene que ver fundamentalmente con la utilización de modelos que permiten explicar la realidad de los fenómenos económicos que nos interesan.

Ello ha puesto de relieve que para que un conocimiento tenga relevancia científica debe de ser capaz de desarrollar un método de trabajo en el que las hipótesis puedan ser puestas de manifiesto de manera exhaustiva y rigurosa, utiliza métodos de razonamiento igualmente científicos y elabora previsiones que puedan ser contrastadas. Este método no tendría por qué ser matemático, si no fuese porque sin medir, es difícil contrastar.

Así que nos vemos abocados a un método como el indicado. Y esto es cierto, tanto para la economía, como para Administración y Dirección de Empresas (ADE).

Pero si ciertamente la modelización es necesaria, y en ella hay medida, y para poder efectuar la misma es necesaria la formación en métodos cuantitativos, ¿cómo es que como economistas o licenciados en Administración y Dirección de Empresas nuestra formación es tan escasa? Algo tiene que ocurrir, algo ha ocurrido para que hayamos llegado a la situación actual de formación tan deficiente en dichos aspectos.

No es un problema nuevo, llevamos al menos décadas de formación deficiente en técnicas cuantitativas. El problema es tan grande que muchos ni se lo han planteado, o pasan de puntillas sobre él diciendo que: «es que la matemática y las técnicas cuantitativas no son tan necesarias porque todos los economistas saben que existen multitud de variables cualitativas que no pueden ser incorporadas a nuestros modelos, y eso invalida su utilidad».

Esa afirmación no hace sino desconocer que hace tiempo que esas variables se incorporan a los modelos econométricos como parte de los mismos. Y que lo que hace dos o tres décadas era muy complicado de tratar, como lo eran las variables cualitativas, la revolución informática lo ha convertido en un problema menor. En cualquier caso, los modelos no tienen por qué incorporar todas las variables, sino tan sólo las relevantes.

Así pues, si la matemática, la estadística y la econometría siguen siendo útiles, al menos con los actuales paradigmas de la economía, habrá que afrontar el problema planteado y por tanto es conveniente contestar a la pregunta ¿por qué los economistas soslayamos generalmente la matemática?

Las causas que a nuestro entender explican la situación actual en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en las Facultades de Ciencias Económicas y Empresariales de España, se encuentran en el proyecto inicial de constitución de dicha facultad, dentro de lo que entonces era la Universidad de Madrid. Así pues para entenderlo ha habido que remontarse al proyecto de Facultad de Ciencias Económicas defendido por Zumalacárregui.

El proyecto de Facultad de Ciencias Económicas de Zumalacárregui[2]

En 1933, José María Zumalacárregui Prat escribió que alrededor del año 1928/1929 el Ministerio de Instrucción Pública estudió la posibilidad de crear en España la Facultad de Ciencias Económicas en la Universidad de Madrid. Por distintas razones políticas el proyecto se desestimó.

En su idea inicial, José M.ª Zumalacárregui pretendió que se crease una Universidad de Económicas que aprovechase las experiencias externas, creadas con mucha anticipación y que se superasen los «intereses creados y el amor propio comprometidos». En el año 1933 se dispuso la creación del Centro de Estudios Económicos, con lo que de nuevo se paralizó el proceso de creación de la Facultad de Ciencias Económicas.

---

[2] ZUMALACÁRREGUI, J. M.ª

Por aquellos años ya existían Facultades de Económicas en muchas universidades del mundo. Para crear la Facultad de Económicas se tenían que:

1.º Superar los problemas planteados.
2.º Elegir un modelo de facultad de entre los existentes.
3.º Contar con medios y recursos.
4.º Superar los peligros a los que se exponía el proyecto.

Sin ello sería difícil conseguir el objetivo marcado. Pero vayamos por partes.

Los problemas del proyecto

La creación de la Facultad de Económicas se enfrentaba a problemas que tenían por causa las deficiencias en la formación de los bachilleres españoles. Según Zumalacárregui los problemas eran la inmadurez del alumnado y la vocación inexistente por la carrera elegida. Estas deficiencias llevaban a otras relativas a la capacidad del trabajo y a los métodos de enseñanza.

Las consecuencias de estos defectos en la preparación se empiezan a notar cuando el bachiller comienza los estudios universitarios, y a lo largo de ellos no se remedian. Algunos de ellos se agravan por la acción de la enseñanza en las facultades. Los bachilleres en aquellos años carecían de una buena preparación humanística, matemática y filosófica que se ponía de manifiesto en sus bases culturales. Con todo ello se veía malogrado en parte el fruto que podía obtenerse de la formación universitaria.

La formación del bachiller de los años treinta fomentaba la visión particularista y fragmentada del conocimiento. Se percibía la falta de materias que sirviesen de punto de unión y coordinación conforme a un criterio bien definido, por ello los bachilleres desechaban todas aquellas asignaturas «que no sirven para la carrera» que van a cursar. Con ello se ponían las bases para que arraigue el segundo defecto: el profesionalismo.

Para superar estos defectos del bachillerato, era necesario efectuar una reforma fundamental del mismo. Dicha reforma debería seguir un doble sentido desde el bachillerato hacia la universidad y desde ésta hacia el bachillerato.

En aquellos años, las Facultades de Derecho, Medicina y Farmacia cambiaron su carácter de escuelas relacionadas con las profesiones que el modelo francés les impuso. En éstas se fomentaba la labor científica de manera seria y desinteresada. Pero para el alumnado la preocupación profesional seguía siendo la principal de sus tareas.

En opinión de Zumalacárregui las Facultades de Ciencias y de Letras por las materias que imparten debían ser las llamadas a influir exclusivamente sobre los planes y programas del bachillerato. Entendía que ello era un derecho y un deber que nadie les podía disputar.

Los modelos de Facultades de Económicas

Para la creación de una nueva facultad, se tenían como modelos los existentes en Europa. En ella eran preponderante tres modelos distintos: el germánico, el anglosajón y el francés. En las universidades de tipo germánico no se llega «a perder por completo la tradición, el espíritu y aun el nombre de la antigua Facultad de Filosofía, que las comprendía todas en una unidad orgánica». En las facultades de corte anglosajón se conservaba aún los efectos de la Facultad de Artes con su «Enciclopedia de Ciencias y Letras». Mientras que en la universidad francesa, la independencia y la desarticulación entre las Facultades de Letras y de Ciencias es total y parece que procedan de troncos distintos, dando la sensación de ser modernistas y ocultando la existencia de vínculos entre las distintas comunidades intelectuales. El modelo español siguió esta tendencia francesa.

Por estas razones, la propuesta de Zumalacárregui de Facultad de Ciencias Económicas debería de crear una facultad universitaria parecida más a las Facultades de Ciencias y Letras que a las de Derecho, Medicina o Farmacia. Es decir, más universitaria que profesional. Por esta convicción, defendía a la Facultad de Económicas frente a los institutos o las escuelas especiales de temas económicos. Hacía falta una facultad esencialmente especulativa, consagrada a la investigación por y para la enseñanza en contacto estrecho con la realidad para recoger el material de observación, sin el que su trabajo científico sería imposible y orientada a la formación de economistas científicos, y después a la de «economistas de Estado para el servicio de la Nación».

Esta afirmación entraba en conflicto con otras visiones interesantes e indispensables como la de los economistas con visión técnica, de quienes se sospechaba que podía degenerar en el empirísmo.

La organización de una Facultad de Económicas que respondiese a esos fines no era una tarea sencilla. La experiencia de otros países no era concluyente. Los modelos que en aquel momento se podían seguir eran tres:

1.º El de las Facultades de Ciencia Políticas alemanas, sirviendo como ejemplo la Facultad de Ciencias Económicas de Munich.

2.º El de las facultades inglesas y americanas, sirviendo de ejemplo la School of Economics de Londres y la Universidad de Harvard en EE.UU.

3.º El de los modernos institutos italianos.

Todos ellos presentaban carencias para la finalidad que él pretendía que tuviese la Facultad de Económicas de España. Los modelos alemán y anglosajón-americano tenían su sentido en la distinta concepción de la economía en sus sociedades.

En Alemania la economía se desarrolló antes que como conocimiento propio, desde las Facultades de Filosofía y en algún caso desde las de Derecho al vincularse a la formación de Derecho Público.

Por su parte, en las facultades inglesas y americanas partían de las Facultades de Artes (Ciencias y Letras) y la formación económica utilizaba criterios psicológicos y matemáticos. Ambas concepciones debían entenderse como soluciones lógicas de las premisas establecidas en cada país.

En España, sin tradición universitaria, la economía fue llevada a la Facultad de Derecho porque la época en que se crearon sus cátedras la única influencia era de origen francés. Así, sin enlace lógico entre esa adscripción legal de la economía a las ciencias jurídicas y el contenido doctrinal de su enseñanza, sería un error copiar lo que no siendo bueno, pudiese justificarse por motivos históricos.

La adscripción debería atender principalmente a las exigencias del movimiento científico contemporáneo. Y esa tendencia era la de atenuar las diferencias existentes en la formación económica entre países. Así en Inglaterra y en América había una preocupación por la formación metodológica de los futuros economistas y por su adaptación mental a los criterios de interpretación histórica de los hechos económicos, mientras que en Alemania existía un movimiento en favor de la preparación matemática para obtener de la estadística el rendimiento que podía obtenerse en la investigación económica.

La facultad española debía aspirar a superar a las facultades extranjeras. Aquí las dificultades eran menores porque se edificaría de nuevo sin tradiciones. Esa ventaja podía compensar sobradamente nuestro retraso en la creación de la facultad.

Sería por tanto «un centro de enseñanza y de investigación capaz de abarcar la totalidad del hecho económico». Para ello se impartirían «cursos generales de especialidades, tan numerosos como fuere posible», se atendería a formar sólidamente al investigador dándole una cultura fundamental, extensa y recia y un dominio perfecto de la técnica de trabajo que en economía contemporánea es de la máxima perfección y delicadeza científicas. Tendría que dosificar la preparación lógica, matemática, filosófica, histórica y jurídica con originalidad.

Sin embargo, Zumalacárregui era cauto, respecto al contenido de la formación y afirmaba que respecto a «las materias que forman esa cultura fundamental y científica de trabajo no sería siquiera posible intentar nada nuevo, porque todo está hecho».

Los medios académicos para la creación de la facultad

En cuanto a la dotación de medios académicos para desarrollar y organizar la facultad propuso configurar la misma mediante «profesores de otras facultades, como se hace en todas partes», enseñando cada profesor «las materias de su especialidad». Esto puede conseguirse profesándose algunas de ellas en los cursos propios generales de la facultad respectiva o estableciendo cursos especiales para estudiantes de economía en su propia Facultad... Así, los cursos de Lógica, de Psicología y de Metodología se explicarán por profesores de la Facultad de Filosofía; los de Historia, ..., por los de Ciencias Históricas; los de Derecho Político, Administrativo, Mercantil, etcétera, por los de Derecho y los de Análisis Matemático y Estadística por los de Ciencias Exactas. Por no excluir en su proyecto de medios incluía a la Facultad de Medicina para que impartiese «problemas relacionados con la estadística demográfica, y en general, con toda la doctrina de la población: y si nuestra Universidad conservase como las de tipo alemán, la Facultad de Teología, su estrecha cooperación con la de Ciencias Económicas sería preciosa para las dos».

Pero un conocimiento tan extenso llevaría al estudiante a tener que conocer un importante bagaje enciclopédico difícil de asimilar. Por ello proponía Zumalacárregui que los estudiantes no deberían de absorber «la totalidad de esa enciclopedia científica». Y sugería que sobre ciertas bases generales, ciertamente elásticas, cada alumno con la dirección y autorización de la facultad formara un plan de estudios que incluyese algunos cursos comunes para todos los estudiantes y un grupo de cursos de especialidades adaptados a los intereses de los estudiantes para conseguir que el trabajo de enseñanza y de investigación fuesen rigurosos y serios, imposibilitando que al doctorado se pudiese llegar sin conocimientos suficientes de carácter histórico, filosófico o matemático.

Así por ejemplo, a los estudiantes a quienes les interesase el estudio de la coyuntura, necesitarían una preparación matemática en el cálculo diferencial, el integral y el de probabilidades para dominar la estadística. Su preparación histórica podría ser menor y aparte de los cursos generales limitarse a alguno especial de Historia Moderna y Contemporánea. La formación jurídica no necesitaría exceder de los cursos generales. En cambio, en el extremo opuesto, el estudiante de economía social podría limitar su formación estadística a un curso general de tipo medio, con una preparación matemática poco superior a la que adquiriese en un bachillerato especializado.

El ideal y los peligros del proyecto

Su ideal de facultad era aquél en que en una sala común profesores de Análisis Matemático, de Historia Universal Contemporánea, de Filosofía del Derecho y de

Filosofía pudiesen discutir con empeño sobre el problema del descenso de la natalidad y sus causas probables, enfocando cada cual desde su punto de vista, adoctrinando a los demás y al tiempo oyéndolos a todos y aprendiendo de cada uno, con ello volvería a haber universidades españolas. Y se podría pensar entonces seriamente en una ciencia española.

Pero el orden en que se crease la formación científica y la técnica en economía no era irrelevante. Las alternativas eran dos. Desarrollar primero la facultad de Ciencias Económicas y posteriormente los Institutos o Escuelas Profesionales, de carácter técnico, o hacerlo al revés. Crear primero los Institutos podía llevar a desarrollar un «vicio» fundamental en aquellos tiempos en la universidad española, que era el profesionalismo excesivo. Pero si la facultad se creaba antes, de ella podrían surgir una parte de los profesores de las Escuelas e Institutos superiores que, sin perder su carácter técnico, podían aportar una sólida base científica.

Las consecuencias del impulso original

Pero retomemos el hilo de nuestra preocupación, ¿qué tiene que ver lo relatado con que los economistas tengamos mala o buena formación matemática? La respuesta es que tiene que ver mucho. Para ello recopilemos algunos aspectos anteriormente relatados a modo de resumen.

El proyecto de creación de la Facultad de Económicas podemos resumirlo, por los siguientes aspectos:

1.º Existían problemas en la formación del alumnado que accedía a la Facultad de Ciencias Económicas.

2.º Existían modelos alternativos de Facultades de Económicas. Tres eran los modelos: el alemán, el anglosajón y el italiano.

3.º Los estudios de económicas estaban insertos inicialmente en los planes de la Facultad de Derecho.

4.º El proyecto de creación fue la suma de formaciones distintas. Así los profesores que iniciaron dicha tarea procedían de las Facultades de Derecho, Filosofía, Psicología, Historia y Ciencias Exactas.

5.º El profesorado iniciador de la facultad tenía una formación pluridisciplinar, procedentes principalmente de la ingeniería y de la ciencia y fueron quienes ocuparon las plazas en Teoría Económica y Cuantitativas.

Lo que se quiere decir con ello es que si las matemáticas y la estadística se entendían como propias de personas de ciencias, las posibilidades de desarrollar una matemática y estadística de economistas eran escasas.

No se pretende en este trabajo extenderse, aunque se hará próximamente sobre el carácter curricular del profesorado que comenzó la Facultad de Económicas en la Universidad de Madrid, de la cual surgieron en años posteriores el resto de las Facultades de Económicas.

¿Y qué supuso este mapa de acontecimientos? Pues ni más ni menos que los programas de matemáticas se continuaron manteniendo sustancialmente como el primero que se originó desde la Facultad de Ciencias Exactas. Nadie ha querido o sabido adaptar esos programas a las características propias de nuestra carrera.

No obstante, no sería justo decir que nadie ha intentado cambiar el contenido. Hubo profesores que a finales de la década de los ochenta lo intentaron y comenzaron por lo que aparentemente era más fácil. Se dijeron, tenemos que adecuarnos a los tiempos y por convicción, o por conveniencia comenzaron a publicar libros con el nombre de *Matemáticas para economistas* o con adjetivos parecidos, que hacían parecer que los contenidos se adecuaban a nuestra formación más específica.

Desgraciadamente, cuando se analizan los contenidos, se ve que siguen manteniéndose los mismos que cuando la asignatura se llamaba Matemáticas. Pero el solo hecho de cambiar el envoltorio fue un elemento de gran valentía; insuficiente, pero al fin y al cabo de valentía.

Conclusión, los retos para el futuro

Uno de los principales objetivos de la Unión Europea es la coordinación de las políticas y normas legislativas de sus estados miembros en relación con el progreso y bienestar social de los ciudadanos. Este objetivo aplicado al ámbito de la educación se ha traducido en un proceso que se inicia con la Declaración de la Sorbona (1998) y que se consolida y amplía con la Declaración de Bolonia (1999) para la construcción del Espacio Europeo de Educación Superior.

Hoy es ya indiscutible que la extensión y calidad de la educación universitaria son factores decisivos en el incremento de la calidad de vida de los ciudadanos e indispensable para consolidar y enriquecer la ciudadanía europea que nos otorgue a todos las competencias necesarias para afrontar los difíciles retos del nuevo milenio. Hay que ser conscientes de que la globalización no se limita al ámbito económico sino que afecta también, de forma decisiva y positiva, a la transmisión de los conocimientos y a la formación superior.

En este contexto, la Declaración de La Sorbona del 25 de mayo de 1998 destaca el papel protagonista de la universidad en el desarrollo de la dimensión cultural europea, donde el Espacio Europeo de Educación Superior será el instrumento para la promoción de la movilidad de los ciudadanos, su ocupabilidad, y el desarrollo global de Europa. Posteriormente, la Declaración de Bolonia en 1999, el Comunicado de Praga en 2001 y la Cumbre de Jefes de Estado celebrada en Barcelona en marzo de 2002 han ido concretando y materializando en medidas más concretas este objetivo que en definitiva lo que persiguen es armonizar con calidad los conocimientos en toda la Unión Europea para aumentar el bienestar social de la población.

España es uno de los países que se ha comprometido a conseguir los objetivos expuestos en las declaraciones anteriores, y así la Ley Orgánica 6/2001 de 21 de diciembre de Universidades (LOU) en su exposición de motivos establece como una de las finalidades del diseño de la nueva arquitectura normativa que reclama el sistema universitario español la de «integrarse competitivamente junto a los mejores centros de enseñanza superior en el nuevo espacio universitario europeo que se está comenzando a configurar» y «abordar, en el marco de la sociedad de la información y del conocimiento los retos derivados de la innovación en las formas de generación y transmisión del conocimiento».

La dirección a seguir ya está establecida con firmes propósitos, pero conseguir una mayor compatibilidad y comparabilidad de los sistemas de enseñanza superior requiere un impulso constante. Se nos abren retos importantes para el porvenir cercano; también grandes peligros. Nuestro objetivo, aunque modesto no deja de ser ambicioso, ya que nos parece suficiente simplemente la reflexión y propuesta de pequeñas medidas, que en la dirección apuntada anteriormente, podrían ser útiles para marcar pautas futuras en el área de matemáticas en el nuevo Espacio Europeo.

Durante los 56 años de vida de la Facultad de Económicas en España, el impulso inicial hizo que continuásemos con los mismos contenidos que se elaboraron por los profesores iniciales, cuyo origen era de las Facultades de Ciencias. Esto no tendría por qué ser malo, si los alumnos de la Facultad de Económicas fuesen capaces de entender y utilizar adecuadamente la formación matemática que recibe para la modelización económica. Pero éste es el problema fundamental que se presenta. El alumno procura superar las matemáticas como puede, como si de una purga se tratase, la toma rápido, para olvidarse de ella más rápidamente y con ello no se cumple ninguno de los dos objetivos que una asignatura como matemáticas debería de cumplir. En primer lugar, servir para la formación científica general, dadas las virtudes de estructuración general de la mente de los alumnos. En segundo lugar, ser un instrumento necesario para la cuantificación y la medida económica.

Hoy más que nunca es necesario modificar el enfoque que la asignatura de matemáticas ha tenido durante muchos años en la Facultad de Economía. No se debe seguir explicando matemáticas, como no se debe de explicar estadística. Es necesario modificar los contenidos y sobre todo los enfoques, de manera que se explique economía matemática y economía estadística. De esa manera será posible que los alumnos puedan el día de mañana, como profesionales, entender las herramientas cuantitativas que son necesarias en su trabajo futuro, sin tener que dar saltos importantes entre la teoría que aprendieron y los problemas económicos o de empresa con los que se enfrentarán.

Es un reto importante al que tenemos que enfrentarnos los docentes en las Facultades de Económicas de España, a su consecución se opondrán los intereses creados, la inercia del pasado que es muy fuerte, la desidia y la falta de valor, para decir en alto lo que ya no se puede, ni se debe de callar.

Se ha respondido a la pregunta que se planteaba al principio, es posible que la respuesta no sea la acertada, y que al igual que a Tales de Mileto, ocurra que por solo ver el agua que por todas partes nos rodea, la respuesta sea incorrecta. Pero la pregunta está hecha, a otros igual que a nosotros les corresponde responder, desde la óptica de que lo que digamos debería de hacernos mejores, estar más cerca de la verdad y poner a nuestros alumnos por encima de cualesquiera otros intereses. Así, respondiendo con alteza de ideales, cualquier contestación será buena, incluso las equivocadas, porque otros vendrán que la mejorarán y con ello las futuras generaciones de economistas tendrán más fácil su camino.

BIBLIOGRAFÍA

ARISTÓTELES: *Metafísica*, págs. 120-121. Decimoséptima edición, de 1-2-1999, Colección Austral.

ZUMALACÁRREGUI, J. M.ª (1933): «La Facultad de Ciencias Económicas y el sentido de la Universidad», publicado por Anales de Economía, 1.ª época, números 49-60, 1.953-1.955.

Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre de Universidades.

Declaración de la Sorbona de 25 de mayo de 1998.

La integración del sistema universitario español en el Espacio Europeo de Enseñanza Superior. Documento marco. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, febrero, 2003.